



Dengeleme Hesabı-Uygulamalar II

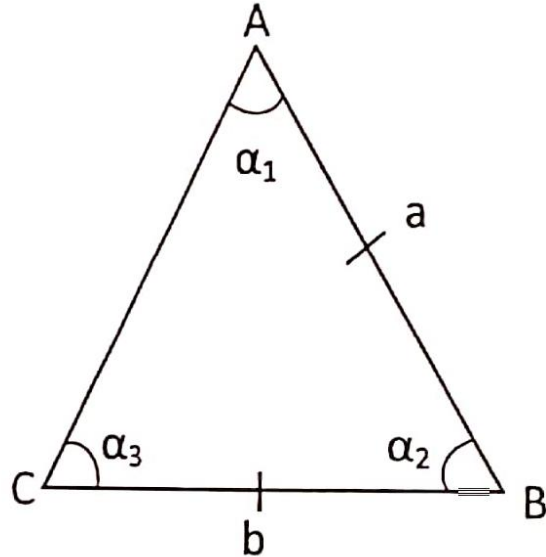
Prof. Dr. U. DOĞAN , Prof. Dr. C. AYDIN, Dr. Öğr . Üyesi D. ÖZ DEMİR

YTÜ-Harita Mühendisliği Bölümü, Jeodezi Anabilim Dalı
İstanbul, Aralık 2021

Uygulama-1: (Sınav Sorusu)

Uygulama-1:

Bir ölçü için standart sapması $\sigma_s=4+6\text{ppm}$ olan bir elektronik uzunluk ölçerle, şekilde ABC üçgeninin a kenarı 4 kez ölçülerek 530,915 m, b kenarı 5 kez ölçülerek 581,503 m bulunmuştur.



α_1 , α_2 ve α_3 açıları ve bunların standart sapmaları:

i	α_i (gon)	σ_i (mgon)
1	64,8567	2,8
2	78,4564	1,9
3	56,6896	3,8

Düzeltilme denklemleri ve ağırlık matrisini oluşturunuz. ($\sigma_0=1.9$ mgon)

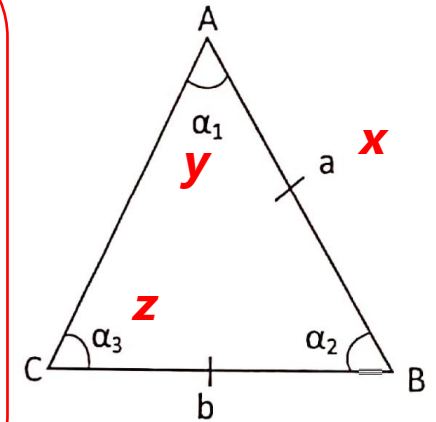


Uygulama-1:

Çözüm:

$n=5$ $u=3$ $f = n - u = 5 - 3 = 2 > 0$ dengeleme vardır. $\rho \equiv 200/\pi$; uzunluklar $\rightarrow$ mm ; açılar $\rightarrow$ mgon

$$\begin{aligned}
 L_a + v_a &= x \Rightarrow v_a = \delta_x + x_0 - L_a \\
 L_b + v_b &= \frac{x \sin y}{\sin z} \Rightarrow v_b = \frac{\sin y}{\sin z} \delta_x + \frac{x \cos y}{\sin z \cdot \rho} \delta_y - \frac{x \sin y \cos z}{\sin^2 z \cdot \rho} \delta_z + \frac{x_0 \sin y_0}{\sin z} - L_b \\
 L_{\alpha_1} + v_{\alpha_1} &= y \Rightarrow v_{\alpha_1} = \delta_y + y_0 - L_{\alpha_1} \\
 L_{\alpha_2} + v_{\alpha_2} &= 200 - y - z \Rightarrow v_{\alpha_2} = -\delta_y - \delta_z + 200 - y_0 - z_0 - L_{\alpha_2} \\
 L_{\alpha_3} + v_{\alpha_3} &= z \Rightarrow v_{\alpha_3} = \delta_z + z_0 - L_{\alpha_3}
 \end{aligned}$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1,0953 & 5,6259 & -7,3915 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} 0 \\ -12,066 \\ 0 \\ 2,7 \\ 0 \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{mm} \\ \text{mgon} \end{array} \right\} \quad x = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}$$



