Parametre Kestirimi

Prof. Dr. U. DOĞAN , Prof. Dr. C. AYDIN, Dr. Öğr . Üyesi D. ÖZ DEMİR

YTÜ-Harita Mühendisliği Bölümü, Jeodezi Anabilim Dalı

İstanbul, Kasım 2021

Parametre Kestirimi

- Rasgele değişkenlerin beklenen değerlerinin ve varyanslarının birden fazla ölçü kullanılarak belirlenmesi işlemine PARAMETRE KESTİRİMİ adı verilir.

- Fazla ölçülerden parametre kestirimi yapabilmek için çeşitli yöntemler bulunur. Bu yöntemler;

  1. En Küçük Kareler (EKK) yöntemi,
  2. Beklenen Değere Sadık En Uygun Kestirim (BUE, ya da BLUE)
  3. Maksimum Likelihood yöntemidir.

Her üç yöntem, ölçülerin normal dağılımlı olması durumunda özdeş sonuç verirler.

Parametre Kestirimi

- Uygulamadaki kolaylıkları nedeniyle, jeodezide genellikle, EN KÜÇÜK KARELER (EKK) YÖNTEMİ kullanılır.
- EKK yöntemi; TEMEL DENKLEMLER adı verilen,

ÖLÇÜ+DÜZELTMESİ=BİLİNMEYENLERİN FONKSİYONU

biçimindeki denklem sistemine dayanır. Dengeleme hesabı bu denklemleri ele alarak, bir problemde geçen bilinmeyenlerin (örneğin koordinatların) ve onların standart sapmalarının EN UYGUN biçimde belirlenmesini konu alır.

Parametre Kestirimi

- Dengeleme hesabına geçmeden önce, fazla ölçüler yoluyla, gözlenen büyüklüklerin en uygun değerlerinin ve standart sapmalarının pratik olarak belirlendiği iki özel problemi ele alacağız:

  - **Sonlu ölçüler yardımıyla standart sapma hesabı,**
  - **Ölçü çiftleri yardımıyla standart sapma hesabı.**

Parameter Kestirimi: *Sonlu ölçüler yardımıyla standart sapma hesabı*

- Bir büyüklük (örneğin, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$), DEĞİŞMEYEN KOŞULLAR ALTINDA n kez gözlenmiş olsun;

$$\ell = [\mathrm{L}_1 \quad \mathrm{L}_2 \quad \cdots \mathrm{L}_n]^T$$

n×1 Ölçüler vektörü

- μ için en uygun (en yüksek olasılıklı) değer, BU DURUM İÇİN, aritmetik ortalamadır:

$$E(\mu) = \bar{x} = \frac{[L]}{n} = \frac{1}{n}\mathbf{s}\ell \qquad (\mathbf{s} = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1])$$

Parametre Kestirimi: *Sonlu ölçüler yardımıyla standart sapma hesabı*

- Ölçülerin (gerçek) hataları ve düzeltmeleri kullanılarak;

Hata	**Düzeltme**
$\boxed{\varepsilon_i = L_i - \mu}$	$\boxed{v_i = \bar{x} - L_i}$

$$\boxed{\varepsilon_i = \bar{x} - v_i - \mu}$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \bar{x} - v_1 - \mu \\
\varepsilon_2 &= \bar{x} - v_2 - \mu \\
&\vdots \\
\varepsilon_n &= \bar{x} - v_n - \mu
\end{aligned}
$$

$$\boxed{[\varepsilon] = n\bar{x} - \underbrace{\cancel{[v]}}_{\mathbf{0}} - n\mu} \rightarrow \boxed{\bar{x} - \mu = \frac{[\varepsilon]}{n}}$$

1

Parametre Kestirimi: *Sonlu ölçüler yardımıyla standart sapma hesabı*

- Gerçek hataların kareleri;

$$\boxed{\varepsilon_i = \bar{x} - v_i - \mu}$$

$$\varepsilon_1^{\,2} = (\bar{x} - \mu)^2 + v_1^2 - 2v_1(\bar{x} - \mu)$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_n^{\,2} = (\bar{x} - \mu)^2 + v_n^2 - 2v_n(\bar{x} - \mu)$$

