Dağılım Parametreleri

YTÜ-Harita Mühendisliği Bölümü, İstanbul, 2024

Varyans

Beklenen değer bir rasgele değişkenin alabileceği değerlerin dağılımı, değişimi ya da yayılması hakkında fikir vermez.

Varyans ise, dağılım, değişim ve yayılım ile ilgili bilgi verir.

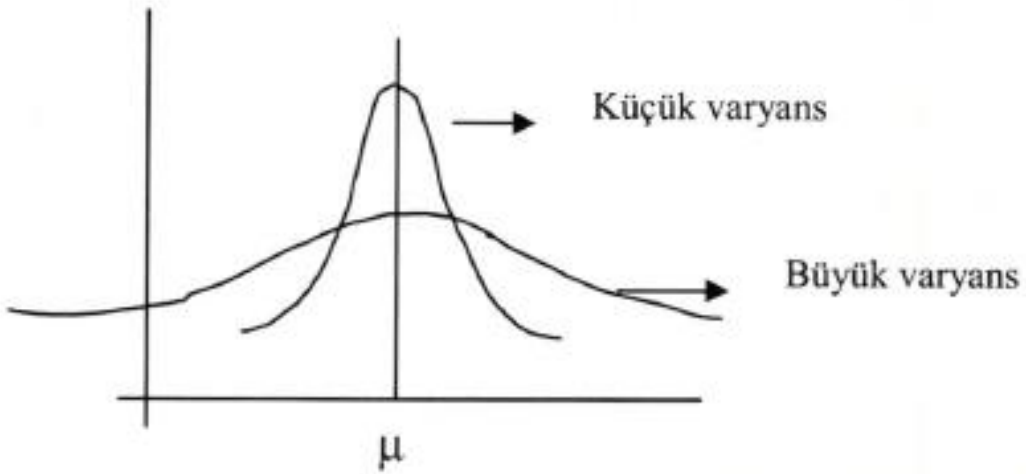
$$Var(X) = \sigma_x^2 = E[(X-\mu)^2]$$

1. Kesikli Rasgele Değişken için Varyans

$$Var(X) = \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

2. Sürekli Rasgele Değişken için Varyans

$$Var(X) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu)^2 f(x)\,dx$$



Küçük varyans
Büyük varyans
μ

Varyans ile İlgili Teoremler

1. $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$

2. c bir sabit sayı ise,

   Var(c*X)=c²*Var(X)

3. a=μ=E(X) iken, E[(X-a)²] minimum

4. X ve Y bağımsız değişkenler ise,

   Var(X+Y)=Var (X)+Var (Y) $\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$

   Var(X-Y)=Var (X)+Var (Y) $\sigma^2_{X-Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$

Örnek: X'in yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir. Varyans ve standart sapmasını bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{aralık dışı} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{0}^{2} x(\frac{1}{2}x)dx = \int_{0}^{2} \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$\sigma^2 = E[(X-\frac{4}{3})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\frac{4}{3})^2 f(x)dx = \int_{0}^{2} (x-\frac{4}{3})^2(\frac{1}{2}x)dx = \frac{2}{9}$$

$$\sigma_x = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E[(X-\mu)^2]}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Örnek: Hilesiz bir para üç kez atılıyor. X rasgele değişkeni üste gelen tura sayısı ise X'in beklenen değerini ve varyansını bulunuz.

$$S = \{TTT, TTY, TYT, YTT, YYT, YTY, TYY, YYY\}$$

$$E(X) = \sum x f(x) \qquad Var(X) = \sigma_x^2 = E[(X-\mu)^2] \qquad Var(X) = \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

X=x	f(x)	x*f(x)	[x-E(X)]²	[x-E(X)]²*f(x)
0	1/8	0	9/4	9/32
1	3/8	3/8	1/4	3/32
2	3/8	6/8	1/4	3/32
3	1/8	3/8	9/4	9/32

$$E(X) = \sum x f(x) = 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{9}{32} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{32} = \frac{24}{32}$$

Ortak Dağılımlar

1. **İki Kesikli Rasgele Değişken için Beklenen Değer ve Varyans**

$$E(X) = \mu_X = \sum_x \sum_y x\, f(x, y)$$

$$E(Y) = \mu_Y = \sum_x \sum_y y\, f(x, y)$$

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \sum_x \sum_y (x-\mu_X)^2 f(x, y)$$

$$\sigma_Y^2 = E[(Y-\mu_Y)^2] = \sum_x \sum_y (y-\mu_Y)^2 f(x, y)$$

2. **İki Sürekli Rasgele Değişken için Beklenen Değer ve Varyans**

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x, y)\, dx\, dy$$

$$\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x, y)\, dx\, dy$$

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f(x, y)\, dx\, dy$$

$$\sigma_Y^2 = E[(Y-\mu_Y)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu_Y)^2 f(x, y)\, dx\, dy$$

Ortak Dağılımlar

X ve Y gibi iki rasgele değişkenin bulunması durumunda tanımlanabilecek diğer bir büyüklük de kovaryanstır.