Uygulama-1:

Çözüm:

$$\sigma_{s_a} = 4 + 6 \cdot (0,530915) = 7,186 \text{ mm} \quad s_a^2 = \sigma_{s_a}^2 / 4 \quad s_a = 3,593 \text{ mm}$$

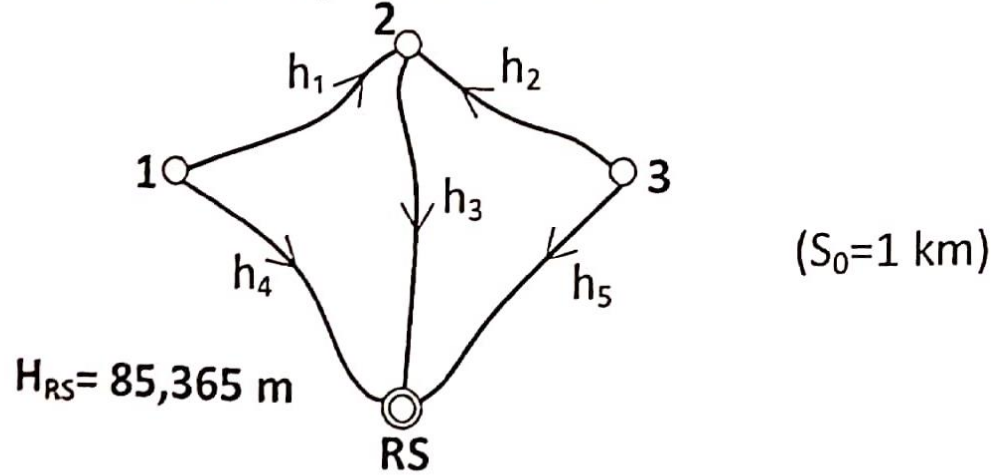
$$\sigma_{s_b} = 4 + 6 \cdot (0,581503) = 7,489 \text{ mm} \quad s_b^2 = \sigma_{s_b}^2 / 5 \quad s_b = 3,349 \text{ mm}$$

$$P_i = \frac{s_0^2}{s_l^2} \quad P(\text{diag}) = (\underbrace{0,280 \quad 0,322}_{\text{mgon}^2/\text{mm}^2} \quad 0,461 \quad 1 \quad 0,250) \quad \checkmark$$

Uygulama-2: (Sınav Sorusu)

Uygulama-2:

Şekildeki nivelman ağına ilişkin yükseklik farkı ölçüleri, nivelman yol uzunlukları ve RS noktasının yüksekliği (sabit) verilmektedir.



i	h_i (m)	S_i (m)
1	3,086	400
2	7,796	300
3	8,574	600
4	11,654	550
5	16,358	450

- Bilinmeyen noktaların yüksekliklerini ve standart sapmalarını hesaplayınız.
- Dengelemenin ana denetimini yapınız.



Uygulama-2:

Çözüm:

$n = 5 ; u = 3 ; f = n - u = 2 > 0$ dengeleme vardır. $H_{1,0}=x$, $H_{2,0}=y$, $H_{3,0}=z$

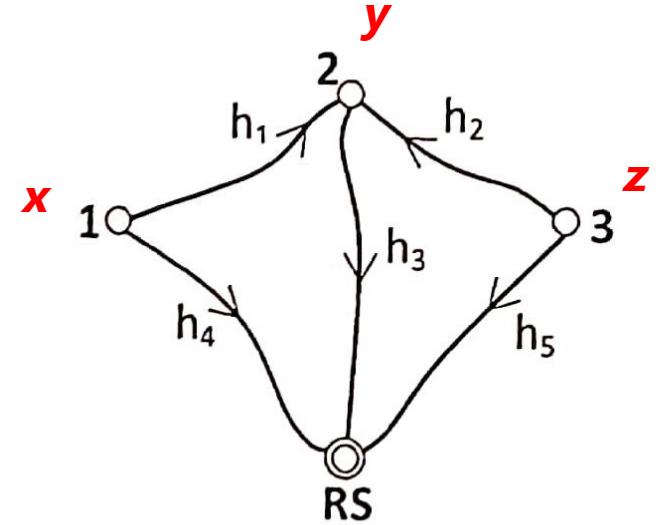
$$x_0 = H_{RS} - h_4 = 73,7110 \text{ m}$$

