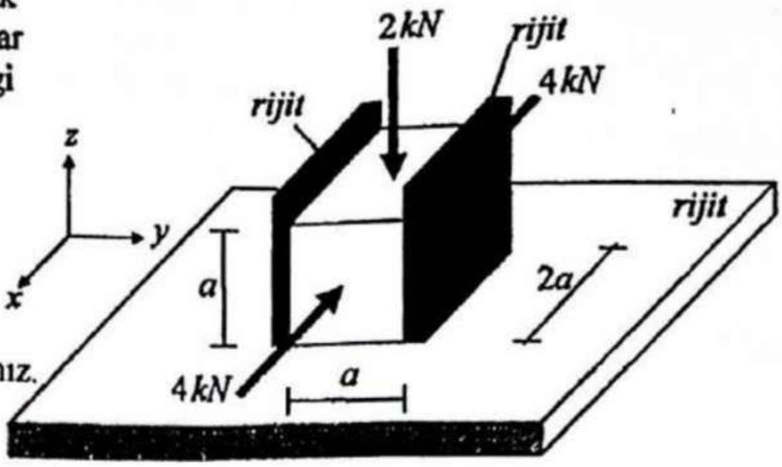
Boyutları $2a \times a \times a$ olan elastik prizma cisim, şekildeki rijit levhalar arasına zorlanma olmadan herhangi bir boşluk kalmayacak şekilde yerleştirilerek yüklenmiştir. a boyutunu
a) Maksimum kayma gerilmesi hipotezi (Tresca)
b) Biçim değiştirme enerjisi hipotezine (Mises) göre hesaplayınız.
$\sigma_{güv} = 1000 \ N/cm^2 \quad \nu = 0.25$



Çözüm: $\sigma_z = \frac{-2000}{2a^2} = -\frac{1000}{a^2}$, $\sigma_x = -\frac{4000}{a^2}$ $\quad \sigma_y = ?$

$\varepsilon_y = 0$, $\varepsilon_x = ?$, $\varepsilon_z = ?$

Hooke bağıntıları

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] = 0$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

2. Bağıntıdan

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1000}{a^2} - \frac{4000}{a^2}\right)$$

$\sigma_y = -\frac{1250}{a^2}$ bulunur.

$\sigma_1 = \sigma_z$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_x$ $\quad (\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3)$

a) $|\sigma_1 - \sigma_3| \leq \sigma_{güv} \rightarrow \left| -\frac{1000}{a^2} + \frac{4000}{a^2} \right| \leq 1000$

$a \geq 1.732$ cm bulunur.

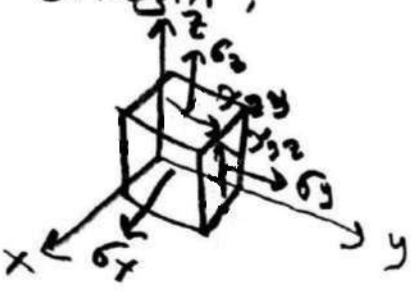
b) $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \leq \sigma_{güv}^2$

$$\frac{10^6}{a^4} + \frac{1.5625 \times 10^6}{a^4} + \frac{16 \times 10^6}{a^4} - \left(\frac{5 \times 10^6}{a^4} + \frac{4 \times 10^6}{a^4} + \frac{1.25 \times 10^6}{a^4}\right) \leq 10^6$$

$a \geq 1.698$ cm bulunur.

Not: Gerilme halinde en az bir yüzeyde kayma gerilmeleri sıfır ise üç boyutlu gerilme hali asal gerilmeleri, düzlem gerilme hali problemi gibi çözülebilir.

Örneğin;



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Özdeğer - özvektör problemi;

$$\left([\sigma] - \sigma\cdot[I]\right)\cdot\{n\} = 0$$

$$\det\left([\sigma] - \sigma\cdot[I]\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y-\sigma & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma \end{vmatrix} = \underbrace{(\sigma_x-\sigma)}_{0}\cdot\left[(\sigma_y-\sigma)(\sigma_z-\sigma) - \tau_{yz}^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \sigma_x$$

$$(\sigma_y-\sigma)(\sigma_z-\sigma) - \tau_{yz}^2 = 0$$

$$\sigma^2 - (\sigma_y+\sigma_z)\cdot\sigma + (\sigma_y\sigma_z - \tau_{yz}^2) = 0$$

karakteristik denklem diğer kökleri;

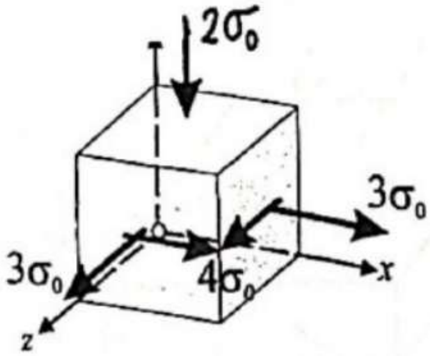
$$\sigma_{2,3} = \frac{\sigma_y+\sigma_z \pm\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\sigma_y+\sigma_z}{2} \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4}}$$

$$\Delta = (\sigma_y+\sigma_z)^2 - 4\sigma_y\sigma_z + 4\tau_{yz}^2$$

$$\Delta = \underbrace{\sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\sigma_y\sigma_z}_{(\sigma_y-\sigma_z)^2} + 4\tau_{yz}^2$$

Dolayısıyla; $\sigma_{2,3} = \dfrac{\sigma_y+\sigma_z}{2} \pm\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2}$

not: dönüş x ekseni doğrultusunda, yz düzlemindedir.



