



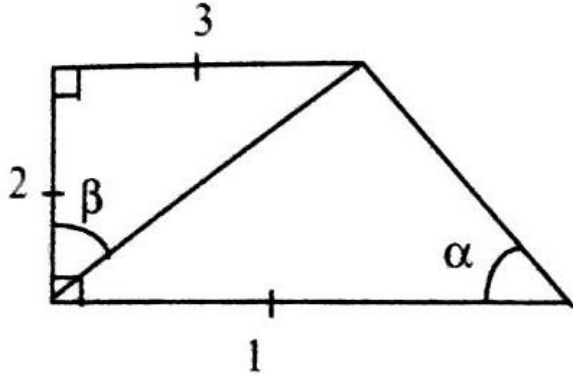
Hata Yayılma Kuralları-Uygulamalar (I)

Prof. Dr. U. DOĞAN , Prof. Dr. C. AYDIN, Dr. Öğr . Üyesi D. ÖZ DEMİR

YTÜ-Harita Mühendisliği Bölümü, Jeodezi Anabilim Dalı
İstanbul, Ekim 2021

Uygulama-1: (Demirel, 2009)

Uygulama-1: Bir dik yamuğun işaretli kenarları ölçülmüştür. Ölçüler (L_i), ağırlıkları (P_i), aralarındaki sabit korelasyon (ρ) ve birim ağırlıklı standart sapma (σ_0) aşağıda veriliyor.



i	L_i (m)	P_i
1	218.726	1
2	139.304	2
3	188.512	2

$$\rho = 0.80, \sigma_0 = 2 \text{ cm}$$

- Ölçülerin ağırlık katsayıları matrisini oluşturunuz.
- α ve β açılarının katsayılar matrisini, standart sapmalarını ve aralarındaki korelasyonu bulunuz.



Uygulama-1:

Çözüm:

$$\text{a) } Q_{ii} = \sigma_i^2 / \sigma_0^2 = 1/P_i, \quad Q_{ik} = \rho \sqrt{Q_{ii} Q_{kk}}, \quad \mathbf{l} = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T$$

$$Q_{ii} = \begin{bmatrix} 1 & 0.56 & 0.56 \\ 0.56 & 0.50 & 0.40 \\ 0.56 & 0.40 & 0.50 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$\text{b) } \alpha = \arctan \frac{L_2}{L_1 - L_3} \Rightarrow d\alpha = \frac{-L_2 p}{S^2} dL_1 + \frac{(L_1 - L_3)p}{S^2} dL_2 + \frac{L_2 p}{S^2} dL_3 \quad \longrightarrow \text{mgon}$$

$$S^2 = L_2^2 + (L_1 - L_3)^2$$

$$\beta = \arctan \frac{L_3}{L_2} \Rightarrow d\beta = \frac{-L_3 p}{L_2^2 + L_3^2} dL_2 + \frac{L_2 p}{L_2^2 + L_3^2} dL_3 \quad \longrightarrow \text{mgon}$$



Uygulama-1:

Çözüm:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{y} = \mathbf{F} d\mathbf{l}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -4.37 & 0.95 & 4.37 \\ 0 & -2.18 & 1.61 \end{bmatrix}$$