$$y_0 = H_{RS} - h_3 = 76,7910 \text{ m}$$

$$z_0 = H_{RS} - h_5 = 69,0070 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} h_1 + v_1 &= y - x & \Rightarrow v_1 &= -\delta_x + \delta_y + y_0 - x_0 - h_1 \\ h_2 + v_2 &= y - z & \Rightarrow v_2 &= +\delta_y - \delta_z + y_0 - z_0 - h_2 \\ h_3 + v_3 &= H_{RS} - y & \Rightarrow v_3 &= -\delta_y + H_{RS} - y_0 - h_3 \\ h_4 + v_4 &= H_{RS} - x & \Rightarrow v_4 &= -\delta_x + H_{RS} - x_0 - h_4 \\ h_5 + v_5 &= H_{RS} - z & \Rightarrow v_5 &= -\delta_z + H_{RS} - z_0 - h_5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{mm}} \quad x = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} \quad P = \frac{s_0}{s_l} \quad P = \text{diag}(2,5 \quad 3,333 \quad 1,6667 \quad 1,8182 \quad 2,222)$$



Uygulama-2:

Çözüm:

$$N = \begin{bmatrix} 4,3181 & -2,5 & 0 \\ -2,5 & 7,5 & -3,333 \\ 0 & -3,333 & 5,5556 \end{bmatrix}$$

$$n = \begin{bmatrix} -15 \\ 55 \\ -40 \end{bmatrix}_{\text{mm}}$$

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} 0,3143 & 0,1429 & 0,0857 \\ 0,1429 & 0,2468 & 0,1481 \\ 0,0857 & 0,1481 & 0,2688 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -0,2857 \\ 5,5065 \\ -3,8961 \end{bmatrix}_{\text{mm}} \quad v = \begin{bmatrix} -0,2078 \\ -2,5974 \\ -5,5065 \\ 0,2857 \\ 3,8961 \end{bmatrix}_{\text{mm}}$$

$$H_1 = x_0 + \delta x = 73,7107 \text{ m}$$

$$H_2 = y_0 + \delta y = 76,7965 \text{ m}$$

$$H_3 = z_0 + \delta z = 69,0031 \text{ m}$$

✓ Dengeli yükseklikler

Dengeli yüksekliklerin standart sapmaları

$$[P_{vv}]_1 = v^T \cdot P \cdot v = 107,0130 \text{ mm}^2$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{[P_{vv}]}{n-u}} = \sqrt{\frac{107,013}{5-3}} = 7,3148 \text{ mm}$$

$$[P_{vv}]_2 = [PI] - n^T \cdot x = 107,0130 \text{ mm}^2$$

$$s_x = s_0 \cdot \sqrt{Q_{x1x1}} = 4,1008 \text{ mm}$$

$$s_y = s_0 \cdot \sqrt{Q_{x2x2}} = 3,6336 \text{ mm}$$

$$s_z = s_0 \cdot \sqrt{Q_{x3x3}} = 3,7927 \text{ mm}$$



Uygulama-2:

Çözüm:

$$h_1 + v_1 = y - x$$

$$h_2 + v_2 = y - z$$

$$h_3 + v_3 = H_{RS} - y$$

$$h_4 + v_4 = H_{RS} - x$$

$$h_5 + v_5 = H_{RS} - z$$



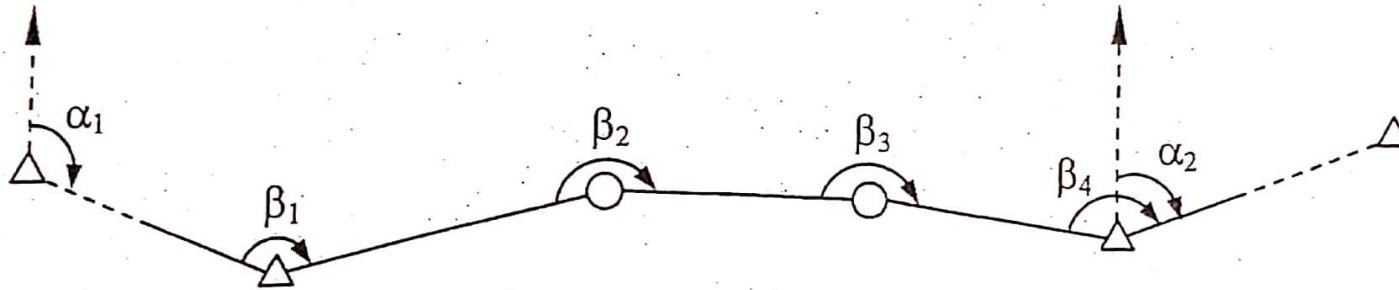
Dengelemenin ana denetimi;

$\bar{h}_i = h_i + v_i$	=	$\bar{h}_i = \varphi_i(x, y, z)$	
3,08579		3,08579	✓
7,79340		7,79340	✓
8,56850		8,56850	✓
11,65429		11,65429	✓
16,36190		16,36190	✓

Uygulama-3: (Sınav Sorusu)

Uygulama-3:

Şekildeki dayalı poligon geçkisine ilişkin kırılma açısı ölçüleri (β_i ; $i=1,...,4$) ve standart sapmaları (σ_{β_i} ; $i=1,...,4$) ile sabit açıklık açıları (α_1 ve α_2) aşağıda verilmektedir.



i	1	2	3	4	$\left. \begin{array}{l} \alpha_1=112,5645 \text{ gon} \\ \alpha_2= 80,7589 \text{ gon} \end{array} \right\} \text{(sabit)}$	
β_i (gon)	165,1812	212,1517	220,6073	170,2520		
σ_{β_i} (mgon)	1,4	0,7	0,7	1,4		

$\mathbf{v}=\mathbf{Ax}-\mathbf{l}$ düzeltme denklemlerini ve $\mathbf{P}$ ağırlık matrisini oluşturunuz. (İlk ölçü birim ağırlıklıdır.)



Uygulama-3:

Çözüm:

$n=4$; $u=3$; $f=n-u$; $f=4-3=1 > 0$ dengeleme vardır.

$\beta_1 \rightarrow x$; $\beta_2 \rightarrow y$; $\beta_3 \rightarrow z$ olsun.

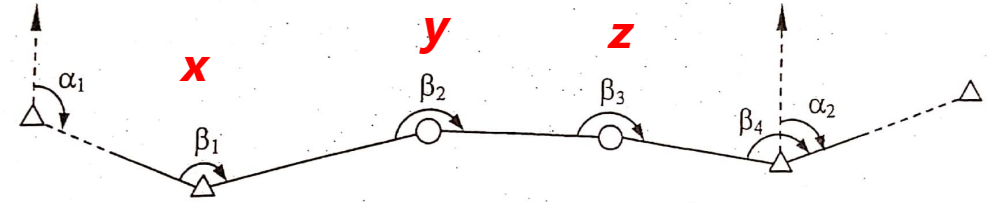
$x_0 = \beta_1$; $y_0 = \beta_2$; $z_0 = \beta_3$

$$\begin{aligned}\beta_1 + V_1 &= x \\ \beta_2 + V_2 &= y \\ \beta_3 + V_3 &= z \\ \beta_4 + V_4 &= \alpha_2 - (\alpha_1 + x + y + z \pm 4 \cdot 200)\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} ; I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2, 2 \end{bmatrix} \text{ (mgon)}$$

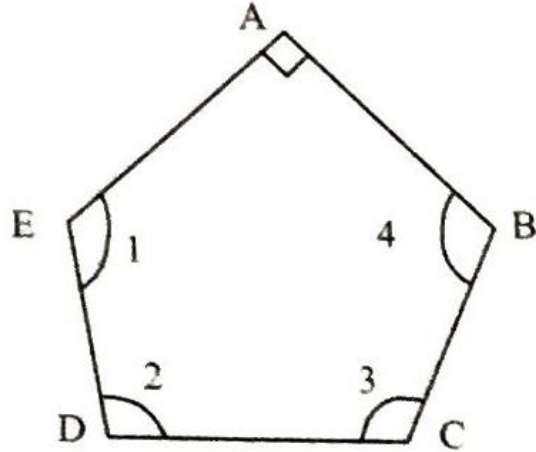


$$\sigma_0 = \sigma_{\beta_1} = 1,4 \text{ mgon} ; P = \text{diag}(1 \ 4 \ 4 \ 1)$$