Kovaryans, iki rasgele değişkenin beraber değişimlerini ve ilişkilerini gösterir.

1. İki Kesikli Rasgele Değişken

$$\sigma_{XY} = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y)$$

2. İki Sürekli Rasgele Değişken

$$\sigma_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y)\, dx\, dy$$

Kovaryans ile İlgili Teoremler

1. $$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) - \mu_x \mu_y$$

2. X ve Y bağımsız değişkenler ise,

$$\sigma_{XY} = Cov(X, Y) = 0$$

3. $$Var(X \mp Y) = Var(X) + Var(Y) \mp 2\,Cov(X, Y)$$

$$\sigma^2_{X \mp Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y \mp 2\sigma_{XY}$$

4. $$|\sigma_{XY}| \le \sigma_X \, \sigma_Y$$

Korelasyon Katsayısı

Eğer X ve Y bağımsız rasgele değişkenlerse o zaman

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \sigma_{XY} = 0$$

Diğer yandan eğer X ve Y tamamıyla bağımlı ise örneğin X = Y ise o zaman

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \sigma_{XY} = \sigma_X \sigma_Y$$

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

X ve Y'nin bağımlılık ölçütünü veren bağıntıya, korelasyon katsayısı denir.

Örnek: X ve Y kesikli rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu $f(x,y)=c*(2x+y)$ olarak veriliyor. Eşitlikte x ve y; $0\leq x \leq 2$; $0\leq y \leq 3$ ve diğer bölgelerde de $f(x,y)=0$ olmak üzere tüm tamsayı değerlerini alabiliyor.

a) c=?
b) X'in varyansını bulunuz.
c) Y'nin varyansını bulunuz.
d) Cov(X,Y)=?
e) ρ=?

x \ y	0	1	2	3	Toplam
0	0	c	2c	3c	6c
1	2c	3c	4c	5c	14c
2	4c	5c	6c	7c	22c
Toplam	6c	9c	12c	15c	1

a) 42c=1 ; c=1/42

Örnek: b)

$$\mathrm{Var}(X)=E[(x-\mu)^2]=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$E(X)=\sum_x\sum_y xf(x,y)=\sum_x x\left[\sum_y f(x,y)\right]$$

$$=(0)(6c)+(1)(14c)+(2)(22c)=58c=\frac{58}{42}=\frac{29}{21}$$

$$E(X^2)=\sum_x\sum_y x^2 f(x,y)=\sum_x x^2\left[\sum_y f(x,y)\right]$$

$$=(0)^2(6c)+(1)^2(14c)+(2)^2(22c)=102c=\frac{102}{42}=\frac{17}{7}$$

$$\sigma_x^2=\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E[(X)]^2=\frac{17}{7}-\left(\frac{29}{21}\right)^2=\frac{230}{441}$$

Örnek: c)

$$Var(Y) = E(Y^2)-[E(Y)]^2$$

$$E(Y) = \sum_x \sum_y yf(x,y) = \sum_y y\left[\sum_x f(x,y)\right]$$

$$= (0)(6c) + (1)(9c) + (2)(12c) + (3)(15c) = 78c = \frac{78}{42} = \frac{13}{7}$$

$$E(Y^2) = \sum_x \sum_y y^2 f(x,y) = \sum_y y^2\left[\sum_x f(x,y)\right]$$

$$= (0)^2(6c) + (1)^2(9c) + (2)^2(12c) + (3)^2(15c) = 192c = \frac{192}{42} = \frac{32}{7}$$

$$\sigma_y^2 = Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{32}{7} - \left(\frac{13}{7}\right)^2 = \frac{55}{49}$$

Örnek: d)