1

$$\boxed{\bar{x} - \mu = \frac{[\varepsilon]}{n}}$$

$$\boxed{[\varepsilon\varepsilon] = n(\bar{x} - \mu)^2 + [vv] - 2[\cancel{v}](\bar{x} - \mu)}$$

0

2

$$\boxed{[\varepsilon\varepsilon] = \frac{[\varepsilon]^2}{n} + [vv]}$$

$$\boxed{ns^2 = (s^2 + rs^2) + [vv]}$$

İspat: Demirel (2009)

Bir Ölçünün Varyansı

$$\boxed{s^2 = \frac{[vv]}{(n-1)(1+r)}}$$

Ölçüler arasında sabit korelasyon

Parameter Kestirimi: *Sonlu ölçüler yardımıyla standart sapma hesabı*

- En uygun değer olan aritmetik ortalamanın varyansı:

$$E(\mu) = \bar{x} = \frac{[L]}{n} = \frac{1}{n}\mathbf{s}\ell \longrightarrow \bar{s}^2 = \mathbf{s}\mathbf{C}_{ll}\mathbf{s}^T \longrightarrow \mathbf{C}_{ll} = \begin{bmatrix} s^2 & rs^2 & rs^2 \\ rs^2 & s^2 & rs^2 \\ rs^2 & rs^2 & s^2 \end{bmatrix}$$

