



KÜMELER VE OLASILIK

Örnek 1: 150 öğrencili bir kolejde; 85 öğrenci matematik sınıfına, 70 öğrenci yabancı dil sınıfına, 50 öğrenci ise hem matematik hem yabancı dil sınıfına kayıt olmuştur. Buna göre;

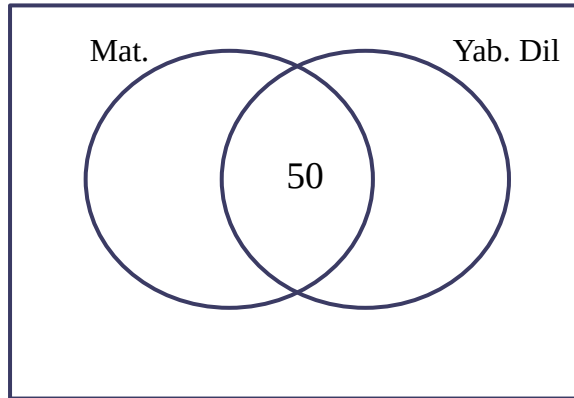
- a) kaç öğrenci sadece matematik sınıfına,
- b) kaç öğrenci sadece yabancı dil sınıfına,
- c) kaç öğrenci matematik ya da yabancı dil sınıfına,
- d) kaç öğrenci ne matematik ne de yabancı dil sınıfına,

kayıt olmuştur?

Örnek 1: 150 öğrencili bir kolejde; 85 öğrenci matematik sınıfına, 70 öğrenci yabancı dil sınıfına, 50 öğrenci ise hem matematik hem yabancı dil sınıfına kayıt olmuştur. Buna göre;

- a) kaç öğrenci sadece matematik sınıfına,
- b) kaç öğrenci sadece yabancı dil sınıfına,
- c) kaç öğrenci matematik ya da yabancı dil sınıfına,
- d) kaç öğrenci ne matematik ne de yabancı dil sınıfına,

kayıt olmuştur?

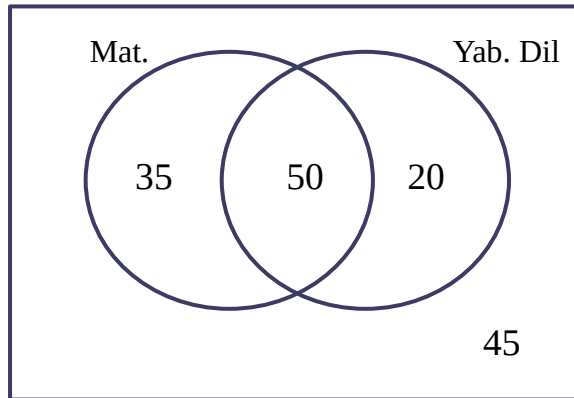


E

Örnek 1: 150 öğrencili bir kolejde; 85 öğrenci matematik sınıfına, 70 öğrenci yabancı dil sınıfına, 50 öğrenci ise hem matematik hem yabancı dil sınıfına kayıt olmuştur. Buna göre;

- a) kaç öğrenci sadece matematik sınıfına,
- b) kaç öğrenci sadece yabancı dil sınıfına,
- c) kaç öğrenci matematik ya da yabancı dil sınıfına,
- d) kaç öğrenci ne matematik ne de yabancı dil sınıfına,

kayıt olmuştur?



E

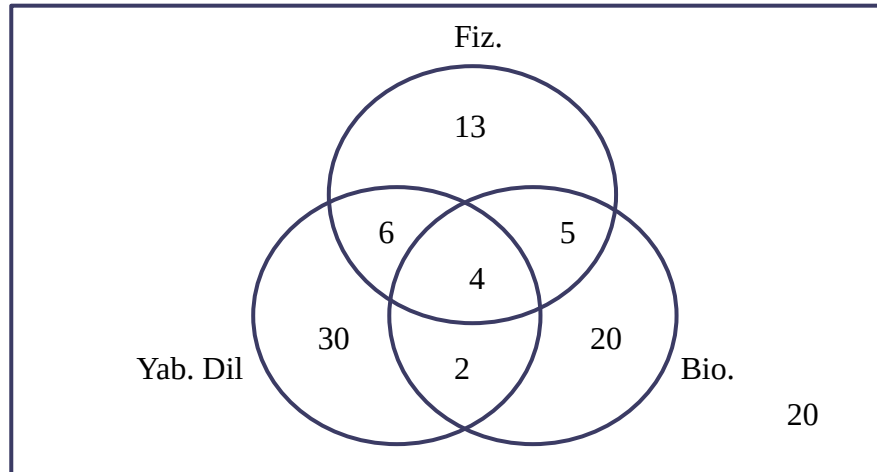
- | | |
|---------------------------|-----|
| a) sadece mat. | 35 |
| b) sadece yab. dil | 20 |
| c) mat. ya da yab. dil | 105 |
| d) ne mat. ne de yab. dil | 45 |

Örnek 2: 100 öğrencinin bulunduğu bir sınıfta; 28 öğrenci fizik dersini, 31 öğrenci biyolojini dersini, 42 öğrenci ise yabancı dil dersini, 9 öğrenci fizik ve biyoloji derslerini, 10 öğrenci fizik ve yabancı dil derslerini, 6 öğrenci biyoloji ve yabancı dil derslerini ve 4 öğrenci de her üç dersi de seçmiştir. Buna göre;

- a) kaç öğrenci bu üç dersi de seçmemiştir?
- b) kaç öğrenci fizik dersini seçmiş, ama biyoloji ve yabancı dil derslerini seçmemiştir?
- c) kaç öğrenci biyoloji ve fizik derslerini seçmiş, ama yabancı dil dersini seçmemiştir?