Uygulama-4: (Demirel, 2009)

Uygulama-4: Şekildeki çokgenin A açısı dik açıdır. Gösterilen elemanları (iç açıları) ölçülmüştür. Ölçüler ve standart sapmaları aşağıda veriliyor.



i	Li (gon)	σ_i (mgon)
1	115,0212	0,8
2	118,7694	0,8
3	145,3140	0,4
4	120,8972	0,4

(EA) açıklık açısı ve standart sapması; (EA)=46,0428 gon ve $\sigma_{(EA)}=0,6$ mgon'dur.

- Dengeli ölçüleri ve standart sapmalarını bulunuz. Dengelemenin ana denetimini yapınız.
- (DC) açıklık açısını ve standart sapmasını hesaplayınız.



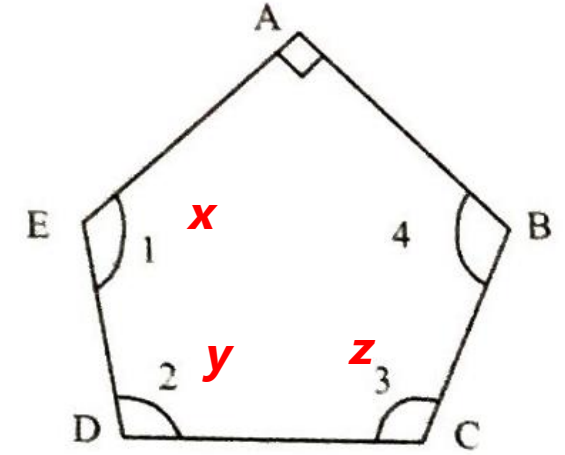
Uygulama-4:

Çözüm: a) $n = 4$, $u = 3$, $f = n - u > 0$ olduğundan dengeleme var.
 $1 \rightarrow x$, $2 \rightarrow y$, $3 \rightarrow z$, $x_0 = 115.0212$ gon, $y_0 = 118.7694$ gon, $z_0 = 145.3140$ gon olsun.

Düzeltilme denklemleri : $x = x_0 + \delta x$, $y = y_0 + \delta y$, $z = z_0 + \delta z$

$$\begin{array}{llll} L_1 + v_1 = x & \Rightarrow & v_1 = +\delta x & +0 \\ L_2 + v_2 = y & \Rightarrow & v_2 = +\delta y & +0 \\ L_3 + v_3 = z & \Rightarrow & v_3 = +\delta z & +0 \\ L_4 + v_4 = 500 - (x+y+z) & \Rightarrow & v_4 = -\delta x - \delta y - \delta z & -1.8 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad -\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.8 \end{bmatrix}_{\text{mgon}}, \quad \sigma_0 = 0.8 \text{ mgon}, \quad P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \quad \mathbf{P} = \text{diag}(1 \ 1 \ 4 \ 4)$$



Uygulama-4:

Çözüm:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \begin{bmatrix} -7.2 \\ -7.2 \\ -7.2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 & -0.1 \\ -0.4 & 0.6 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.225 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.2 \\ -7.2 \\ -7.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.72 \\ -0.72 \\ -0.18 \end{bmatrix} \text{ mgon}$$

Bilinmeyenler

$$x = x_0 + \delta x = 115.02048, \quad y = y_0 + \delta y = 118.76868, \quad z = z_0 + \delta z = 145.31382 \text{ gon}$$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{l}) = [-0.72 \quad -0.72 \quad -0.18 \quad -0.18]^T \text{ mgon}$$

$$[P_{vv}] = 1.296, \quad [P_{vv}] = [P_{ll}] - \mathbf{n}^T \mathbf{x} = 12.96 - 11.664 = 1.296 \text{ mgon}^2$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{[P_{vv}]}{4-3}} = 1.1384 \text{ mgon}$$