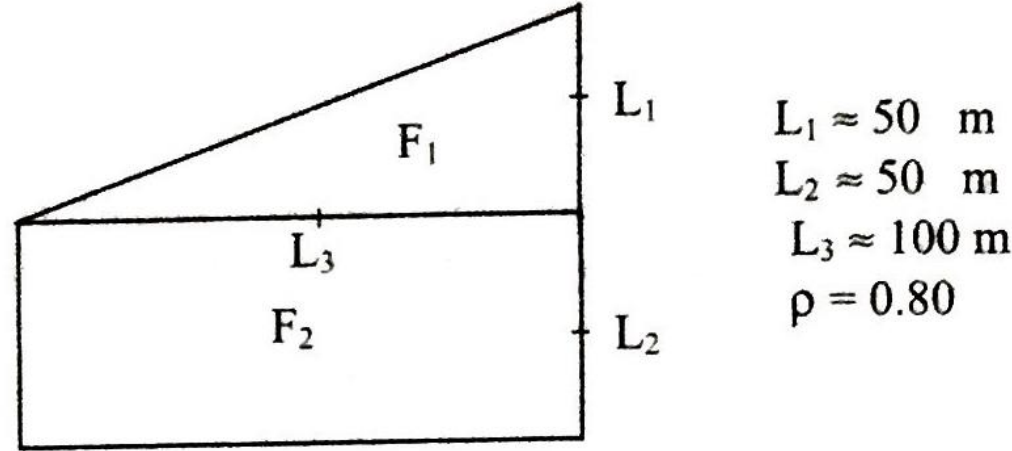
$$\mathbf{Q}_{yy} = \mathbf{F} \mathbf{Q}_{ll} \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 6.38 & 0.68 \\ 0.68 & 0.86 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{\alpha\alpha} & Q_{\alpha\beta} \\ Q_{\alpha\beta} & Q_{\beta\beta} \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_0 \sqrt{Q_{\alpha\alpha}} = 2 \sqrt{6.38} = 5.05 \text{ mgon}, \quad \sigma_{\beta} = \sigma_0 \sqrt{Q_{\beta\beta}} = 2 \sqrt{0.86} = 1.85 \text{ mgon}$$

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{Q_{\alpha\beta}}{\sqrt{Q_{\alpha\alpha} Q_{\beta\beta}}} = \frac{0.68}{\sqrt{(6.38)(0.86)}} = 0.29 \quad \checkmark$$

Uygulama-2: (Demirel, 2009)

Uygulama-2: Yüksekliği L_1 olan üçgen arazi parçası ile kenar uzunlukları L_2 , L_3 olan dikdörtgen arazi parçasının F_1 ve F_2 alanları belirlenmek isteniyor. Uzunluklar, standart sapması $\sigma = 10 + 20$ ppm olan bir elektronik uzaklık ölçer ile ölçülmüştür. Yaklaşık ölçü değerleri ve aralarındaki sabit korelasyon ρ aşağıda veriliyor:



- Ölçülerin kovaryans matrisini oluşturunuz.
- F_1 , F_2 alanlarının kovaryans matrisini bulunuz.
- F_1 , F_2 alanlarının standart sapmalarını (m^2 biriminde) hesaplayınız.



Uygulama-2:

Çözüm: a) $\mathbf{l} = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T$, $\sigma_1 = 11 \text{ mm}$, $\sigma_2 = 11 \text{ mm}$, $\sigma_3 = 12 \text{ mm}$

$$\sigma_{ik} = \rho \sigma_i \sigma_k \text{ , } \sigma_{12} = 96.8 \text{ mm}^2 \text{ , } \sigma_{13} = \sigma_{23} = 105.6 \text{ mm}^2$$

$$\mathbf{C}_{II} = \begin{bmatrix} 1.21 & 0.97 & 1.06 \\ 0.97 & 1.21 & 1.06 \\ 1.06 & 1.06 & 1.44 \end{bmatrix} \text{cm}^2 \quad \checkmark$$



Uygulama-2:

Çözüm: b) $\mathbf{y} = [F_1 \ F_2]^T$, $d\mathbf{y} = \mathbf{F} d\mathbf{l}$

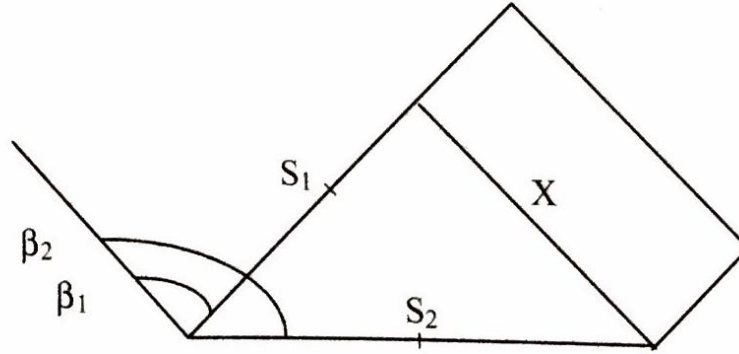
$$\begin{aligned} F_1 &= 0.5L_1L_3 \Rightarrow dF_1 = 0.5L_3dL_1 + 0.5dL_3 = 50dL_1 + 25dL_3 \\ F_2 &= L_2L_3 \Rightarrow dF_2 = L_3dL_2 + L_2dL_3 = 100dL_2 + 50dL_3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_{yy} = \mathbf{F} \mathbf{C}_{ll} \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 25 \\ 0 & 100 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.21 & 0.97 & 1.06 \\ \text{sim.} & 1.21 & 1.06 \\ & & 1.44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 100 \\ 25 & 50 \end{bmatrix} 10^{-4} = \begin{bmatrix} 0.66 & 1.19 \\ 1.19 & 2.63 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$\text{c) } \sigma_{F_1}^2 = 0.66 \text{ m}^4, \sigma_{F_2}^2 = 2.63 \text{ m}^4 \Rightarrow \sigma_{F_1} = 0.81 \text{ m}^2, \sigma_{F_2} = 1.62 \text{ m}^2 \quad \checkmark$$