Örnek 2: 100 öğrencinin bulunduğu bir sınıfta; 28 öğrenci fizik dersini, 31 öğrenci biyolojini dersini, 42 öğrenci ise yabancı dil dersini, 9 öğrenci fizik ve biyoloji derslerini, 10 öğrenci fizik ve yabancı dil derslerini, 6 öğrenci biyoloji ve yabancı dil derslerini ve 4 öğrenci de her üç dersi de seçmiştir. Buna göre;

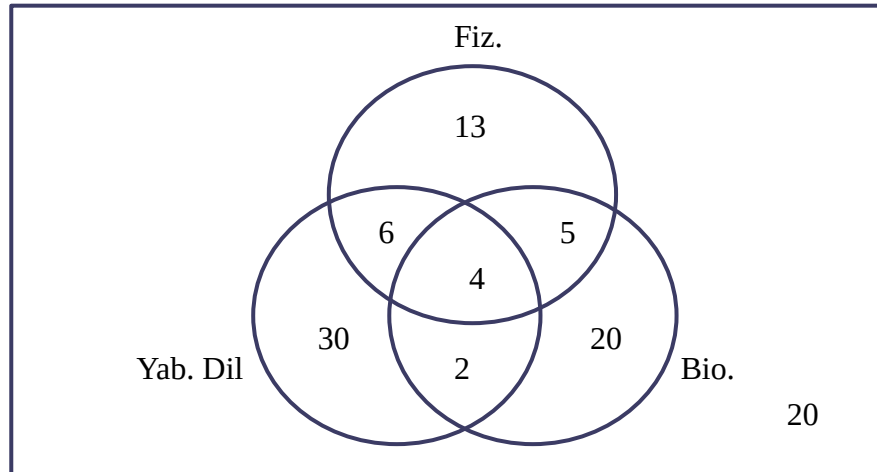
- a) kaç öğrenci bu üç dersi de seçmemiştir?
- b) kaç öğrenci fizik dersini seçmiş, ama biyoloji ve yabancı dil derslerini seçmemiştir?
- c) kaç öğrenci biyoloji ve fizik derslerini seçmiş, ama yabancı dil dersini seçmemiştir?



E

Örnek 2: 100 öğrencinin bulunduğu bir sınıfta; 28 öğrenci fizik dersini, 31 öğrenci biyolojini dersini, 42 öğrenci ise yabancı dil dersini, 9 öğrenci fizik ve biyoloji derslerini, 10 öğrenci fizik ve yabancı dil derslerini, 6 öğrenci biyoloji ve yabancı dil derslerini ve 4 öğrenci de her üç dersi de seçmiştir. Buna göre;

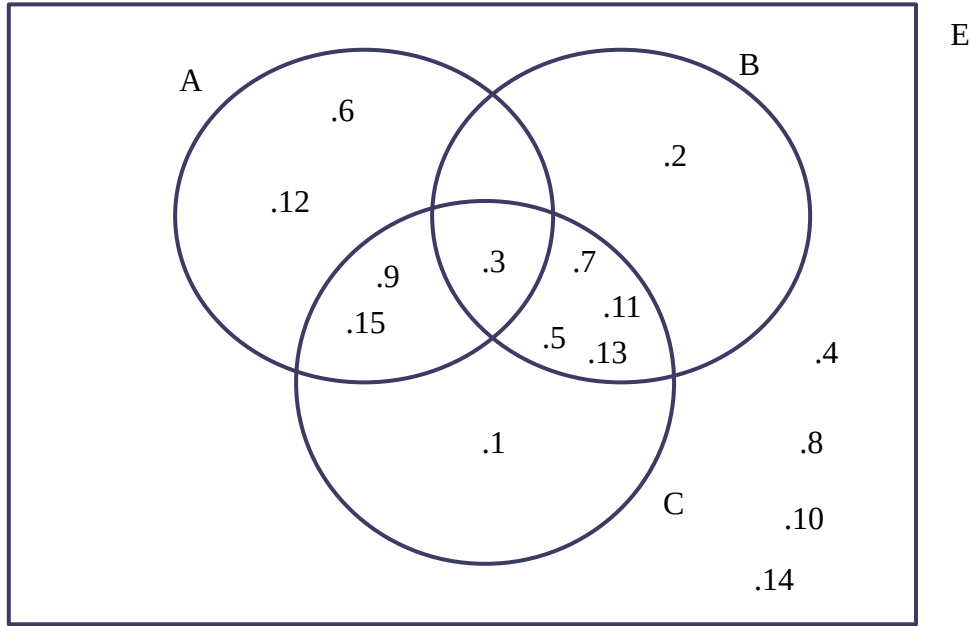
- a) kaç öğrenci bu üç dersi de seçmemiştir? **20**
- b) kaç öğrenci fizik dersini seçmiş, ama biyoloji ve yabancı dil derslerini seçmemiştir? **13**
- c) kaç öğrenci biyoloji ve fizik derslerini seçmiş, ama yabancı dil dersini seçmemiştir? **5**



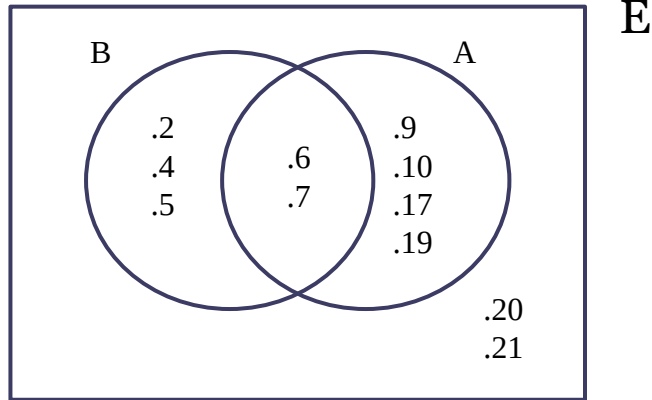
E

Örnek 3: E; 1'den 15'e kadar olan tam sayılardan,
A; 3 ve 3'ün katlarından,
B; asal sayılardan,
C; tek sayılardan,
oluşmaktadır. Bu duruma göre Venn diyagramını oluşturunuz.

