



Rasgele Değişkenler/ Sürekli Rasgele Değişken

Rasgele Değişken

```
graph TD; A[Rasgele Değişken] --> B[Kesikli Rasgele Değişken]; A --> C[Sürekli Rasgele Değişken];
```

Kesikli Rasgele Değişken

- Sonlu
- Sayılabilir sonsuz

Sürekli Rasgele Değişken

- Sonsuz

Sürekli Rasgele Değişken

X rasgele değişkeninin R 'deki değer kümesi olan A , sayılamaz bir küme ise; X 'e **sürekli rasgele değişken** denir.

Bu durumda örnek uzayın R 'deki görüntüsü bir veya daha fazla aralıklar biçimindedir.

$A = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ veya $A = \{x \mid -\infty \leq x \leq \infty\}$ dir.

X sürekli bir rasgele değişken ise X 'in herhangi özel bir değer olma olasılığı sıfırdır.

Sürekli Rasgele Değişken – Olasılık Dağılımı

Değer kümesi A olan X rasgele değişkeni için;

$x \notin A$ için $f(x)=0$ olmak üzere; $A_i = (a, b] \subset A$ için

$$P\{x \in A_i\} = \int_a^b f(x)dx$$

Özellikliğini sağlayan $f(x)$ 'e X'in yoğunluk fonksiyonu (olasılık fonksiyonu) denir.

1. $f(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

yoğunluk fonksiyonu verildiğine göre a) c katsayısını bulunuz, b) $P(1 < X < 2)$ olasılığını hesaplayınız.

1. $c \geq 0$ olur ise; $f(x) \geq 0$

2.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^3 cx^2 dx = \frac{cx^3}{3} \Big|_0^3 = 9c$$

$$9c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$$

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

yoğunluk fonksiyonu verildiğine göre a) c katsayısını bulunuz, b) $P(1 < X < 2)$ olasılığını hesaplayınız.

$$\text{b) } P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{9} x^2 dx = \left. \frac{x^3}{27} \right|_1^2 = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

Örnek: X rasgele değişkeni ile olasılık fonksiyonu veriliyor:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

a) $f(x)$ bir olasılık fonksiyonu mudur ?

b) $P(\frac{1}{2} < X \leq 1) = ?$

c) $P(X \leq \frac{3}{4}) = ?$

d) $P(X > \frac{1}{5}) = ?$

Örnek: a) X'in değer kümesi $0 \leq x \leq 1$ aralığıdır. Her x için $f(x) \geq 0$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1 \text{ old. } f(x) \text{ bir olasılık fonksiyonudur.}$$

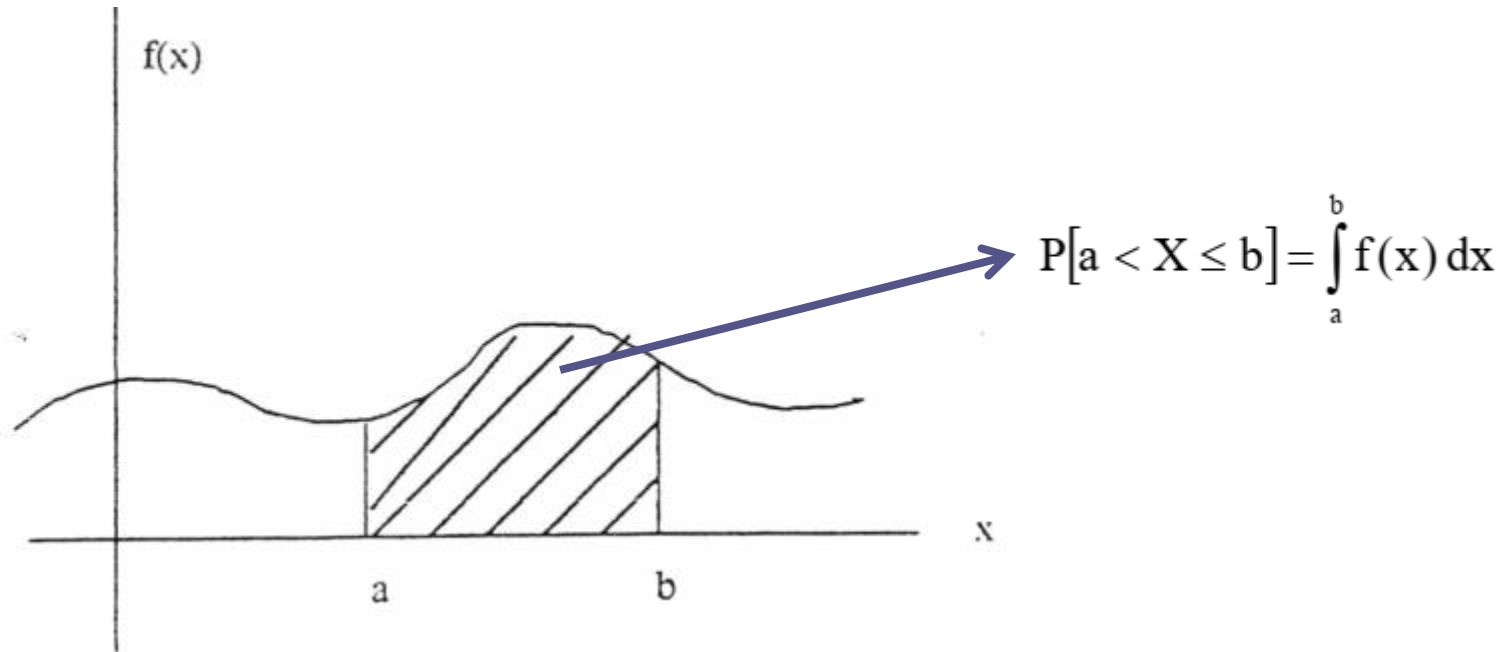
$$\text{b) } P\left(\frac{1}{2} < X \leq 1\right) = \int_{1/2}^1 2x dx = x^2 \Big|_{1/2}^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{c) } P\left(X \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{-\infty}^{3/4} 2x dx = \int_{-\infty}^0 2x dx + \int_0^{3/4} 2x dx = 0 + x^2 \Big|_0^{3/4} = \frac{9}{16}$$

