



KÜMELER VE OLASILIK

Örnek-1

$S = \{ t \mid t \geq 0 \}$ olarak verilen bir örnek uzayda t , elektronik bileşenlerin ömrünü temsil etmektedir.

Beşinci yılının sonundan önce bozulan parçaya ait A olayını yazınız.

$$A = \{ t \mid 0 \leq t < 5 \}$$

Örnek-2

Biyolojik çalışmalarda çıplak gözle mikroskopik organizmaları belirleme olayı A ise, A olayını tanımlayınız.

$$A = \{ \}$$

Örnek-3

$S = \{ x \mid 0 < x < 12 \}$ örnek uzayında $M = \{ x \mid 1 < x < 9 \}$ ve $N = \{ x \mid 0 < x < 5 \}$ olayları ise, $M \cup N$; $M \cap N$; $M' \cap N'$; $(M \cup N)'$ olaylarını tanımlayınız.

$$M \cup N; \{ x \mid 0 < x < 9 \}$$

$$M \cap N; \{ x \mid 1 < x < 5 \}$$

$$M' \cap N'; (M \cup N)' = \{ x \mid 9 \leq x < 12 \}$$

Örnek-4

$M = \{ x \mid 3 < x < 9 \}$ ve $N = \{ y \mid 5 < y < 12 \}$ olsun. $M \cup N = ?$

$$M \cup N = \{ z \mid 3 < z < 12 \}$$

Örnek-5

S uzayını; bakır, sodyum, nitrojen, uranyum, oksijen, potasyum ve çinko oluştursun. Buna göre;

A olayı={bakır, sodyum, çinko}

B olayı={sodyum, nitrojen, potasyum}

C olayı={oksijen}

olarak tanımlanmaktadır.

Bu verilere göre aşağıdaki olayları tanımlayınız.

$A'=?$

$A \cup C=?$

$(A \cap B') \cup C'=?$

$B' \cap C'=?$

$A \cap B \cap C=?$

$(A' \cup B') \cap (A' \cap C)=?$

$(A \cap B)' \cap (C - A)=?$

Örnek-5

S uzayını; bakır, sodyum, nitrojen, uranyum, oksijen, potasyum ve çinko oluştursun. Buna göre;

A olayı={bakır, sodyum, çinko}

B olayı={sodyum, nitrojen, potasyum}

C olayı={oksijen}

olarak tanımlanmaktadır.

Bu verilere göre aşağıdaki olayları tanımlayınız.

$A' = \{N, U, O, P\}$

$A \cup C = \{B, S, Ç, O\}$

$(A \cap B') \cup C' = (A - B) \cup C' = \{B, Ç, S, N, U, P\}$

$B' \cap C' = (B \cup C)' = \{B, U, Ç\}$

$A \cap B \cap C = \{ \}$

$(A' \cup B') \cap (A' \cap C) = \{O\}$

$\downarrow = \quad \downarrow =$

$(A \cap B)' \cap (C - A) = \{O\}$

OLASILIK

Önceleri şansa bağlı oyunlara bağlı olarak ilerleyen olasılık kuramı, 1930’lardan itibaren matematiksel temellere oturtularak, bilim ve teknikte riskin belirsizliğin belirlenmesinde kullanılmaktadır.

Rasgele bir deneyde, bir olayın gerçekleşip gerçekleşmeyeceği belirsizliği, şans ya da olasılık ölçütü olarak olayların gerçekleşmesini 0 ile 1 arasında rakamlarla ifade edebiliriz.

Gerçekleşmesinden kesin emin olduğumuz olay %100 olasılıklı

Gerçekleşmemesinden kesin emin olduğumuz olay %0 olasılıklı

OLASILIK

Bir A olayının ortaya çıkması olasılığı $P(A)$ şeklinde gösterilir.

✓ Klasik ya da Önsel Yaklaşım:

Eğer bir olay toplam n olası değişik yoldan h farklı şekilde gerçekleşirse bu olayın olasılığı; $P(A) = h / n$ (**her olayın gerçekleşme olasılığı eşit)

✓ Sıklık ya da Sonsal Yaklaşım:

Bir deney n kez tekrarlanırsa ve bir olayın h kez tekrarlandığı gözlemlenirse o olasılığı h / n 'dir.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h}{n}$$

Olasılıkla İlgili Aksiyomlar

S örnek uzayı

C sınıfı içerisinde gerçekleşen herhangi bir A olayı olsun.

Aksiyom 1: C sınıfına ait her bir A olayı için,

$$P(A) \geq 0$$

Aksiyom 2: C sınıfında kesin olan olay S için,

$$P(S) = 1$$

Aksiyom 3: C sınıfındaki herhangi sayıda ayrık $A_1, A_2, \dots, A_n$ olayları için,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Özel durum: Sadece iki ayrık olay var ise, $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

Olasılıkla İlgili Önemli Teoremler

Teorem 1. $A_1 \subset A_2$ ise $P(A_1) \leq P(A_2)$ ve
 $P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$

Teorem 2. $0 \leq P(A) \leq 1$

Teorem 3. $P(\emptyset) = 0$

Teorem 4. Eğer A' A 'nın tümleyeni ise
 $P(A') = 1 - P(A)$

Teorem 5. $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, $A_1, A_2, \dots, A_n$ ayrık olaylar
 $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

Olasılıkla İlgili Önemli Teoremler

Teorem 6. Eğer A ve B herhangi iki olay ise

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Eğer A_1, A_2, A_3 herhangi üç olay ise

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$- P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_3 \cap A_1)$$

$$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

n olay için genelleştirme yapılabilir.