Örnek 3: E; 1'den 15'e kadar olan tam sayılardan,
A; 3 ve 3'ün katlarından, $A=\{3,6,9,12,15\}$
B; asal sayılardan, $B=\{2,3,5,7,11,13\}$
C; tek sayılardan, $C=\{1,3,5,7,9,11,13,15\}$
oluşmaktadır. Bu duruma göre Venn diyagramını oluşturunuz.

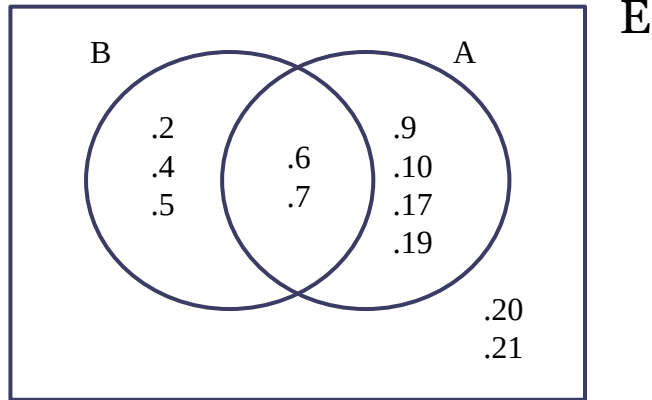


Örnek 4:



1. $A \cap B$
2. $A \cup B$
3. $(A \cup B)'$
4. $A' \cap B$
5. $A \cup B'$

Örnek 4:



1. $A \cap B = \{6, 7\}$

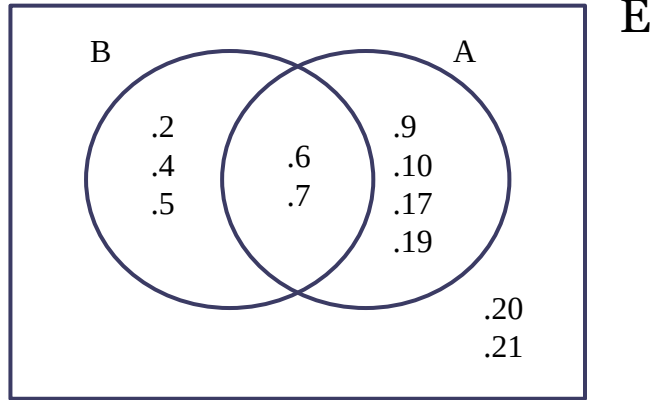
2. $A \cup B$

3. $(A \cup B)'$

4. $A' \cap B$

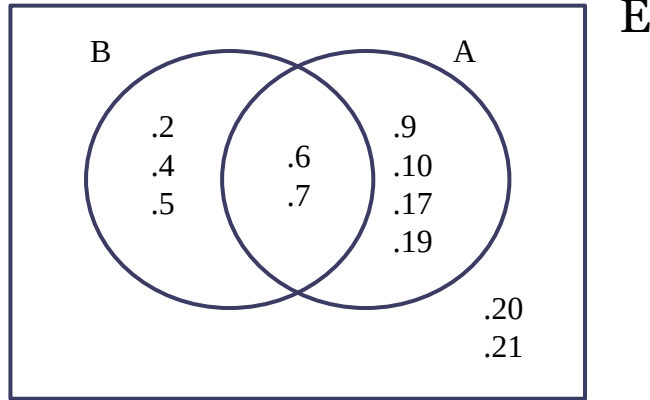
5. $A \cup B'$

Örnek 4:



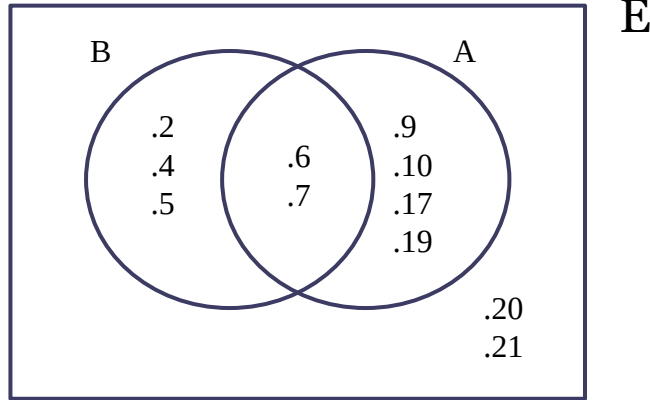
1. $A \cap B = \{6, 7\}$
2. $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 17, 19\}$
3. $(A \cup B)'$
4. $A' \cap B$
5. $A \cup B'$

Örnek 4:



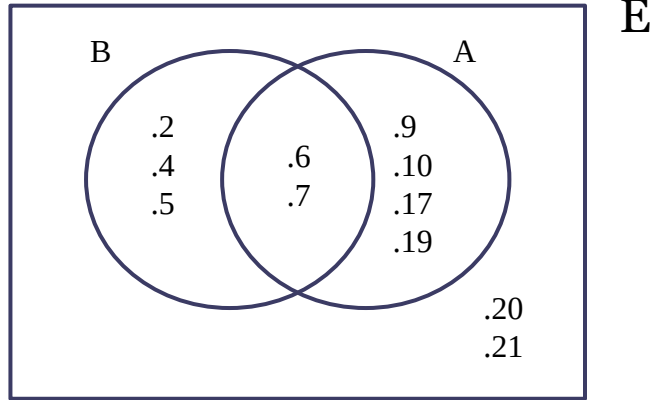
1. $A \cap B = \{6, 7\}$
2. $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 17, 19\}$
3. $(A \cup B)' = \{20, 21\}$
4. $A' \cap B$
5. $A \cup B'$

Örnek 4:



1. $A \cap B = \{6, 7\}$
2. $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 17, 19\}$
3. $(A \cup B)' = \{20, 21\}$
4. $A' \cap B = \{2, 4, 5\}$
5. $A \cup B'$

Örnek 4:

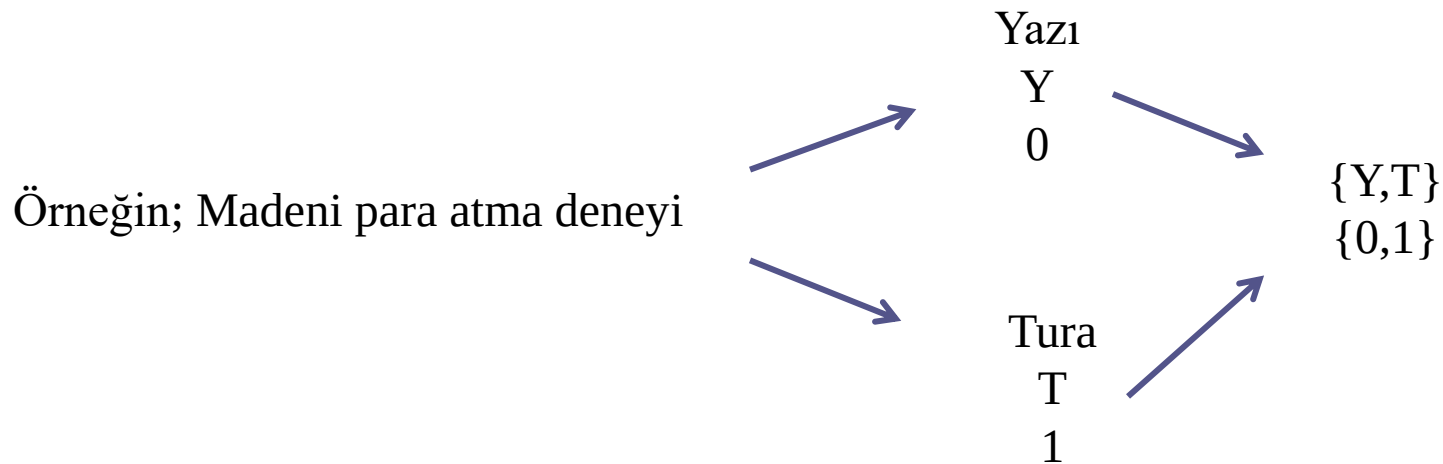


1. $A \cap B = \{6, 7\}$
2. $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 17, 19\}$
3. $(A \cup B)' = \{20, 21\}$
4. $A' \cap B = \{2, 4, 5\}$
5. $A \cup B' = \{6, 7, 9, 10, 17, 19, 20, 21\}$

RASGELE (RASSAL) DENEYLER

Temel prensip olarak eğer biz bu deneyleri olabildiğince aynı koşullarda tekrarlarsak esas olarak aynı sonuçlara ulaşırız.

Deneyler olabildiğince aynı koşullarda tekrarlansa bile deney sonuçları esasen aynı elde edilemez. Bu tür deneyler *rasgele deneyler* olarak adlandırılır.



RASGELE (RASSAL) DENEYLER

Örneğin; Bir zar atma deneyi $\longrightarrow$ $\{1,2,3,4,5,6\}$

Bir parayı iki kez atalım $\longrightarrow$ $\{TT, TY, YT, YY\}$

Vida üreten bir makina düşünelim. Makinanın ürettiği vidalardan bazıları hatalı, bazıları sağlam olacaktır. Yani üretilen vida $\{\text{sağlam, hatalı}\}$ kümesine ait olacaktır.

ÖRNEK UZAY

Bir rasgele deneyin olası tüm çıktılarından (gerçekleşen değerlerinden) oluşan S kümesi **örnek uzayı**, her bir gerçekleşen değer ise **örnek noktası** olarak tanımlanır.

Genellikle bir deneyin çıktılarını tanımlayan birden fazla örnek uzayı vardır fakat bunlardan yalnızca birisi en çok bilgiyi içerir.

Bu S örnek uzayıdır ve evrensel küme ile özdeştir.

ÖRNEK UZAY

Bir zar attığımızı düşünelim, örnek uzayı yada tüm gelebilecek sayıların kümesi $\{1,2,3,4,5,6\}$ dır. bir örnek uzayı ise $\{\text{tek sayılar, çift sayılar}\}$ şeklinde düşünülebilir.

Alfabemizden rasgele bir harf seçersek, $S = \{A, B, C \dots, Z\}$

Bir paranın tek atılışı için $S = \{\text{Yazı, Tura}\}$

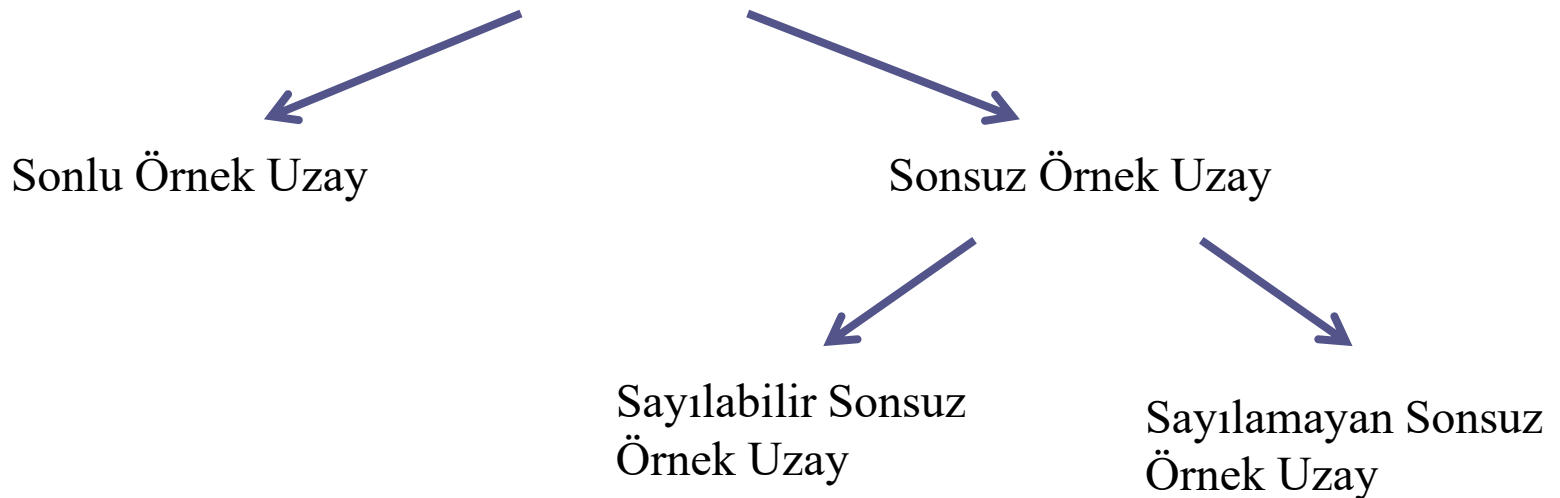
Kırmızı ve siyah renkli iki zarın atılmasından oluşan bir deneyi düşünelim. Kırmızı zar içinde elde edilen sonuç k , siyah zar için elde edilen sonuç s olsun. Bu durumda S örnek uzayı, her biri 1, 2, 3, 4, 5, 6 değerini alabilen (k, s) çiftlerinin kümesidir.