Aritmetik Ortalamanın Varyansı

$$\boxed{\bar{s}^2 = \frac{s^2}{n}(1+(n-1)r)}$$

Ölçüler arasında sabit korelasyon

Parameter Kestirimi: *Sonlu ölçüler yardımıyla standart sapma hesabı (ÖZET)*

Aritmetik Ortalama

$$\boxed{\bar{x} = [L]/n}$$

Düzeltmeler

$$\boxed{v_i = \bar{x} - L_i}$$

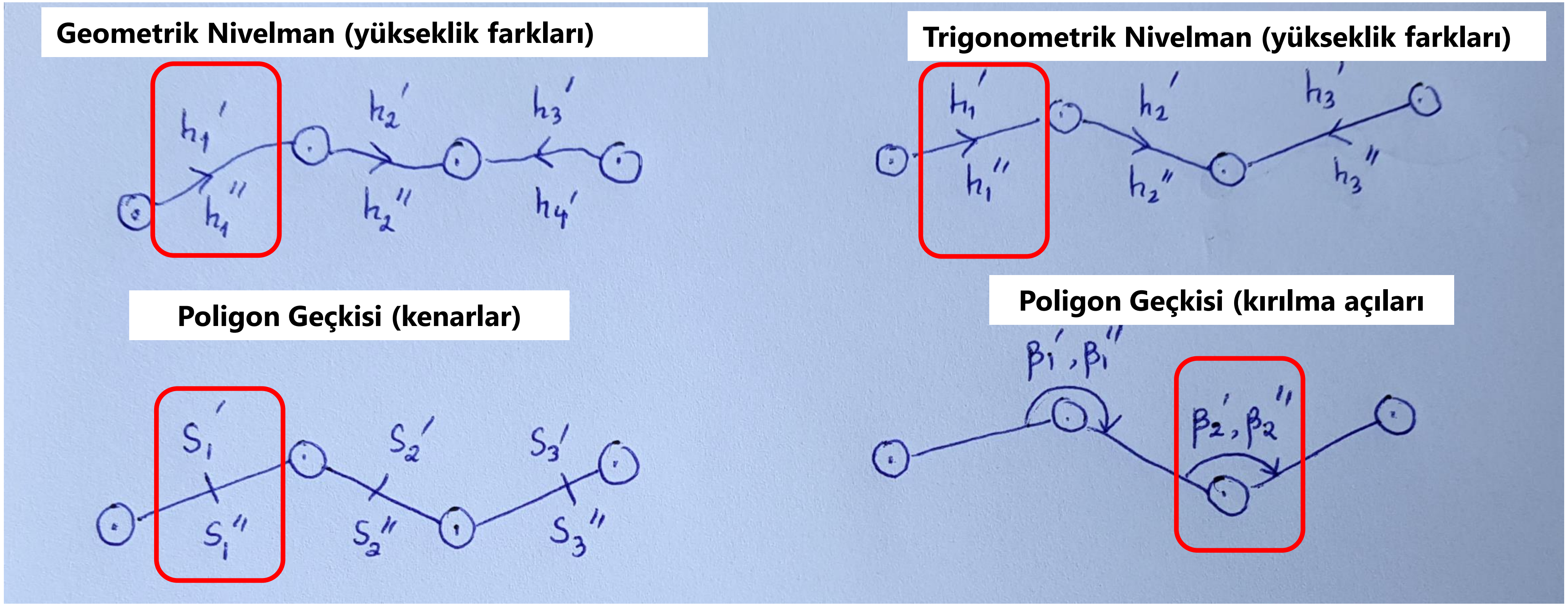
Düzeltmelerin Karelerinin Toplamı

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2$$

	Korelasyon var (*r*)	**Korelasyon yok (*r*=0)**
Bir ölçünün varyansı	$s^2 = \dfrac{[vv]}{(n-1)(1+r)}$	$s^2 = \dfrac{[vv]}{(n-1)}$
Aritmetik ortalamanın varyansı	$\bar{s}^2 = \dfrac{s^2}{n}(1+(n-1)r)$	$\bar{s}^2 = \dfrac{s^2}{n}$

Parametre Kestirimi: *Ölçü Çiftleri Yardımıyla Standart Sapma Hesabı*

Nivelmanda yükseklik farkları, poligon geçkisinde kenarlar ve kırılma açıları ikişer kez gözlenir. Bunlara ölçü çiftleri adı verilir.



Bir ölçü çifti

Parameter Kestirimi: *Ölçü Çiftleri Yardımıyla Standart Sapma Hesabı*

L_i', L_i''

Bir Ölçü Çifti

Düzeltilmiş Ölçü Çifti

$L_i' - \varepsilon_i' = L_i'' - \varepsilon_i''$ → $d_i = L_i' - L_i'' = \varepsilon_i' - \varepsilon_i''$

$$d_1^2 = \varepsilon_1'^2 + \varepsilon_1''^2 - 2\varepsilon_1'\varepsilon_1''$$

$$\vdots$$

$$d_n^2 = \varepsilon_n'^2 + \varepsilon_n''^2 - 2\varepsilon_n'\varepsilon_n''$$

n: Ölçü çifti sayısı

$$[dd] = [\varepsilon'\varepsilon'] + [\varepsilon''\varepsilon''] - 2[\varepsilon'\varepsilon'']$$

Parameter Kestirimi: *Ölçü Çiftleri Yardımıyla Standart Sapma Hesabı*

$$[dd]=[\varepsilon'\varepsilon']+[\varepsilon''\varepsilon'']-2[\varepsilon'\varepsilon'']$$

$$[dd]=ns^2+ns^2-2rs^2$$

Bir Ölçünün Varyansı

$$s^2=\frac{[dd]}{2n(1-r)}$$

Ölçüler arasında sabit korelasyon

Parameter Kestirimi: *Ölçü Çiftleri Yardımıyla Standart Sapma Hesabı*

$$L_i', L_i''$$

Bir Ölçü Çifti

Aritmetik Ortalaması

$$\bar{L}_i = \frac{1}{2}(L_i' + L_i'')$$

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{4}(s^2 + s^2 + 2rs^2)$$

Bir Ölçü Çiftinin Aritmetik Ortalamasının Varyansı

$$\bar{s}^2 = \frac{s^2}{2}(1 + r)$$

Parameter Kestirimi: *Ölçü Çiftleri Yardımıyla Standart Sapma Hesabı (Ağırlıklı)*

Ağırlık

1. Ölçü Çifti

$$L_1', L_1'' \rightarrow P_1 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}$$

$\vdots$

n. Ölçü Çifti

$$L_n', L_n'' \rightarrow P_n = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2}$$

Ağırlık eşitliğinde sigma'lı ifadeler yerine s'li ifadeler düşünülürse, ispat edilmiş olur.