Teorem 7. Herhangi iki olay A ve B için

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$$

Teorem 8. Eğer $A, A_1, A_2, \dots, A_n$ gibi ayrık olaylardan biri ile sonuçlanıyorsa.

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \dots + P(A \cap A_n)$$

Örnek: Bir çift zar atılsın. Zarın üst yüzüne gelen sayıların toplamının 8 olma olasılığı nedir?

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad ; \quad S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$s(S_1) = 6 \quad ; \quad s(S_2) = 6$$

$$s_1 \times s_2 = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\} = 6 \times 6 = 36$$

$$A=8 \text{ gelmesi olayı} = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\}$$

$$P(A) = 5/36$$

Örnek: İki zarın bir kez atılışında zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 7 ya da 10 olma olasılığı nedir?

A olayı= Toplamın 7 olması

A ve B ayrık olaylar..

B olayı= Toplamın 10 olması

$$A = 7 \text{ olma olayı} = \{(1,6), (6,1), (3,4), (4,3), (2,5), (5,2)\}$$

$$B = 10 \text{ olma olayı} = \{(4,6), (6,4), (5,5)\}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} = \frac{9}{36}$$

Örnek: Tarık, bilgisayarı için gerekli parçaları satın alacaktır. Gerekli çipleri 2, hard diski 4, belleği 3 farklı markadan ve diğer aksesuarları da 5 farklı bilgisayar mağazasından alma olanağı bulunmaktadır. Tarık parçaları kaç farklı şekilde sipariş edebilir?

$$n_1 = 2$$

$$n_2 = 4$$

$$n_3 = 3$$

$$n_4 = 5$$

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 120$$

Örnek: Ahmet 2023-2024 Bahar dönemi sonunda Harita Mühendisliği bölümünden mezun olacak. İki şirkete iş başvurusu yapmış ve görüşmeye çağırılmıştır. Kendi değerlendirmesine göre, A şirketinden iş teklifi alma olasılığı 0,8 , B şirketinden iş teklifi alma olasılığı 0,6'dır. Ayrıca Ahmet, iki şirketten iş teklifi alma olasılığını 0,5 olarak öngörmektedir. Ahmet'in bu şirketlerin en az birinden iş teklifi alma olasılığı nedir?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,8 + 0,6 - 0,5 = 0,9$$

Örnek: Küçük bir kasabada acil durumlar için bir itfaiye ve bir ambulans bulunmaktadır. İhtiyaç olması durumunda itfaiye 0,98 , ambulans ise 0,92 olasılıkla görev yapabilmektedir. Bir yangın sonucunda oluşan bir yaralanmaya müdahale için itfaiye ve ambulansın ikisinin birden olay yerine gidebilmesi olasılığını hesaplayınız.

$A \rightarrow$ itfaiye görev yapabilir

$B \rightarrow$ ambulans görev yapabilir

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,98 \times 0,92 = 0,9016$$

Örnek: 52 kartlık bir iskambil destesi karıştırılıyor. A; seçilen kartın karo olması, B; seçilen kartın maça olması olarak tanımlanan iki olaydır. A ve B olayları ayrık olay mıdır?

$$A = \{(1 \cap \text{Karo}), (2 \cap K), \dots, (\text{Papaz} \cap K)\}$$

$$B = \{(1 \cap \text{Maça}), (2 \cap M), \dots, (\text{Papaz} \cap M)\}$$

$$(A \cap B) = \emptyset = \{\}$$

Örnek: 52 kartlık bir iskambil destesinde A; seçilen kartın papaz olması, B; seçilen kartın sinek olması olarak tanımlanan iki olaydır. A ve B olayları nasıl olaylardır?

$$A = \{(\text{Papaz} \cap \text{Karo}), (\text{Papaz} \cap \text{Kupa}), (\text{Papaz} \cap \text{Maça}), (\text{Papaz} \cap \text{Sinek})\}$$

$$B = \{(1 \cap \text{Sinek}), (2 \cap S), \dots, (\text{Papaz} \cap S)\}$$

$$(A \cap B) = \{\text{Sinek papazı}\}$$

A ve B herhangi iki olaydır.

KOŞULLU OLASILIK

Aynı bir S uzayında A ve B olayları tanımlı olsun.

B olayının meydana gelme olasılığı, A olayının ortaya çıkmasından sonra inceleniyorsa, bu olasılığa $P(B|A)$ A olayının gerçekleşmesi durumunda B olayının gerçekleşmesi olasılığı, yani *B olayının A olayına göre koşullu olasılığı* denir.