ÖRNEK UZAY

$$S = \{(k,s) \mid 1 \leq k \leq 6 \text{ ve } 1 \leq s \leq 6\}$$

k/s	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3,1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4,1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5,1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6,1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Örnek Uzayların Türleri



Sonlu Örnek Uzay: Örnek uzayı sonlu sayıda eleman içerir (zar atma deneyi).

Sonsuz Örnek Uzay: a. **Sayılabilir Sonsuz Örnek Uzay**: Örnek uzayının doğal sayılar kümesinde olduğu gibi çok fazla elemanı olan uzay.

b. **Sayılamayan Sonsuz Örnek Uzay**: Herhangi bir aralıkta sayılamayacak kadar çok elemanı olan uzay ($0 \leq x \leq 1$).

Örnek Uzayların Türleri

Kesikli Örnek Uzay: Sonlu ya da sayılabilir sonsuz örnek uzay.

Kesiksiz (Sürekli) Örnek Uzay: Sayılamayan sonsuz örnek uzay.

OLAY

Olay, örnek uzayı S 'in A alt kümesi olarak tanımlanır.

Bir olay, S örnek uzayının bir alt kümesi olduğundan, S 'nin kendisi ve $\emptyset$ (boş küme) de birer olaydır.

S 'ye **kesin olay**, $\emptyset$ 'ye **olanaksız olay** denir.

Kesin olay her zaman elde edilen, olanaksız olay ise elde edilmeyendir.

S 'nin tek noktasından oluşan olaya **basit olay** denir.

Gerçekleşmesi rastlantıya bağlı olan olaya **rasgele olay** denir.

OLAY

S örnek uzayındaki olaylar üzerinde küme işlemleri uygulayarak S örnek uzayındaki diğer olayları elde ederiz. A ve B olayları göz önünde tutulduğunda,

1. $A \cup B$, “**ya A yada B**” veya “**her ikiside**” olayını

($A \cup B$ olayının oluşması için A’nın oluşması ya da B’nin oluşması ya da her ikisinin de oluşması gerekir.)

2. $A \cap B$, “**A ve B**” olayını

($A \cap B$ olayının oluşması için A’nın oluşması ve B’nin oluşması gerekir.)

3. A' , “**A değil**” olayını

(A’nın tümleyeni A' olayının oluşması için A’nın oluşmaması gerekir.)

4. $A - B$, “**A fakat B değil**” olayını

simgeler.

OLAY

Eğer A ve B gibi iki olay ayrıkça, yani eğer $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B ye karşılıklı olarak birbirinin dışındadır (mutually exclusive) denir. Diğer bir deyişle eğer A ve B aynı zamanda oluşmazsa karşılıklı olarak birbirinin dışındadır.

Ayrık Olay

Kesişim kümesi olan olaylara ***herhangi iki olay*** denir.

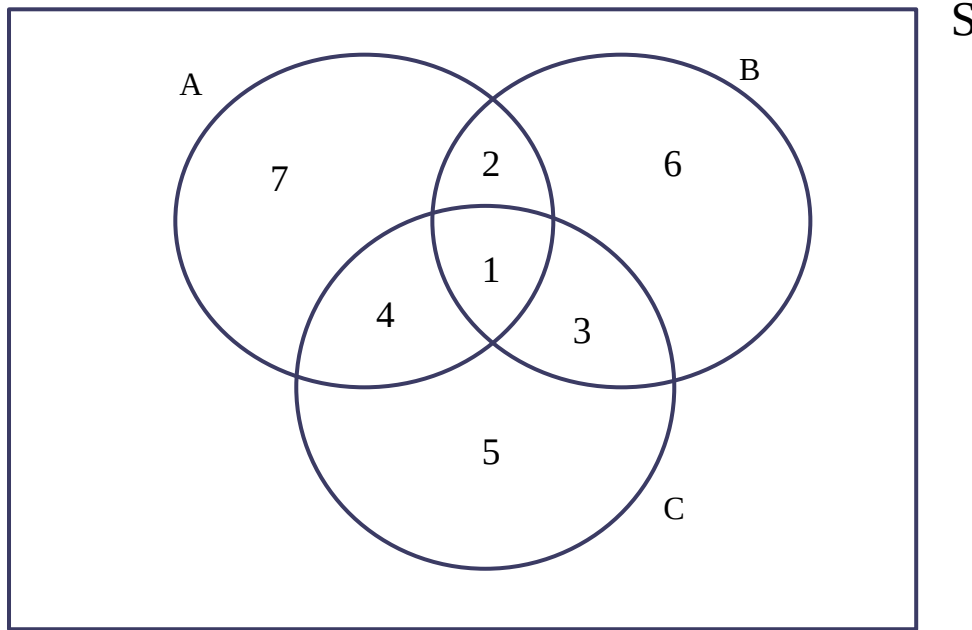
Örnek 1.13, Bir parayı iki kez atma deneyini gözönüne alalım. A “en az bir kez tura gelme” olayı, B ise “paranın ikinci atışta yazı gelmesi” olayı olsun. Bu durumda $A = \{TY, YT, TT\}$, $B = \{TY, YY\}$ olacaktır. Bu olaylara küme işlemlerini uygularsak