Birim Ağırlıklı Ölçünün Varyansı

$$s_0^2 = \frac{[Pdd]}{2n(1-r)}$$

Farkların Ağırlıklı Kareleri Toplamı

$$[Pdd] = P_1 d_1^2 + \ldots + P_n d_n^2$$

Bir Ölçü Çiftinin (L_i' ve L_i'') Varyansı

$$s_i^2 = \frac{s_0^2}{P_i}$$

Ölçü Çiftinin (L_i' ve L_i'') Arit. Ortalamasının Varyansı

$$\bar{s}_i^2 = \frac{s_0^2}{2P_i}(1+r)$$

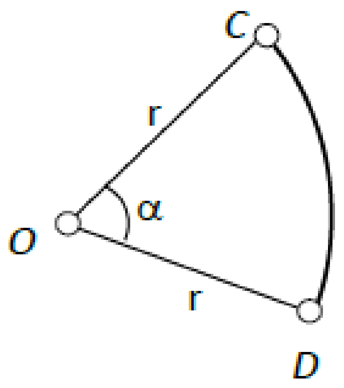
Parametre Kestirimi: *Ölçü Çiftleri Yardımıyla Standart Sapma Hesabı (ÖZET)*

Ölçü Çifti		Fark		Ağırlık	Farkların Ağırlıklı Kareleri Toplamı
$L_i', L_i'' \quad (i=1,\ldots,n)$	→	$d_i = L_i' - L_i''$	→	$P_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2$	$[Pdd] = P_1 d_1^2 + \ldots + P_n d_n^2$

	Korelasyon var (*r*)	Korelasyon yok (*r*=0)
Birim ağırlık ölçünün varyansı	$s_0^2 = \dfrac{[Pdd]}{2n(1-r)}$	$s_0^2 = \dfrac{[Pdd]}{2n}$
Bir ölçü çiftinin varyansı	$s_i^2 = \dfrac{s_0^2}{P_i}$	$s_i^2 = \dfrac{s_0^2}{P_i}$
Bir ölçü çiftinin aritmetik ortalamasının varyansı	$\overline{s}_i^2 = \dfrac{s_0^2}{2P_i}(1+r)$	$\overline{s}_i^2 = \dfrac{s_0^2}{2P_i}$

Örnek-1:

Şekildeki α merkez açısı değişmeyen koşullar altında 5 kez ölçülmüştür.



i	α (gon)
1	40,3998
2	40,3988
3	40,3983
4	40,3974
5	40,3990

r yarıçap uzunluğu 120 m, standart sapması 4 mm olduğuna göre CD yay parçasının en uygun uzunluğunu ve standart sapmasını belirleyiniz.

Örnek-1:

Çözüm:

CD yay parçasının en uygun uzunluğu :

$$CD = 2\pi r \frac{\bar{\alpha}}{400}$$

$\bar{\alpha}$ aritmetik ortalaması=48,39866 gon → **En uygun değer**

i	v_i (mgon)
1	-1,14
2	-0,14
3	0,36
4	1,26
5	-0,34
[v]=	0,00
[vv]=	3,1520 $mgon^2$

$$s^2 = \frac{[vv]}{5-1} = 0{,}7880\ mon^2$$ → **Bir ölçünün varyansı**

$$s_{\bar{\alpha}}^2 = \frac{s^2}{5} = 0{,}1576\ mgon^2$$ → **Aritmetik ortalama varyansı**

Örnek-1:

Çözüm:

$$CD = 2\pi r \frac{\bar{\alpha}}{400} = 91,229 \text{ m}$$

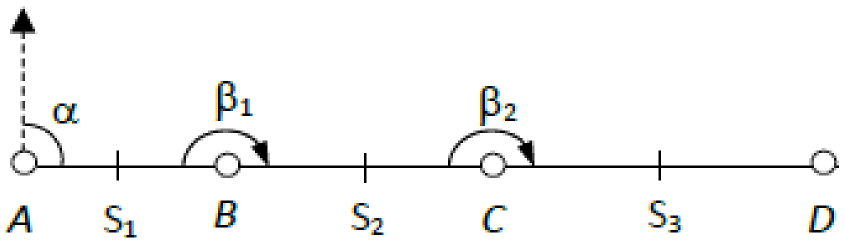
$$dCD = (2\pi \frac{\bar{\alpha}}{400})dr + (2\pi r \frac{1}{400}\frac{\pi}{200})d\bar{\alpha} = (0,7602)dr + (0,0296)d\bar{\alpha}$$