Bilinmeyenlerin standart sapmaları

i	$s_i = s_0 \sqrt{Q_{ii}}$
x	0.88 mgon
y	0.88 mgon
z	0.54 mgon



Uygulama-4:

Çözüm:

Dengeli ölçülerin ağırlık katsayıları

$(\bar{Q}_{ii} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \text{ köşegen elemanları})$

$\bar{l}_i$	$\bar{Q}_{ii}$	$\bar{s}_{l_i} = s_0 \sqrt{\bar{Q}_{ii}}$
δx	$Q_{xx} = 0.6$	0.88 mgon
δy	$Q_{yy} = 0.6$	0.88 mgon
δz	$Q_{zz} = 0.2250$	0.54 mgon
$-\delta x - \delta y - \delta z$	$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} + 2 Q_{xy} + 2 Q_{xz} + 2 Q_{yz} = 0.2250$	0.54 mgon

Dengeli ölçülerin standart sapmaları)



Uygulama-4:

Çözüm:

Dengelemenin ana denetimi

Dengeli ölçüler:

Temel eşitlikler:

i	$\bar{L}_i = L_i + v_i$	$\bar{L}_i = \varphi_i(x, y, z)$
1	115.02048	115.02048
2	118.76868	118.76868
3	145.31382	145.31382
4	120.89702	120.89702

x

y

z

500-(x+y+z)

Dengeleme doğrudur.



Uygulama-4:

Çözüm: b)

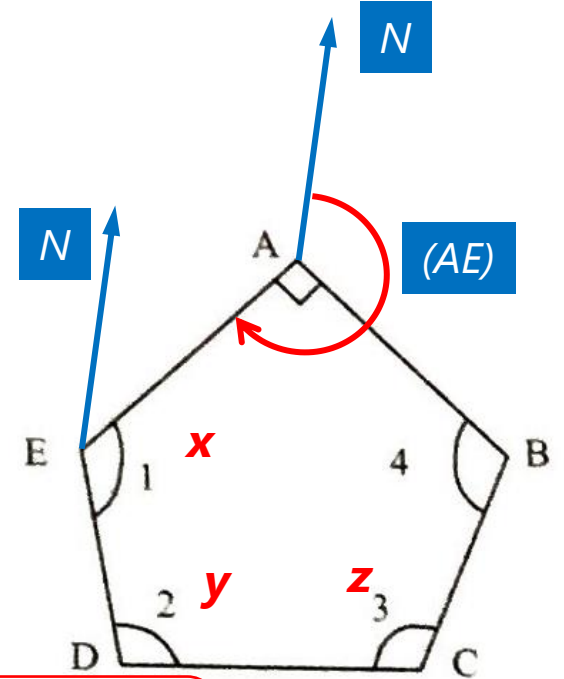
$$(ED) = (AE) + x = 246,0428 + 115,02048 \pm 200 = 161,063280$$
$$(DC) = (ED) + y = 161,063280 + 118,76868 \pm 200 = \mathbf{79.83196}$$

$$(DC) = (EA) + x + y \pm 2 \times 200 = 79.83196 \text{ gon}$$

Varyans yayılma kuralı:

$$s_{(DC)}^2 = s_{(EA)}^2 + s_x^2 + s_y^2 + 2s_{xy} = s_{(EA)}^2 + s_0^2 (Q_{xx} + Q_{yy} + 2Q_{xy})$$

$$s_{(DC)} = \sqrt{0.8784} = 0.94 \text{ mgon}$$



Alıştırmalar:

- 1. Uygulama-1'de bilinmeyenleri, dengeli ölçüleri ve standart sapmalarını belirleyiniz. Dengelemenin doğru olup olmadığını gösteriniz.*
- 2. Uygulama-3'de bilinmeyenleri, dengeli ölçüleri ve standart sapmalarını belirleyiniz. Dengelemenin doğru olup olmadığını gösteriniz.*

Ders duyuruları, soru ve görüşleriniz için:



Prof. Dr. Uğur DOĞAN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/dogan>

dogan@yildiz.edu.tr



Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/caydin>

caydin@yildiz.edu.tr; caydin78@gmail.com



Dr. Öğretim Üyesi Deniz ÖZ DEMİR

<https://avesis.yildiz.edu.tr/denizoz>

denizoz@yildiz.edu.tr