Örnek:

$$\text{d) } P(X > 1/5) = \int_{1/5}^{+\infty} 2x \, dx = \int_{1/5}^1 2x \, dx + \int_1^{+\infty} 2x \, dx = x^2 \Big|_{1/5}^1 = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

Sürekli Rasgele Değişken – Olasılık Dağılımı



$$P(a < X \leq b) = P\{a \leq X \leq b\} = P\{a < X < b\}$$

Sürekli Rasgele Değişken – Dağılım Fonksiyonları

Kesikli değişkendekine benzer bir biçimde sürekli rasgele değişken için dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

Teorem: $F(x)$, x rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu ise,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty) = 1$$

Teorem: $F(x)$, x 'in artan bir fonksiyonudur, yani her i ve j için $x_i \leq x_j$ ise

$F(x_i) \leq F(x_j)$ olur.

Sürekli Rasgele Değişken – Dağılım Fonksiyonları

Teorem: $P(X > x) = 1 - F(x)$ 'dir.

İspat: $A_1 = \{t \mid t \leq x\}$ ise, $A'_1 = \{t \mid t > x\}$ olup $P(A_1) + P(A'_1) = 1$ özelliğinden

$P(A'_1) = 1 - P(A)$, yani

$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$ bulunur.

Teorem: $A_1 = \{x \mid a < x \leq b, a < b\}$ iken,

$P(A_1) = P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ olur.

İspat: $a < b$, $\{x \mid x \leq b\} = \{x \mid x \leq a\} \cup \{x \mid a < x \leq b\}$ olup,

$P(x \leq b) = P(x \leq a) + P(a < x \leq b)$ yazılır. Buradan,

$P(a < x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a) = F(b) - F(a)$ elde edilir.

Sürekli Rasgele Değişken – Dağılım Fonksiyonları

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad c=1/9$$

$$x < 0 \text{ ise} \quad F(x) = 0 \quad 0 \leq x < 3 \text{ ise}$$

$$F(x) = \int_0^x f(u) du = \int_0^x \frac{1}{9} u^2 du = \frac{x^3}{27}$$

$$x \geq 3 \text{ ise}$$

$$F(x) = \int_0^3 f(u) du + \int_3^x f(u) du$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{9} u^2 du + \int_3^x 0 du = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 / 27 & 0 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