Uygulama-3: (Demirel, 2009)

Uygulama-3: Bir binanın şekilde gösterilen iki köşesi β_1 , β_2 açıları ve S_1 , S_2 uzunlukları yardımıyla belirlenmiştir.



Ölçüler ve standart sapmaları:

i	L_i	σ_i
β_1	110.2236 gon	2 mgon
β_2	145.7182 gon	2 mgon
S_1	160.152 m	1 cm
S_2	210.374 m	1 cm

S_1 ve S_2 arasındaki korelasyon: $\rho = 0.70$

X uzunluğunu ve σ_X standart sapmasını hesaplayınız.



Uygulama-3:

Çözüm:

$$X = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos(\beta_2 - \beta_1)} \quad , \quad X = 112.815 \text{ m}$$

Birimler → Uzunluklar (cm)

Açılar (mgon)

$$I = [S_1 \quad S_2 \quad \beta_1 \quad \beta_2]^T \quad , \quad \sigma_{S_1 S_2} = \rho \sigma_{S_1} \sigma_{S_2} = (0.70)(1)(1) = 0.70 \text{ cm}^2$$

$$C_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$



Uygulama-3:

Çözüm:

$$X = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos(\beta_2 - \beta_1)} \quad , \quad X = 112.815 \text{ m}$$


Birimler → Uzunluklar (cm)

Açılar (mgon)

$$dX = \frac{S_1 - S_2 \cos(\beta_2 - \beta_1)}{X} dS_1 + \frac{S_2 - S_1 \cos(\beta_2 - \beta_1)}{X} dS_2 - \frac{S_1 S_2 \sin(\beta_2 - \beta_1)}{X \rho} d\beta_1 + \frac{S_1 S_2 \sin(\beta_2 - \beta_1)}{X \rho} d\beta_2$$

$$\mathbf{F} = [-0,16 \quad 0,66 \quad -0,25 \quad 0,25]$$

$$\sigma_X^2 = \mathbf{F} \mathbf{C}_{ll} \mathbf{F}^T = 0,81 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_X = 0,90 \text{ cm} \quad \checkmark$$

Uygulama-4: (Demirel, 2009)