$$A \cup B = \{TY, YT, TT, YY\} = S \quad A \cap B = \{TY\}$$

$$A' = \{YY\}$$

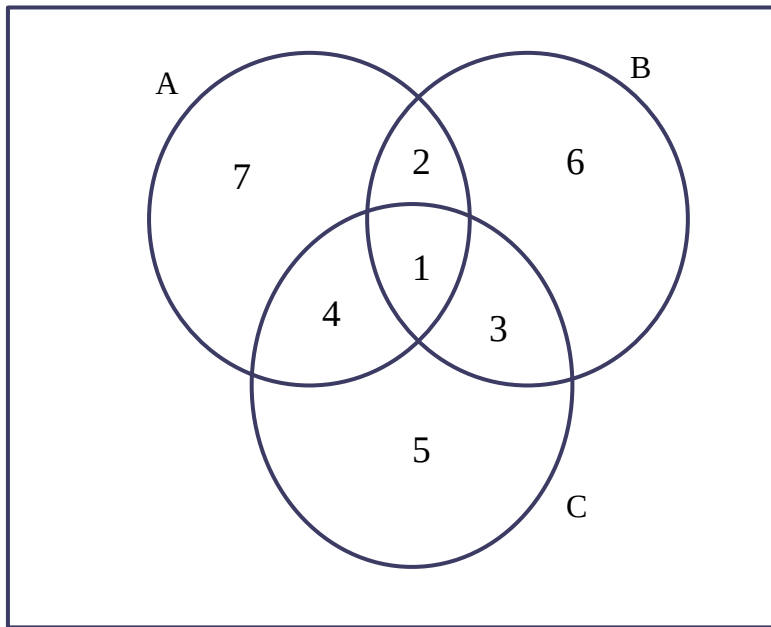
$$A - B = \{YT, TT\}$$

Örnek: Aşağıda verilen Venn diyagramında belirtilen bölgeleri kullanarak aşağıdaki olayları ifade ediniz.



1. $A \cap B$
2. $B \cap C$
3. $A \cup C$
4. $B' \cap A$
5. $A \cap B \cap C$
6. $(A \cup B) \cap C'$

Örnek:



S

1. $A \cap B \rightarrow$ 1. ve 2. bölge
2. $B \cap C \rightarrow$ 1. ve 3. bölge
3. $A \cup C \rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 5 ve 7. bölgeler
4. $B' \cap A \rightarrow$ 4. ve 7. bölge
5. $A \cap B \cap C \rightarrow$ 1. bölge
6. $(A \cup B) \cap C' \rightarrow$ 2, 6 ve 7. bölgeler

Örnek Noktalarının Sayma Kuralları

Sonlu sayıda elemanlı bir örnek uzaydaki bütün olanaklı sonuçların kümesini saymak isteyebiliriz. Deney sonuçları büyük sayıda ise herbirini saymak güçleşir ve bazen olanaksızdır. Bundan dolayı bazı yöntemler geliştirilmiştir.

Toplama Kuralı: İki işlem ayrık olsun. İlk işlem N_1 farklı şekilde ikincisi N_2 farklı şekilde yapılabilirse, işlemlerin biri veya diğeri $N_1 + N_2$ farklı şekilde yapılabilir.

Örneğin, bir zar atalım. Kaç farklı şekilde çift ya da tek sayı elde ederiz?

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad A = \text{çift sayı} \Rightarrow S(A) = 3$$

$$B = \text{tek sayı} \Rightarrow S(B) = 3$$

$$S(A \cup B) = S(A) + S(B) = 3 + 3 = 6 \text{ olur.}$$

Örnek Noktalarının Sayma Kuralları

Çarpma Kuralı: İki işlem düşünelim. İlk işlem N_1 farklı şekilde yapılabiliyorsa ve ilk işlem bu yolların herhangi birinde yapıldıktan sonra ikinci işlem N_2 farklı şekilde yapılabilirse, bu iki işlem birlikte $N_1 \times N_2$ farklı şekilde yapılabilir.

Örneğin, bir zarı iki kez atalım. Bu deneyin örnek uzayındaki örnek noktalarının sayısı;

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow S(A_1) = 6$$

$$A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow S(A_2) = 6 \qquad S(A_1 \times A_2) = 6 \times 6 = 36 \text{ olur.}$$