Gerçek hata yayılma kuralı

$$s_{CD}^2 = (0,7602)^2\sigma_r^2 + (0,0296)^2 s_{\bar{\alpha}}^2 = 9,2511 \text{ mm}^2 \rightarrow s_{CD} = 3,04 \text{ mm}$$

Varyans yayılma kuralı

Örnek-2:



Şekildeki poligon geçkisinde S kenar uzunlukları ikişer kez gözlenmiştir.

i	S_i' (m)	S_i''(m)	σ_S
1	50,293	50,297	4+5ppm
2	150,314	150,323	4+5ppm
3	200,111	200,100	4+5ppm

α açıklık açısı ve β_1 kırılma açısı hatasız, β_2 ise hatalıdır:

α=98,2932 gon (hatasız); β_1=198,3230 gon (hatasız); β_2=200,0098 gon ($\sigma_{\beta 2}$=3 mgon)

A nokta koordinatları (x_A=0, y_A=0 m) hatasız olduğuna göre, *D* noktasının en uygun koordinatlarını ve konum hatasını belirleyiniz.

Örnek-2:

Çözüm:

$\alpha_1 = \alpha + \beta_1 \pm 200 = 96,6162$ gon

$\alpha_2 = \alpha_1 + \beta_2 \pm 200 = 96,6260$ gon $\rightarrow \sigma_{\alpha 2} = \sigma_{\beta 2} = 3$ mgon

Açılar arasında yalnız β_2 hatalıdır.

$x_D = x_A + \bar{S}_1 \cos\alpha + \bar{S}_2 \cos\alpha_1 + \bar{S}_3 \cos\alpha_2$

$y_D = y_A + \bar{S}_1 \sin\alpha + \bar{S}_2 \sin\alpha_1 + \bar{S}_3 \sin\alpha_2$ $\rightarrow$ *Rasgele değişken vektörü;* $\mathbf{x} = [\bar{S}_1 \;\; \bar{S}_2 \;\; \bar{S}_3 \;\; \alpha_2]^T$

Örnek-2:

Çözüm:

$$P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{S_i}^2}$$

$$\overline{s}_i^{\,2} = \frac{s_0^2}{2P_i}$$

$\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$ aritmetik ortalamaları ve varyansları ($\overline{s}_i^2$)

i	$\overline{S}_i$ (m)	d_i (mm)	σ_{Si} (mm)	P_i	$P_i d_i d_i$	$\overline{s}_i^2$ (mm²)
1	50,295	-4	4,2515	1,0000	16,000	14,0277
2	150,319	-9	4,7516	0,8006	64,8486	17,5214
3	200,106	11	5,0005	0,7229	87,4709	19,4047
				[Pdd]=	168,3195	
				s_0^2=	28,0533	mm²

Örnek-2:

Çözüm:

D noktasının en uygun koordinatları:

x_D=19,9347 m ve y_D=400,2087 m

D noktasının konum hatası:

$dx_D = \cos\alpha\, d\bar{S}_1 + \cos\alpha_1\, d\bar{S}_2 + \cos\alpha_2\, d\bar{S}_3 - \{(\bar{S}_3 \sin\alpha_2)/\rho\}d\alpha_2 \quad (\rho=200/\pi)$

$dy_D = \sin\alpha\, d\bar{S}_1 + \sin\alpha_1\, d\bar{S}_2 + \sin\alpha_2\, d\bar{S}_3 + \{(\bar{S}_3 \cos\alpha_2)/\rho\}d\alpha_2$

$dx_D = (0{,}0268\, d\bar{S}_1 + 0{,}0531\, d\bar{S}_2 + 0{,}0530\, d\bar{S}_3 - 3{,}1388\, d\alpha_2)$

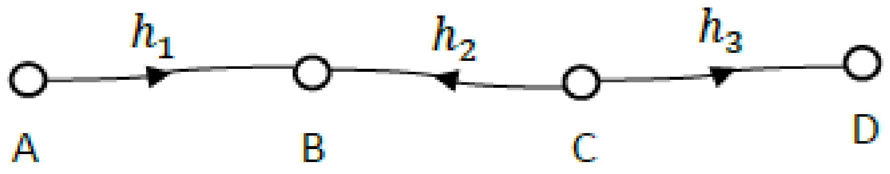
$dy_D = (0{,}9996\, d\bar{S}_1 + 0{,}9986\, d\bar{S}_2 + 0{,}9986\, d\bar{S}_3 - 0{,}1655\, d\alpha_2)$