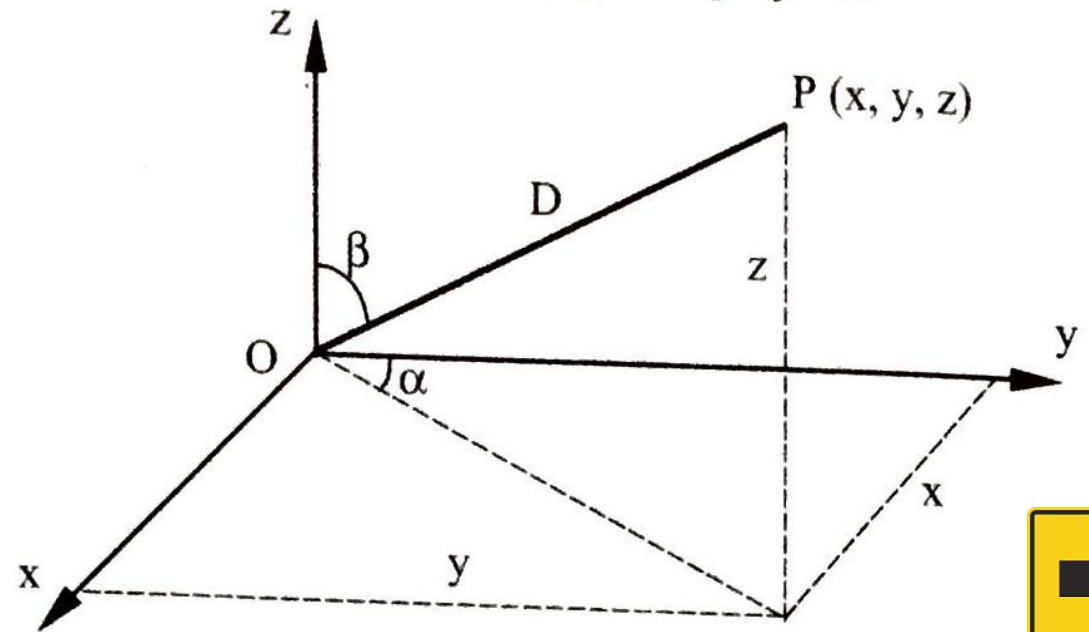
Uygulama-4: Bir O noktasından (alet kurulan nokta) P noktasına bakılarak D eğik uzunluğu, α yatay ve β düşey açıları ölçülmüştür. Şekilden P noktasının x, y ve z koordinatlarının $x=D\sin\alpha\sin\beta$, $y=D\cos\alpha\sin\beta$, $z=D\cos\beta$ olduğu görülmektedir. Ölçüler ve standart sapmaları,

$$D=864,742 \text{ m}, \quad \sigma_D = 10 + 10\text{ppm}$$

$$\alpha=30,0865 \text{ gon}, \quad \sigma_\alpha = 0,8 \text{ mgon}$$

$$\beta=95,7644 \text{ gon}, \quad \sigma_\beta = 2,0 \text{ mgon}$$

olduğuna göre P noktasının konum hatasını hesaplayınız.



Uygulama-4:

Çözüm:

Birimler → Uzunluklar (cm)

Açılar (mgon)

$$\begin{aligned}x &= D \sin \alpha \sin \beta \Rightarrow dx = \sin \alpha \sin \beta dD + D \sin \beta \cos \alpha d\alpha + D \sin \alpha \cos \beta d\beta \\y &= D \cos \alpha \sin \beta \Rightarrow dy = \cos \alpha \sin \beta dD - D \sin \beta \sin \alpha d\alpha + D \cos \alpha \cos \beta d\beta \\z &= D \cos \beta \Rightarrow dz = \cos \beta dD - D \sin \beta d\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sigma_D^2 + D^2 \sin^2 \beta \cos^2 \alpha \sigma_\alpha^2 + D^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \sigma_\beta^2 \\ \sigma_y^2 &= \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \sigma_D^2 + D^2 \sin^2 \beta \sin^2 \alpha \sigma_\alpha^2 + D^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \sigma_\beta^2 \\ \sigma_z^2 &= \cos^2 \beta \sigma_D^2 + D^2 \sin^2 \beta \sigma_\beta^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_D &= 10 + 10 \times 0,864742 \\ &= 18,64742 \text{ mm} \\ &= 1,864742 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\sigma_P^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = \sigma_D^2 + \frac{D^2 \sin^2 \beta}{\rho^2} \sigma_\alpha^2 + \frac{D^2}{\rho^2} \sigma_\beta^2 = 3.48 + 1.18 + 7.38 = 12.04 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_P = 3.47 \text{ cm} \quad \checkmark$$

Uygulama-5: *Aritmetik Ortalamanın Standart Sapması*

Uygulama-5: Bir ölçü için standart sapması 1+2ppm olan bir elektronik total station ile bir S uzunluğu 5 kez ölçülerek; 100,012; 100,015; 100,009; 100,020 ve 100,005 m ölçüleri elde ediliyor. En uygun değeri ve standart sapmasını bulunuz.