Örnek Noktalarının Sayma Kuralları

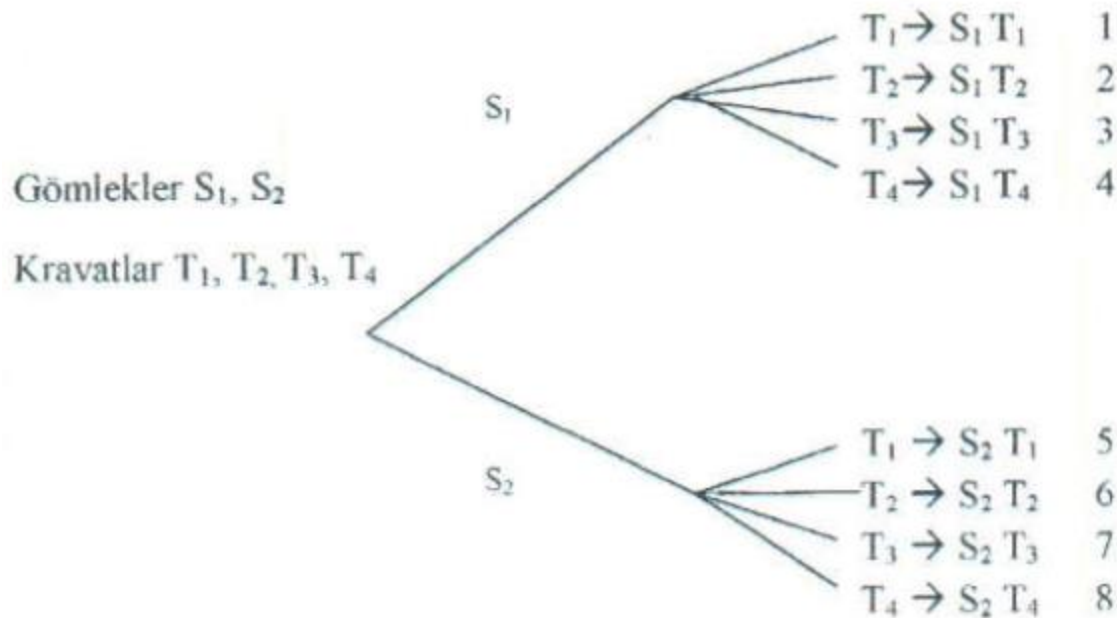
Bir örnek uzayı oluştururken karşılaşılan zorluklar nedeniyle ağaç diyagramlarından da yararlanılır.

Ağaç diyagramları sayesinde hem örnek nokta sayısı hem de sıralaması kolaylıkla belirlenebilir.

Örneğin; bir kişinin 2 gömleği ve 4 kravatı var ise bu kişi gömlek ve kravatı $2 \times 4 = 8$ farklı şekilde kullanabilir.

Örnek Noktalarının Sayma Kuralları

Örneğin; bir kişinin 2 gömleği ve 4 kravatı var ise bu kişi gömlek ve kravatı $2 \times 4 = 8$ farklı şekilde kullanabilir.

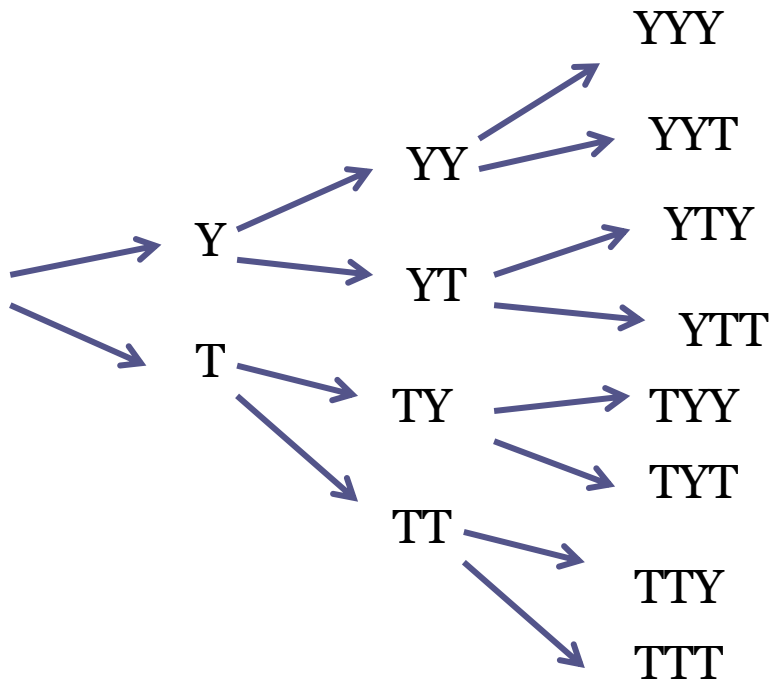


Örnek: Madeni bir para 3 kez atılıyor. Örnek uzayı ağaç diyagramı oluşturarak oluşturunuz. Buna göre,

S örnek uzayı içerisinde en az bir kere yazı gelmesi olayı nedir?

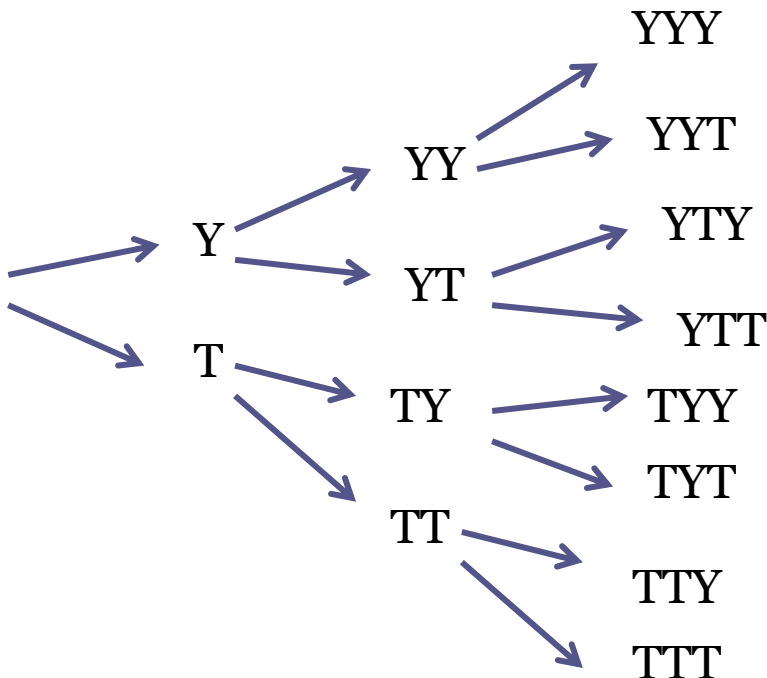
S örnek uzayı içerisinde en az bir kere tura gelmesi olayı nedir?

