

5) $(1, x, x^2, \dots, x^n)$

Aşağıdaki fonksiyonların, karşılarında verilen denklemlerin genel çözümünü olup olmadığını gösteriniz.

1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{5x/12}$; $y'' + y' - 6y = 0$

2) $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{4} e^x$; $y'' - 6y' + 9y = e^x$

3) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 e^x$; $(D^3 - D^2 + D - 1)y = 0$

4) $y = \ln(\sin(x - C_1)) + C_2$; $y'' + (y')^2 + 1 = 0$

9) Clairaut Dif. Denklemleri

$y = x \cdot y' + \varphi(y')$ şeklindeki denkleme Clairaut Dif. Denklemleri denir.

Çözüm için, denklemin türevi alınır.

$$y' = y' + x \cdot y'' + y'' \varphi'(y')$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = p \text{ dönüşümü yapılır.}$$

$$y' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p' \text{ olur.}$$

$$p'(x + \varphi'(p)) = 0 \text{ olur. Buradan,}$$

$$x + \varphi'(p) = 0 \text{ ve } p' = 0 \text{ yazılır.}$$

1) $p' = 0$ ise $\boxed{p = C}$ olur. Verilen Clairaut

Dif. Denkleminde yerine yazılırsa,

$$\boxed{y = Cx + \varphi(C)} \text{ şeklinde genel çözüm bulunur.}$$

2) $\left. \begin{array}{l} x + \varphi'(p) = 0 \\ y = px + \varphi(p) \end{array} \right\}$ Bu iki denklemden p yok edilerek $F(x, y) = 0$ şeklinde elde edilen Clairaut denkleminin çözümüne Tekil Çözüm denir.

$$\left. \begin{array}{l} x = -\varphi'(p) \\ y = px + \varphi(p) \end{array} \right\} \text{denklemlerine Clairaut Denkleminin parametrik çözümleri denir.}$$

Örnek : $y = xy' + y' - y'^2$ Dif. Denklemini

Çözümlü 2.

$$y' = y' + xy'' + y'' - 2y'y'' \quad y' = p, y'' = p' \text{ olur.}$$

$$p'(x+1-2p) = 0$$

$$(1) p' = 0$$

$$(2) x+1-2p = 0$$

$$(1) p' = 0 \quad p = c.$$

$$\boxed{y = cx + c - c^2} \text{ Genel Çözüm.}$$

$$(2) p = \frac{x+1}{2} \quad y = \frac{x+1}{2} \cdot x + \frac{x+1}{2} - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2} \text{ Tekil Çözüm.}$$

$$y = px + p - p^2$$

Örnek :

$$y = xy' + \sqrt{1+y'^2} \text{ Dif. Denklemini Çözümlü.}$$

10) Lagrange Diferansiyel Denklemleri

$y = x f(y') + \varphi(y')$ şeklindeki dif. denkleme

Lagrange Dif. Denklemleri denir. Clairaut Dif. Denklemleri, Lagrange Dif. Denklemlerinin özel bir şeklidir.

$f(y') = y'$ ise denklem Clairaut denklemleri olur.

$y = x f(y') + \varphi(y')$ denkleminin türevi alınır.

$$y' = f(y') + x y'' f'(y') + y'' \varphi'(y')$$

olur. $y' = p$ dersek

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} \text{ olur.}$$

$$[x f'(p) + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx} + f(p) - p = 0$$

olur. Bu ifade x fonksiyon p değişkeni olarak düzenlenirse,

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f(p)}{f(p) - p} x = -\frac{\varphi'(p)}{f(p) - p}$$

şeklinde lineer dif. denkleme dönüşür. Bu denklemin çözümünü;

$X = F(p, c)$ dir. Sonuç olarak;

$$\left. \begin{array}{l} X = F(p, c) \\ y = X f(p) + \varphi(p) \end{array} \right\} \text{denklemleri: Lagrange Dif.}$$

Denklemlerin parametrik çözümleridir. (parametrik denklemlerdir)

Bu iki denklemden p yok edilerek, Lagrange Dif. Denkleminin genel çözümü bulunur.