Çözüm: 5 farklı kenar ölçüsünü standart sapmaları neredeyse birbirine eşittir. Bu nedenle söz konusu ölçüler eşit ağırlıklıdır. Bu durumda S kenar uzunluğu için en uygun değer aritmetik ortalamadır:

$$\bar{S} = \frac{1}{5} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5)$$

$$= 100,0122 \text{ m}$$

En uygun değer



Uygulama-5: *Aritmetik Ortalamanın Standart Sapması*

Çözüm:

$$\bar{S} = \frac{1}{5}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5) \longrightarrow d\bar{S} = \frac{1}{5}(dS_1 + dS_2 + dS_3 + dS_4 + dS_5)$$

$$\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma_3 \approx \sigma_4 \approx \sigma_5 = \sigma = 1 + 2 \times 0,1$$

Bir ölçünün
standart sapması

$$\sigma = 1,2 \text{ mm}$$

Aritmetik Ortalamanın
Standart Sapması

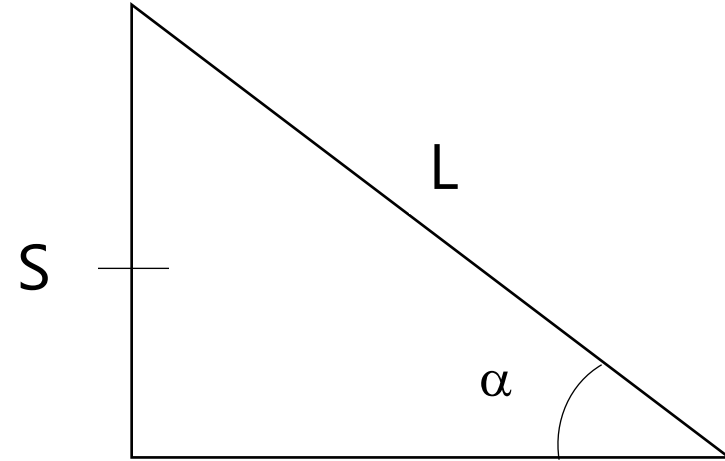
$$\sigma_{\bar{S}}^2 = \frac{1}{25}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2)$$

$$\sigma_{\bar{S}}^2 = \frac{1}{25}(5\sigma)$$

$$\sigma_{\bar{S}} = \frac{\sigma}{\sqrt{5}} = 0,54 \text{ cm}$$

Uygulama-6:

Uygulama-6: Şekildeki dik üçgende S kenarı, bir ölçü için standart sapması $2+5\text{ppm}$ olan bir elektronik uzaklık ölçerle 4 kez ölçülerek $450,013\text{ m}$, α açısı ise bir ölçü için standart sapması 6 cc olan bir aletle 10 kez ölçülerek $60,0239\text{ gon}$ elde ediliyor. L kenarını ve standart sapmasını belirleyiniz.



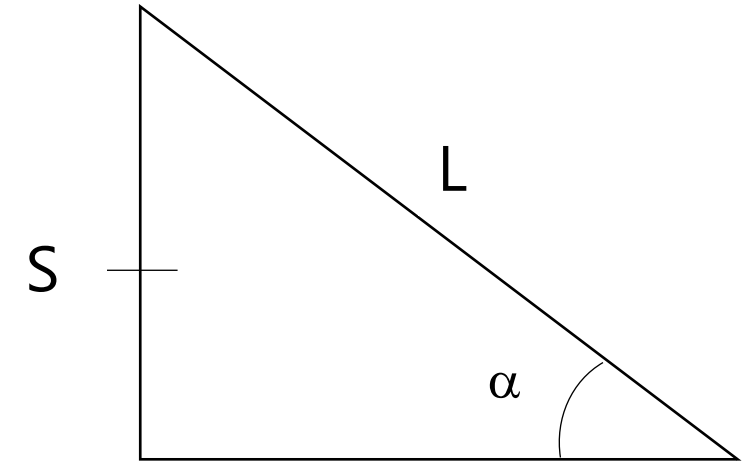
Uygulama-6:

Çözüm:

$$\frac{S}{L} = \sin \beta \Rightarrow L = \frac{S}{\sin \beta} = \frac{450,013}{\sin(60,02319)} = 550,0995 \text{ m}$$

$$\sigma_s = \frac{(2 + 5 \times 0,45013)}{\sqrt{4}} = 2,1253 \text{ mm}$$

$$\sigma_\beta = \frac{6}{\sqrt{10}} = 1,8974 \text{ cc}$$



(Neden?) Tekrar sayıları



Uygulama-6:

Çözüm:

Birimler → Uzunluklar (mm)

Açılar (cc)

$$L = \frac{S}{\sin \beta} \rightarrow dL = \left(\frac{1}{\sin \beta} \right) dS + \left(\frac{S \cos \beta}{\sin^2 \beta} \frac{1}{\rho} \right) d\beta$$

$$dL = 1,2357 dS + (0,6342 \text{ mm/cc}) d\beta$$



$$\sigma_L^2 = (1,2357)^2 \sigma_S^2 + (0,6342)^2 \sigma_\beta^2$$

$$\sigma_L = 2,89 \text{ mm} \quad \checkmark$$

$$\sigma_S = 2,1253 \text{ mm}$$

$$\sigma_\beta = 1,8974 \text{ cc}$$

Uygulama-7: *Fonksiyonların fonksiyonunun kovaryans matrisi*

Uygulama-7: r_1 ve r_2 doğrultu ölçülerinin standart sapmaları 4 mgon, aralarındaki korelasyon -0,5'tir. Buna göre;

- a) $a=r_2-r_1$ ve $b=r_2+r_1$ açıların kovaryans matrisini,
- b) $c=a+2b$ ve $d=a-b$ açıların kovaryans matrisini elde ediniz.

Çözüm:

a) $\mathbf{x} = [r_1 \ r_2]^T \rightarrow \mathbf{C}_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -0,5 \times 4 \times 4 \\ -0,5 \times 4 \times 4 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 16 \end{bmatrix} \text{ mgon}^2$

$$\begin{aligned} da &= -dr_1 + dr_2 \\ db &= +dr_1 + dr_2 \end{aligned} \rightarrow \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{C}_{ab} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 \end{bmatrix} = \mathbf{F} \mathbf{C}_{xx} \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \text{ mgon}^2$$

Katsayılar Matrisi



Uygulama-7: *Fonksiyonların fonksiyonlarının kovaryans matrisi*

Çözüm:

b) $\mathbf{y} = [a \ b] \rightarrow \mathbf{C}_{yy} = \mathbf{C}_{ab} = \begin{bmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \text{ mgon}^2$

$$c = a + 2b; \quad d = a - b$$

$$\begin{aligned} dc &= da + 2db \\ dd &= da - db \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{yellow arrow}} \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{yellow arrow}} \mathbf{C}_{cd} = \begin{bmatrix} \sigma_c^2 & \sigma_{cd} \\ \sigma_{cd} & \sigma_d^2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{C}_{yy} \mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 112 & 16 \\ 16 & 64 \end{bmatrix} \text{ mgon}^2$$

Katsayılar Matrisi



Uygulama-7: *Fonksiyonların fonksiyonlarının kovaryans matrisi*

Çözüm:

b)-2.çözüm

$$\mathbf{C}_{ab} = \mathbf{C}_{yy} = \mathbf{F}\mathbf{C}_{xx}\mathbf{F}^T$$

$$\mathbf{C}_{cd} = \mathbf{G}\mathbf{C}_{yy}\mathbf{G}^T$$

$$\mathbf{C}_{yy} = \mathbf{F}\mathbf{C}_{xx}\mathbf{F}^T$$

Fonksiyonların fonksiyonlarının kovaryans matrisi

$$\mathbf{C}_{cd} = (\mathbf{GF})\mathbf{C}_{xx}(\mathbf{F}^T\mathbf{G}^T) = \mathbf{HC}_{xx}\mathbf{H}^T$$



Uygulama-7: *Fonksiyonların fonksiyonlarının kovaryans matrisi*

Çözüm:

b)

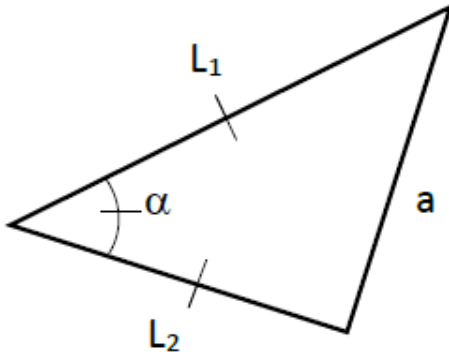
$$\begin{aligned} da &= -dr_1 + dr_2 \\ db &= +dr_1 + dr_2 \\ dc &= da + 2db \\ dd &= da - db \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{GF} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{C}_{cd} = \mathbf{HC}_{xx}\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 112 & 16 \\ 16 & 64 \end{bmatrix} \text{ mgon}^2$$