B olayının meydana çıkması olasılığı, A 'nın çıkmasından sonra incelendiğinden $P(B|A)$ koşullu olasılığının örnek uzayı A olur. Bundan dolayı, A 'ya indirgenmiş (küçültülmüş) örnek uzayı da denir.

KOŞULLU OLASILIK

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

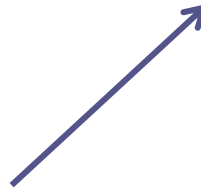
$$P(A) \neq 0$$



Benzer şekilde;

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) \neq 0$$



$$P(A \cap B) = P(B) P(A/B) = P(A) P(B/A)$$

Örnek:

Tek bir zar atılması durumunda gelen sayının 4'ten küçük olması olasılığını,

- a. Bir başka bilgi verilmediğine göre,
- b. Zarın üst yüzeyine gelen sayının tek sayı olduğu bilindiğine göre hesaplayınız.

a. A olayı, zarın üst yüzeyine gelen sayının 4'ten küçük olması

$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3)$$

$$P(A) = (1/6) + (1/6) + (1/6) = 3/6$$

b. B olayı, zarın üst yüzeyine gelen sayının tek sayı olması

$$P(B) = P(1) + P(3) + P(5) = (1/6) + (1/6) + (1/6) = 3/6$$

$$P(A \cap B) = P(1) + P(3) = (1/6) + (1/6) = 2/6$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

Örnek: 52 kartlık bir desteden rasgele bir kart çekilsin. “Kart bir maçadır” A olayı olsun. B “kart siyah renklidir” olayını gösterebiliriz. B verilmişken A’nın gerçekleşmesi olasılığını bulunuz.

$$P(A) = \text{kartın maça olması olasılığı} = 13/52$$

$$P(B) = \text{kartın siyah renkli olması olasılığı} = 26/52$$

$$P(A \cap B) = \text{çekilen kartın siyah ve maça olma olasılığı} = 13/52$$

$$P(A/B) = \text{siyah olduğu bilindiğinde maça gelmesi olasılığı} = 13/26$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{13/52}{26/52} = 13/26$$

KOŞULLU OLASILIK İLE İLGİLİ TEOREMLER

□ Herhangi bir A_1, A_2, A_3 olayları için,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

Örnek: 52 kartlık bir desteden yerine koymaksızın 3 kart çekiliyor. Bu üç kartında as olması olasılığı nedir?

A_1 = ilk kart bir astır

A_2 = ikinci kart bir astır

A_3 = üçüncü kart bir astır

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \\ &= (4/52) (3/51) (2/50) = 24/132600 \end{aligned}$$

KOŞULLU OLASILIK İLE İLGİLİ TEOREMLER

□ Eğer bir A olayının sonuçları bir $A_1, A_2, \dots, A_n$ gibi ayrık olaylar ise,

$$P(A) = P(A_1)P(A | A_1) + P(A_2)P(A | A_2) + \dots + P(A_n)P(A | A_n)$$

Örnek: Bir depoda 20 kusurlu 80 kusursuz elektrik ampulü bulunsun. Yerine koymaksızın 2 ampul seçelim. İkinci seçilen ampulün kusurlu olması olasılığını bulunuz.

$A_1 = \{\text{ilk seçilen kusurludur}\}$

$A_2 = \{\text{ilk seçilen kusursuzdur}\}$

$B = \{\text{ikinci seçilen kusurludur}\}$

$$P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2)$$

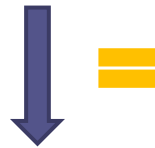
$$P(B) = (20/100)(19/99) + (80/100)(20/99) = 1/5$$

Bağımsız Olaylar

Eğer, $P(B|A) = P(B)$ ise,

yani B olayının gerçekleşmesi olasılığı A olayının gerçekleşmesi ya da gerçekleşmemesinden etkilenmiyorsa, bu durumda A ve B olaylarına *bağımsızdır olaylardır* denir.

$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$$



$$P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Bağımsız Olaylar

Eğer A_1, A_2, A_3 bağımsız olaylar ise, bunlar çiftler çiftler;

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j) P(A_k) \quad j \neq k ; \quad j, k = 1, 2, 3$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3)$$

Örnek:

Hilesiz bir zar atılıyor.

A olayı, zarın üst yüzeyinde çift sayı gelmesi,

B olayı, zarın üst yüzeyinde 4'e eşit ve 4'den küçük sayı gelmesi olduğuna göre; bu iki olay bağımsız mıdır?

$$A = \{2, 4, 6\} \longrightarrow P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow P(B) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 2/3$$

$$A \cap B = \{2, 4\} \longrightarrow P(A \cap B) = P(2) + P(4) = 1/3$$

4 ve 4'den küçük sayı gelmesi durumunda; çift sayı olması

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(A \setminus B) * P(B) \rightarrow \text{????}$$

↓

$$P(A)$$

$$P(A \setminus B) = P(A)$$

Çift sayı gelmesi durumunda; 4 ve 4'den daha küçük sayı olması;

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) = P(B \setminus A) * P(A) \rightarrow \text{????}$$

↓

$$P(B)$$

$$P(B \setminus A) = P(B)$$

Bu iki olay bağımsızdır.