Örnek: $y = x(1+y') + y'^2$ Dif. Denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y' = 1 + y' + x y'' + 2 y' y''$ $y' = p, y'' = \frac{dp}{dx} = p'$

$$1 + x p' + 2 p p' = 0 \quad 1 + p'(x + 2p) = 0$$

$$\boxed{\frac{dx}{dp} + x = -2p}$$

Linear Dif. Denklemin

$$\lambda = e^{\int dp} = e^p$$

$$(x e^p)' = -2 p e^p$$

$$x e^p = -2 [p e^p - e^p] + C$$

$$x = -2p + 2 + C e^{-p}$$

$$y = x(1+p) + p^2$$

(1)

(2)

Parametrik çözüm elde edilir

$F(x, y, c) = 0$ i Genel çözüm

Örnek: $y = x \cdot y'^2 + \frac{2y' - 1}{(y' - 1)^2}$ Dif. Denklemini

çözümler.

Ödev: Aşağıdaki Dif. Denklemleri çözümler.

1) $y = 2xy' + 3y'^2$

2) $y = (2 + y')x + y'^2$

3) $y = xy'^2 + y'^3$

4) $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$

Örnekler:

- 1) Bir özel çözümü $y_1 = x$ olan $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1$ Riccati Dif. Denkleminin Genel çözümünü bulunur.
- 2) $(xy^2 + y)dx - (x + y)dy = 0$ Dif. Denk. çözümüdür.
- 3) $x - 2y = (x - 2y + 1)y'$ Dif. Denk. çözümüdür.
- 4) $(\cos y) \cdot y' + 2x - 2x \sin y = 0$ Dif. Denk. çözümüdür.
- 5) $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$ Dif. Denk. çözümüdür.
- 6) $\frac{dy}{dt} = \frac{2\cos^2 t - \sin^2 t + y^2}{2\cos t}$ dif. denkleminin

bir özel çözümü $y = \sin t$ olduğuna göre
denklemin genel çözümünü bulunur.

Yüksek Mertebeden Lineer Dif. Denklemler

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (1)$$

Şeklindeki dif. denklemlerdir. Bu denkleme n . mertebeden lineer dif. denklem denir. ($a_0 \neq 0$ dir)

Eğer $f(x) = 0$ ise denkleme n . mertebeden homojen lineer dif. denklem denir. Eğer $a_0, a_1, \dots, a_n$ katsayıları sabit ise denkleme sabit katsayılı lineer dif. denklem denir

Örneğin; $(x+1)y'' - xy' + y = x^3$ denklemini deyişken katsayılı

$y'' + 3y' - 2y = 3x + 9$ denklemini ise sabit katsayılı denklemlerdir.

$$D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \dots, \quad D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

şeklinde türev operatörleri tanımlayalım. Bu türev operatörleri kullanarak (1) denklemini

$$[a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n] y = f(x)$$

şeklinde yazılabilir. Kısaca $L(D)y = f(x)$ şeklinde gösterilir. $L(D)$; D türev operatörünün bir polinomudur.

Örneğin $L(D) = D^2 - 2D - 1$ ise denklem

$$(D^2 - 2D - 1)y = f(x) \text{ şeklinde olur.}$$

(2. mertebe sabit katsayılı dif. denklem olur.)

$$\rightarrow y'' - 2y' - y = f(x)$$

örnek: $3y'' - 5y' + y = e^x$

$$(3D^2 - 5D + 1)y = e^x$$

örnek: $y''' - 4y'' + 5y' = 4x$

$$(D^3 - 4D^2 + 5D)y = 4x$$

Lineer Bağımsızlık

$y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları veriliyor $x \in [a, b]$ için

(*) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0$ eşitliği $C_1, C_2, \dots, C_n$ lerin

hepsi birden sıfır olmadan sağlanıyorsa $y_1, y_2, \dots, y_n$

fonsiyonlarına lineer bağımlıdır denir. (*) eşitliği

sadece $C_1 = 0, C_2 = 0, \dots, C_n = 0$ için sağlanıyorsa $y_1, y_2, \dots, y_n$

fonsiyonlarına lineer bağımsızdır denir.

Örnek: x ve $2x$ fonksiyonları $0 \leq x \leq 1$ aralığında lineer bağımlıdır.

$C_1 x + C_2 2x = 0$ eşitliği C_1 ve C_2 sıfır olmadıkça sağlanabilmektedir. Bu nedenle x ve $2x$ fonksiyonları lineer bağımlıdır.

$$x(C_1 + 2C_2) = 0 \quad C_1 = 2 \text{ olsun } C_2 = -1 \text{ olur.}$$

Örnek: x ve x^2 fonksiyonları $0 \leq x \leq 1$ aralığında lineer bağımsızdır.

$$C_1 x + C_2 x^2 = 0 \text{ eşitliği sadece } C_1 = 0, C_2 = 0$$

ışın sağlanır.