Uygulama-8: (2018-Sınav Sorusu)

Uygulama-8:



Şekildeki parselde işaretli L_1 ve L_2 uzunlukları ve α açısı ölçülmüştür. Ölçüler, standart sapmaları ve aralarındaki korelasyonlar aşağıda verilmektedir.

$$L_1=120,396 \text{ m}; L_2=210,411 \text{ m}, \sigma_L=3+6\text{ppm}, \rho_{L_1L_2}=0,40$$

$$\alpha=34,1969 \text{ gon}, \sigma_\alpha=5 \text{ mgon}$$

- Ölçülerin kovaryans matrisini,
- Birim ağırlıklı ölçünün standart sapması 2 mm olduğuna göre ağırlık katsayıları matrisini oluşturunuz.
- a kenarının standart sapmasını hesaplayınız.



Uygulama-8: (2018-Sınav Sorusu)

Çözüm:

a) $\sigma_{L1}=3,7224 \text{ mm}, \sigma_{L2}=4,2625 \text{ mm}, \sigma_{L1L2}=6,3468 \text{ mm}^2$

Uzunluklar $\rightarrow$ mm, Açılar $\rightarrow$ mgon

$\mathbf{x}=[L_1 \ L_2 \ \alpha]^T$

$\mathbf{C}_{xx} = \begin{bmatrix} 13,8563 & 6,3468 & 0 \\ & 18,1689 & 0 \\ sim. & & 25 \end{bmatrix}$

b)

$\sigma_0^2=4 \text{ mm}^2 \rightarrow \mathbf{Q}_{xx}=(1/\sigma_0^2)\mathbf{C}_{xx} = \begin{bmatrix} 3,4641 & 1,5867 & 0 \\ & 4,5422 & 0 \\ sim. & & 6,2500 \end{bmatrix}$

c)

$a = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos\alpha} = 123,4432 \text{ m}$

$da = \left(\frac{L_1 - L_2 \cos\alpha}{a} \right) dL_1 + \left(\frac{L_2 - L_1 \cos\alpha}{a} \right) dL_2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{L_1L_2 \sin\alpha}{a} \right) d\alpha$

$da = (-0,4891)dL_1 + (0,8666)dL_2 + (1,6495)d\alpha \rightarrow \mathbf{F} = [-0,4891 \ 0,8666 \ 1,6495]$

$\sigma_a^2 = \mathbf{F}\mathbf{C}_{xx}\mathbf{F}^T = 79,6005 \text{ mm}^2 \rightarrow \sigma_a = 8,92 \text{ mm}$

Alıştırmalar:

- 1) *Uygulama-1'i varyans-kovaryans yayılma kuralını uygulayarak çözünüz.*
- 2) *A ve B kenarları korelasyonsuz ve standart sapmaları biliniyorsa, $\arccos(A/B)$ fonksiyonunun standart sapmasını elde ediniz.*
- 3) *1 ve 2 noktalarının x_1, y_1 ve x_2, y_2 koordinatları hatalıdır. Buna göre (1-2) açıklık açısının ve 1-2 yatay kenar uzunluğunun hatasının nasıl belirleneceğini gerçek hata yayılma kuralını uygulayarak (ve gerekli sadeleştirmeleri yaparak) gösteriniz.*
- 4) *Bir dairenin yarıçapı bir ölçü için standart sapması 1 cm olan bir uzaklık ölçerle 5 kez ölçülerek 63.321 m elde ediliyor. Dairenin çevresinin ve alanının standart sapmalarını belirleyiniz.*

Ders duyuruları, soru ve görüşleriniz için:



Prof. Dr. Uğur DOĞAN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/dogan>

dogan@yildiz.edu.tr



Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

<https://avesis.yildiz.edu.tr/caydin>

caydin@yildiz.edu.tr; caydin78@gmail.com



Dr. Öğretim Üyesi Deniz ÖZ DEMİR

<https://avesis.yildiz.edu.tr/denizoz>

denizoz@yildiz.edu.tr