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y)$$

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy \;\; f(x,y)$$

$$= (0)(0)(0) + (0)(1)(c) + (0)(2)(2c) + (0)(3)(3c)$$

$$+ (1)(0)(2c) + (1)(1)(3c) + (1)(2)(4c) + (1)(3)(5c)$$

$$+ (2)(0)(4c) + (2)(1)(5c) + (2)(2)(6c) + (2)(3)(7c)$$

$$E(XY) = 102c = \frac{102}{42} = \frac{17}{7}$$

$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{17}{7} - \left(\frac{29}{21}\right)\left(\frac{13}{7}\right) = -\frac{20}{147}$$

e) $$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-20/147}{\sqrt{230/441}\sqrt{55/49}} = \frac{-20}{\sqrt{230}\sqrt{55}} \cong -0.2103$$

Örnek: Bir laboratuvar deneyinde eğer cihaz çalışıyorsa gözlenen çıktı X'in yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \begin{cases} 2*(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Buna göre, X'in varyansını ve standart sapmasını bulunuz.

Çözüm:

$$E(X) = 2\int_0^1 x(1-x)dx = 2(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = 2\int_0^1 x^2(1-x)dx = 2(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$Var(X) = \frac{1}{6} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{18}$$

$$\sigma = \sqrt{1/18} = 0.2357$$

Random Değişkenlerin Lineer Kombinasyonlarının Ortalamaları ve Varyansları

Teorem: Eğer a ve b sabit değerler ise, bu durumda

$$E(ax+b)=a*E(X)+b$$

Örnek: X rasgele değişkeni herhangi bir güneşli Cuma gününde 16:00 ile 17:00 arasında araba yıkaması yaptıran araçların sayısı olsun. Bu rasgele değişkene ait olasılık aşağıda verilmektedir.

X	4	5	6	7	8	9
P(X=x)	1/12	1/12	1/4	1/4	1/6	1/6

Bu yıkama işleminde müdür görevlilere g(x)=2x-1 (TL) şeklinde ödeme yapmaktadır. Buna göre bu zaman aralığında görevlilerin kazanmayı beklediği para miktarı ne kadardır?

Çözüm: 1.yol

$$E(g(x)) = E(2x-1) = \sum_{x=4}^{9} (2x-1) f(x)$$

$$E(g(x)) = 7*\frac{1}{12} + 9*\frac{1}{12} + 11*\frac{1}{4} + 13*\frac{1}{4} + 15*\frac{1}{6} + 17*\frac{1}{6} = 12,67\,TL$$

Çözüm: 2.yol

$$E(2x-1) = 2E(x) - 1$$

$$\mu = E(x) = \sum_{x=4}^{9} x f(x) = 4*\frac{1}{12} + 5*\frac{1}{12} + 6*\frac{1}{4} + 7*\frac{1}{4} + 8*\frac{1}{6} + 9*\frac{1}{6} = \frac{41}{6}$$

$$\mu_{2x-1} = 2*\frac{41}{6} - 1 = 12,67\,TL$$

Teorem: Eğer a ve b sabit değerler ise, bu durumda

$$\sigma^2_{ax+b} = a^2\sigma^2_x = a^2\sigma^2$$

$$\sigma^2_{ax+b} = E\left\{[(ax+b)-\mu_{ax+b}]^2\right\}$$

$$\mu_{ax+b} = E(ax+b) = a\,E(x)+b$$

$$= a\,\mu + b$$

$$\sigma^2_{ax+b} = E[(ax+b-a\mu-b)^2]$$

$$= a^2E[(x-\mu)^2] = a^2\sigma^2$$

Teorem: X ve Y rasgele değişkenleri ortak olasılık dağılımına sahip f(x,y) rasgele değişkenler ise,

$$\sigma^2_{ax+by} = a^2\sigma^2_x + b^2\sigma^2_y + 2ab\,\sigma_{xy}$$

X ve Y bağımsız rasgele değişkenler ise,

$$\sigma^2_{ax+by} = a^2\sigma^2_x + b^2\sigma^2_y$$

$$\sigma^2_{ax-by} = a^2\sigma^2_x + b^2\sigma^2_y$$

Örnek: Bir kimyasal üründe X ve Y rasgele değişkenleri iki farklı tipteki bozulmayı ortaya koysun. Bu iki rasgele değişken bağımsız ve varyansları sırasıyla 2 ve 3 olduğuna göre; Z=3X-2Y+5 rasgele değişkeninin varyansını hesaplayınız.

$$\sigma_z^2 = \sigma_{3x-2y+5}^2 = \sigma_{3x-2y}^2$$

$$\sigma_z^2 = 9\sigma_x^2 + 4\sigma_y^2 = 9*2 + 4*3 = 30$$