Sürekli Rasgele Değişken – Dağılım Fonksiyonları

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad c=1/9$$

$$P(1 < X \leq 2)$$

$$P(1 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1)$$

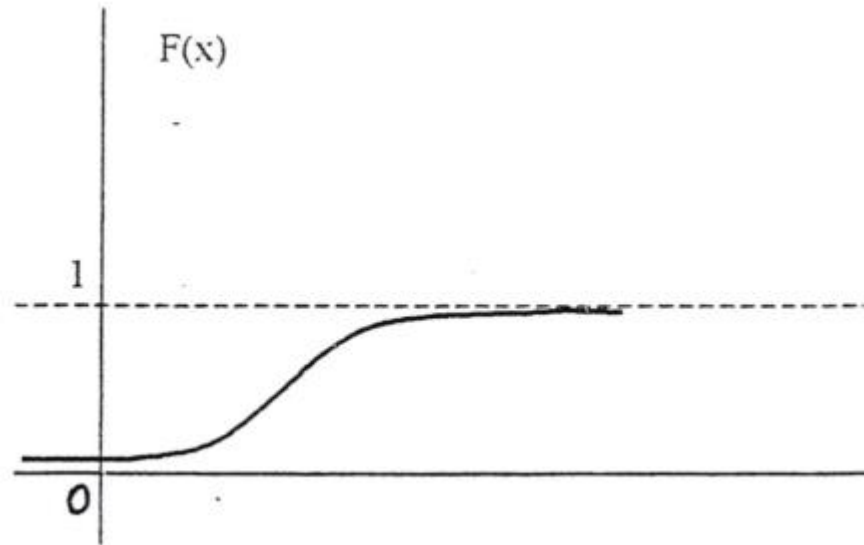
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 / 27 & 0 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$= F(2) - F(1)$$

$$= \frac{2^3}{27} - \frac{1^3}{27} = \frac{7}{27}$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Sürekli Rasgele Değişken – Dağılım Fonksiyonları



Dağılım fonksiyonu $F(x) = P(X \leq x)$ 0'dan 1'e monoton olarak artan bir fonksiyondur.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Türev



Olasılık
Fonksiyonu

Dağılım
Fonksiyonu



İntegral

Örnek: X sürekli rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3} & ; x \geq 2 \\ 0 & ; \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olduğuna göre;

- a) X'in dağılım fonksiyonunu bulunuz.
- b) $P(X \leq 5)$ olasılığını olasılık fonksiyonunu ve dağılım fonksiyonunu kullanarak bulunuz.
- c) Dağılım fonksiyonunu grafiğini çiziniz.

Örnek: a) X'in dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^2 \frac{8}{t^3} dt + \int_2^x \frac{8}{t^3} dt = 0 + \int_2^x \frac{8}{t^3} dt = -\frac{4}{t^2} \Big|_2^x = -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{4} = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 2 \\ 1 - \frac{4}{x^2} & 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

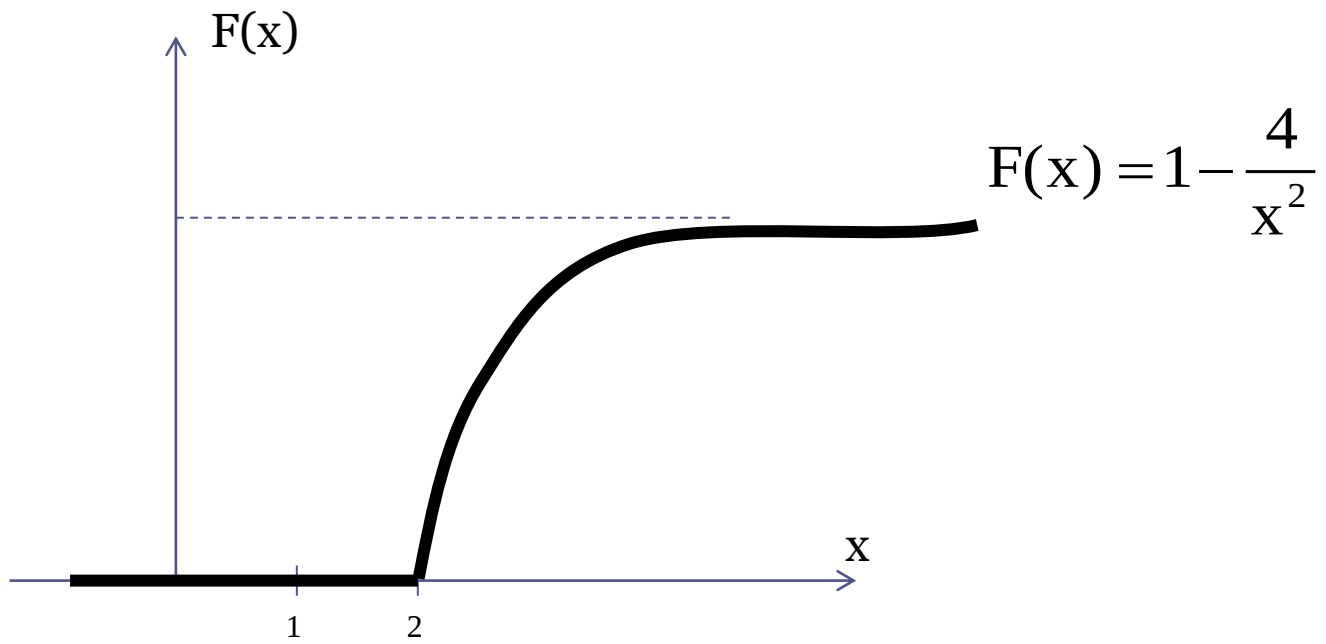
Örnek: b) Olasılık fonksiyonundan $P(X \leq 5) = ?$