$A \cap B = ?$



Örnek: Madeni bir para 3 kez atılıyor. Örnek uzayı ağaç diyagramı oluşturarak oluşturunuz. Buna göre,

- S örnek uzayı içerisinde en az bir kere yazı gelmesi olayı nedir?
- S örnek uzayı içerisinde en az bir kere tura gelmesi olayı nedir?
- $A \cap B = ?$



$$A = \{YYY, YYT, YTY, YTT, TYY, TYT, TTY\}$$

$$B = \{YYT, YTY, YTT, TYY, TYT, TTY, TTT\}$$

$$A \cap B = \{YYT, YTY, YTT, TYY, TYT, TTY\}$$

Örnek: Bir aile yaz tatilini karavanlarında geçirmeyi düşünmektedir. Tatil sürecinde karşılaştıkları mekanik problemler M olayı, alacakları trafik cezaları T olayı ve kamp alanına ulaştıklarında boş yer olmaması ise V olayı ile gösterilsin. Verilenlere göre aşağıdaki olayları tanımlayınız.

- a. Aile, mekanik problemlerle karşılaşsın ama trafik cezası almasın ya da kamp alanında yer bulamama olayıyla karşılaşmasın.
- b. Aile, trafik cezası alsın ve kamp alanında yer bulamamayla karşılaşsın ama mekanik problemlerle karşılaşmasın.
- c. Aile, mekanik problemlerle ve kamp alanında yer bulamamayla karşılaşsın.
- d. Aile, trafik cezası alsın ama kamp alanında yer bulamama olayıyla karşılaşmasın.

Örnek: Bir aile yaz tatilini karavanlarında geçirmeyi düşünmektedir. Tatil sürecinde karşılaştıkları mekanik problemler M olayı, alacakları trafik cezaları T olayı ve kamp alanına ulaştıklarında boş yer olmaması ise V olayı ile gösterilsin. Verilenlere göre aşağıdaki olayları tanımlayınız.

- a. Aile, mekanik problemlerle karşılaşsın ama trafik cezası almasın ya da kamp alanında yer bulamama olayıyla karşılaşmasın. $(M \cap (V \cup T)')$
- b. Aile, trafik cezası alsın ve kamp alanında yer bulamamayla karşılaşsın ama mekanik problemlerle karşılaşmasın.
- c. Aile, mekanik problemlerle ve kamp alanında yer bulamamayla karşılaşsın.
- d. Aile, trafik cezası alsın ama kamp alanında yer bulamama olayıyla karşılaşmasın.

Örnek: Bir aile yaz tatilini karavanlarında geçirmeyi düşünmektedir. Tatil sürecinde karşılaştıkları mekanik problemler M olayı, alacakları trafik cezaları T olayı ve kamp alanına ulaştıklarında boş yer olmaması ise V olayı ile gösterilsin. Verilenlere göre aşağıdaki olayları tanımlayınız.

- a. Aile, mekanik problemlerle karşılaşsın ama trafik cezası almasın ya da kamp alanında yer bulamama olayıyla karşılaşmasın. $(M \cap (V \cup T)')$
- b. Aile, trafik cezası alsın ve kamp alanında yer bulamamayla karşılaşsın ama mekanik problemlerle karşılaşmasın. $(T \cap V) - M$
- c. Aile, mekanik problemlerle ve kamp alanında yer bulamamayla karşılaşsın.
- d. Aile, trafik cezası alsın ama kamp alanında yer bulamama olayıyla karşılaşmasın.

Örnek: Bir aile yaz tatilini karavanlarında geçirmeyi düşünmektedir. Tatil sürecinde karşılaştıkları mekanik problemler M olayı, alacakları trafik cezaları T olayı ve kamp alanına ulaştıklarında boş yer olmaması ise V olayı ile gösterilsin. Verilenlere göre aşağıdaki olayları tanımlayınız.

- a. Aile, mekanik problemlerle karşılaşsın ama trafik cezası almasın ya da kamp alanında yer bulamama olayıyla karşılaşmasın. $(M \cap (V \cup T)')$
- b. Aile, trafik cezası alsın ve kamp alanında yer bulamamayla karşılaşsın ama mekanik problemlerle karşılaşmasın. $(T \cap V) - M$
- c. Aile, mekanik problemlerle ve kamp alanında yer bulamamayla karşılaşsın. $(M \cap V)$
- d. Aile, trafik cezası alsın ama kamp alanında yer bulamama olayıyla karşılaşmasın. $(T - V)$

PERMÜTASYON VE KOMBİNASYON

Permütasyon (Dizilem)

Tanım: 1'den n 'ye kadar pozitif tamsayıların çarpımına n -faktöriyel denir ve $n!$ olarak yazılır.

$$n! = 1.2.3... (n-1).(n) = (n-1)!.n$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

olarak tanımlanır.

Tanım: Nesnelerin kümesinin bir kısmının ya da tümünün belli bir sıralamasına veya düzenlenmesine permütasyon denir ve P_n ile gösterilir.

Teorem: Tümü birlikte kullanılan n farklı nesnenin permütasyonlarının sayısı $n!$ dir.

Bu sayı $P_n = n!$ olarak gösterilir.

PERMÜTASYON VE KOMBİNASYON

Permütasyon (Dizilem)

Teorem: Bir defada r tanesi alınarak yinelemeden (kullanılan tekrar kullanılmayacak) n farklı nesnenin permütasyonlarının sayısı

$$P_n^r = {}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad r \leq n$$

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

PERMÜTASYON VE KOMBİNASYON

Kombinasyon

Tanım: Bir defada r tanesi alınan n farklı nesnenin bir kombinasyonu, düzenleme sırasına bakmaksızın n nesneden r tanesinin bir seçimidir. Bir defada r tanesi alınan n nesnenin kombinasyonlarının sayısı ${}_nC_r$, $C(n, r)$, $C_{n,r}$ veya $\binom{n}{r}$ ile gösterilir ve

$$C_n^r = C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Bir defada $n-r$ tanesi alınan n farklı nesnenin kombinasyonlarının sayısı, bir defada r tanesi alınan n farklı nesnenin kombinasyonlarının sayısına eşittir.

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$$