$\sigma_{XD,P} = \sqrt{\sigma_{XD}^2 + \sigma_{YD}^2} = \sqrt{\underbrace{\bar{s}_1^2 + \bar{s}_2^2 + \bar{s}_3^2}_{} + \bar{S}_3^2\, \sigma_{\alpha 2}^2 / \rho^2}$ =11,83 mm=1,18 cm

Aritmetik ortalama varyansları (bir önceki tablo)

Örnek-3:

Şekildeki yükseklik farkları geometrik nivelman yöntemiyle ikişer kez gözlenmiştir. Aşağıda ölçü çiftleri (h_i', h_i'') ve nivelman yol uzunlukları (S_i) verilmektedir.



i	h_i' (m)	h_i'' (m)	S_i (km)
1	1,999	2,004	1,2
2	2,806	2,798	0,5
3	1,084	1,077	2,5

(S_0 = 1 km)

A noktasının yüksekliği 100,000 m (sabit) olduğuna göre, C ve D noktalarının en uygun yüksekliklerini, standart sapmalarını ve aralarındaki korelasyonu hesaplayınız.

Örnek-3:

Çözüm:

$S_0 \rightarrow$ *Birim niv. yol uzunluğu*

$$P_i = \frac{S_{0(km)}}{S_{i(km)}}$$ GEOMETRİK NİV.

$$P_i = \frac{S^2_{0(km^2)}}{S^2_{i(km^2)}}$$ TRİGONOMETRİK NİV.

i	$\bar{h}_i$ (m)	$d_i = h_i' - h_i''$ (mm)	$P_i = (1/S_i)$	$P_i d_i d_i$	$\bar{s}_i^2 = s_0^2 / 2P_i$ (mm²)
1	2,0015	-5	0,8333	20,8250	16,8432
2	2,8020	8	2,0000	128,0000	7,0177
3	1,0805	7	0,4000	19,6000	35,0885

Aritmetik ortalama varyansı

$$[Pdd] = 168,425 \ mm^2$$

Birim ağırlıklı ölçünün varyansı

$$s_0^2 = \frac{[Pdd]}{2n} = \frac{168,425}{6} = 28,0708 \ mm^2$$

-

Örnek-3:

Çözüm:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix}^T$$

C ve D noktasının en uygun yükseklikleri:

$H_C = H_A + h_1 - h_2 = 100{,}000 + 2{,}0015 - 2{,}8020 = 99{,}1995$ m

$H_D = H_A + h_1 - h_2 + h_3 = 100{,}000 + 2{,}0015 - 2{,}8020 + 1{,}0805 = 100{,}2800$ m

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_{xx} = \begin{bmatrix} 16{,}8432 & 0 & 0 \\ 0 & 7{,}0177 & 0 \\ 0 & 0 & 35{,}0885 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{H_C H_D} = \mathbf{F}\mathbf{C}_{xx}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 23{,}8609 & 23{,}8609 \\ 23{,}8609 & 58{,}9494 \end{bmatrix} \text{ mm}^2$$

$$s_{H_C} = \sqrt{23{,}8609} = 4{,}8848 \text{ mm} \; ; \; s_{H_D} = \sqrt{58{,}9494} = 7{,}6779 \text{ mm} \, ;$$

$$\rho = \frac{s_{H_C H_D}}{s_{H_C}\, s_{H_D}} = \frac{23{,}8609}{4{,}8848 * 7{,}6779} = 0{,}6362$$

Ders duyuruları, soru ve görüşleriniz için:

Prof. Dr. Uğur DOĞAN

https://avesis.yildiz.edu.tr/dogan

dogan@yildiz.edu.tr

Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

https://avesis.yildiz.edu.tr/caydin

caydin@yildiz.edu.tr; caydin78@gmail.com

Dr. Öğretim Üyesi Deniz ÖZ DEMİR

https://avesis.yildiz.edu.tr/denizoz

denizoz@yildiz.edu.tr