$$P(X \leq 5) = \int_2^5 \frac{8}{t^3} dt = -\frac{4}{x^2} \Big|_2^5 = -\frac{4}{25} + \frac{4}{4} = \frac{21}{25}$$

c) Dağılım fonksiyonundan $P(X \leq 5) = ?$

$$P(X \leq 5) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{21}{25}$$

Örnek:



Örnek:

Bir ailenin bir yıl boyunca elektrik süpürgesini çalıştırdığı toplam saat (100 saat biriminde) X sürekli rasgele değişkeni ile ifade edilmekte ve yoğunluk fonksiyonu ;

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Bir ailenin 1 yıl boyunca elektrik süpürgesini,

- a) 120 saatten az
- b) 50 ve 100 saat arasında çalıştırması olasılıklarını hesaplayınız.

Örnek:

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X < 120/100) &= P(X < 1.2) = \int_0^1 x \, dx + \int_1^{1.2} (2 - x) \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^{1.2} \\ &= \frac{1}{2} + (1.68 - 1.5) = 0.68 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(0.5 < X < 1.0) = \int_{0.5}^1 x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{0.5}^1 = \frac{1}{2} - \frac{0.5^2}{2} = 0.375$$

Örnek: X sürekli rasgele değişkeninin dağılım ve olasılık fonksiyonu verildiğine göre;

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 2 \\ 1 - \frac{4}{x^2} & , \quad x \geq 2 \end{cases} ; \quad f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3} & , \quad x \geq 2 \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

- a) $P(3 < x < 4)$ olasılığını dağılım fonksiyonundan hesaplayınız.
- b) $P(3 < x < 4)$ olasılığını olasılık dağılımından hesaplayınız.

Örnek:

$$\text{a) } P(3 < x < 4) = F(4) - F(3) = 1 - \frac{4}{16} - \left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{14}{72} = \frac{7}{36}$$

$$\text{b) } P(3 < x < 4) = \int_3^4 \frac{8}{x^3} dx = -\frac{4}{x^2} \Big|_3^4 = -\frac{4}{16} + \frac{4}{9} = \frac{7}{36}$$

Örnek: X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , \quad 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \text{şeklinde ve } A_1 = \{x \mid x = 2\}, A_2 = \{x \mid x \leq 2\}, A_3 = \{x \mid x > 2\},$$

$A_4 = \{x \mid x \leq 5/2\}$ olayları veriliyor.

a) $P\{X \in A_1\}$, b) $P\{A_2 \cup A_4\}$, c) $P\{A_3' \cap A_4\}$, d) $P\{A_2 \cup A_3\}$, e) $P\{A_2 / A_4\}$

Örnek:

$$\text{a) } P\{X \in A_1\} = P\{X = 2\} = \int_2^2 \frac{1}{3} dx = \frac{x}{3} \Big|_2^2 = 0$$

$$\text{b) } P\{A_2 \cup A_4\} = P\{1 \leq x \leq 2.5\} = \int_1^{2.5} \frac{dx}{3} = \frac{x}{3} \Big|_1^{2.5} = \frac{2.5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } P\{A'_3 \cap A_4\} = P\{1 < x \leq 2\} = \int_1^2 \frac{dx}{3} = \frac{x}{3} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{d) } P\{A_2 \cup A_3\} = P\{1 \leq x \leq 4\} = \int_1^4 \frac{dx}{3} = \frac{x}{3} \Big|_1^4 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

Örnek:

$$\text{e) } P\{A_2 / A_4\} = \frac{P(A_2 \cap A_4)}{P(A_4)}$$

$$A_2 \cap A_4 = A_2 \rightarrow P(A_2) = P\{x \leq 2\} = \int_1^2 \frac{dx}{3} = \frac{x}{3} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_4) = P\{x \leq 5/2\} = \int_1^{2.5} \frac{dx}{3} = \frac{x}{3} \Big|_1^{2.5} = \frac{2.5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2 / A_4) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$