Tanım: $I = [a, b]$ kapalı aralıkta tanımlı $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonları n . mertebeye kadar sürekli türevleri olsun. Bu durumda, bu fonksiyonların bu I aralığında lineer bağımlı olması için gerekli koşulun, bu I aralığında her x değeri için

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

olmazlar. Bu determinanta Wronski determinanıdır.
O halde $W=0$ olması lineer bağımlılık için gerek
koşuldur. Yeter değildir. Yani $W=0$ olmasına karşın
 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonları lineer bağımsız olabilir.
 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonlarının bu I aralığında
lineer bağımsız olması için gerekli ve yeterli koşulun,
bu I aralığındaki her x değeri için Wronski determinanın
sıfırdan farklı olmasıdır. Yani, $W \neq 0$ olmasıdır.

Örnek: a ve b iki reel sayı ve $b \neq 0$ olsun. Bu durumda
 $y_1 = e^{ax} \cos bx$, $y_2 = e^{ax} \sin bx$ fonksiyonları tüm reel
ekseninde lineer bağımsızdır.

$$W = \begin{vmatrix} e^{ax} \cos bx & e^{ax} \sin bx \\ ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx & ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx \end{vmatrix}$$

$$= be^{2ax} (\cos^2 bx + \sin^2 bx) = be^{2ax} \neq 0 \text{ olur.}$$

Buda verilen y_1 ve y_2 fonksiyonlarının tüm reel eksen
üzerinde lineer bağımsız olduklarını gösterir.

Örnek: e^{ax}, e^{bx}, e^{cx} fonksiyonlarının lineer bağımsız olduklarını gösteriniz. ($a \neq b \neq c$ dir)

$$W = \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} & e^{cx} \\ ae^{ax} & be^{bx} & ce^{cx} \\ a^2e^{ax} & b^2e^{bx} & c^2e^{cx} \end{vmatrix} = e^{(a+b+c)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= e^{(a+b+c)x} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)e^{(a+b+c)x} \neq 0 \text{ olur, } (a \neq b \neq c)$$

$W \neq 0$ olur. O halde verilen fonksiyonlar lineer bağımsızdır.

Örnek: $\sin^2 x, \cos^2 x, 1$ fonksiyonlarının herhangi bir aralıkta lineer bağımlı olduklarını gösteriniz.

$$W = \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin 2x & -\sin 2x & 0 \\ 2\cos 2x & -2\cos 2x & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ olur.}$$

$W = 0$ olur. Bu da tüm x değerleri için $\sin^2 x, \cos^2 x, 1$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olduklarını gösterir.

Teorem : $[a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n] y = f(x) \quad (1)$

lineer denkleminde

$$[a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n] y = 0 \quad (2)$$

ikinci tarafı sıfır lineer denkleminde verilmiş olsun. Burada $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ ve $f(x)$ bir I aralığında tanımlı, sürekli ve $a_0 \neq 0$ olsun. Bu durumda

(1) denkleminin I aralığında n tane lineer bağımsız çözümü vardır. Eğer $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonları

(2) nin lineer bağımsız çözümleri ise

$$u = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$$

fonksiyonu (2) nin genel çözümüdür. Bundan başka verilen I aralığında (1) denkleminin çözümleri de vardır. Eğer v , (1) in bir çözümü ise

$$y = u + v \quad (3)$$

fonksiyonu (1) in genel çözümü olur. Burada u ya da temel çözümleri fonksiyon v ya da şerh çözüm denir.

Örnek:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x^2 - 2 \text{ fonksiyonunun}$$

$y'' + y = x^2$ denkleminin genel çözümünü olduğunu gösteriniz.

Cözüm: $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$ fonksiyonlarının $y'' + y = 0$

homojen denklemini sağladığı kolayca görülür.

Wronski determinantı sıfırdan farklı olduğundan bu fonksiyonlar lineer bağımsızdır. O halde iki parametre içeren

$$u = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

temel çözümleri fonksiyonu homojen denklemin genel çözümüdür.

Diğer yandan hiç parametre içermeyen $v = x^2 - 2$ fonksiyonu verilen denklemi sağlar. Yani bir özel çözümdür.

Böylece,

$$y = u + v = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x^2 - 2$$

fonksiyonu ikinci taraflı denklemin genel çözümüdür.

Ödev: 1) (e^{2x}, e^{-x}, e^{4x}) fonksiyonlarının lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız.

2) $(1, -x^2, x^2+1)$ "

3) $(\sin x, \cos x)$ "

4) $(\sin^2 x, \cos^4 x, \cos 2x)$ "