Üç eksenli gerilme etkisindeki bir elemanda gerilmeler şekilde görüldüğü gibidir. $\sigma_{güv}$=18MPa olarak verildiğine göre σ_0 gerilmesinin değerini,

a) En büyük kayma gerilmesi (Tresca) hipotezini,

b) Biçim değiştirme enerjisi (Von Mises) hipotezini,

kullanarak hesaplayınız. (25 Puan)

Çözüm: Kayma gerilmeleri sadece x-z düzlemine etkimektedir. y doğrultusundaki gerilme asal gerilmelerden biridir. x-z düzlemindeki asal gerilmeler aşağıdaki bağıntı yardımı ile bulunabilir. x-z düzlemi için

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{3\sigma_0 + 3\sigma_0}{2} \pm \sqrt{(4\sigma_0)^2} = 3\sigma_0 \pm 4\sigma_0 \rightarrow \sigma_1 = 7\sigma_0 \ , \sigma_2 = -\sigma_0$$

Gerilmeleri büyükten küçüğe sıralayacak olursak,

$\sigma_1 = 7\sigma_0$, $\sigma_2 = -\sigma_0$ ve $\sigma_3 = -2\sigma_0$

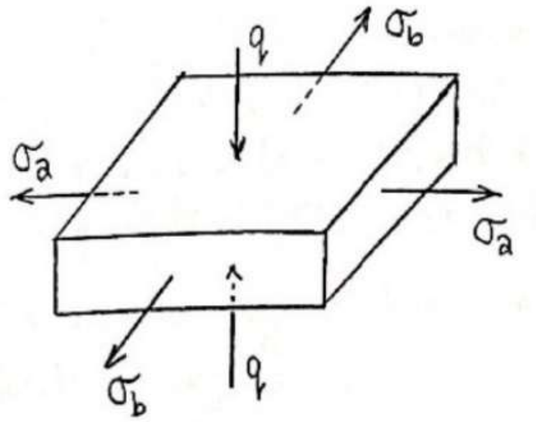
a) $|\sigma_1 - \sigma_3| \leqslant \sigma_m = \sigma_{güv}$ $\quad |7\sigma_0 - (-2\sigma_0)| \leqslant \sigma_{güv}$ $\quad 9\sigma_0 \leqslant 18MPa$

$\sigma_0 = 2\,MPa$ olarak bulunur.

b) $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \leqslant \sigma_m^2 = \sigma_{güv}^2$

$49\sigma_0^2 + \sigma_0^2 + 4\sigma_0^2 - (-7\sigma_0^2 - 14\sigma_0^2 + 2\sigma_0^2) \leq \sigma_{güv}^2$ $\quad 73\sigma_0^2 \leqslant 324\,MPa^2$

$\sigma_0 = 2{,}17\,MPa$ olarak bulunur.



Şekilde görülen elemanda
$\sigma_{güv} = 10\ kN/cm^2$, $\nu = 0.25$
$\sigma_a = 5\ kN/cm^2$, $\sigma_b = 4\ kN/cm^2$
olduğuna göre
a) En büyük kayma gerilmesi hipotezine göre
b) Biçimdeğiştirme enerjisi hipotezine göre q'yu bulunuz.

Çözüm:

Gerilmeleri büyüklük sırasına göre yazacak olursak
$\sigma_1 = \sigma_a = 5\ kN/cm^2$, $\sigma_2 = \sigma_b = 4\ kN/cm^2$, $\sigma_3 = -q$

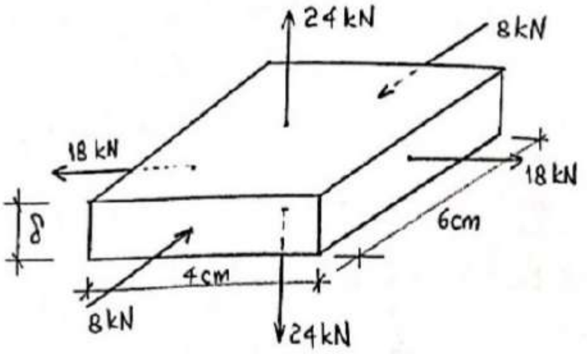
a) $\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{güv}$

$5 - (-q) = 10 \rightarrow q = 5\ kN/cm^2$

b) $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \leq \sigma_{güv}^2$

$5^2 + 4^2 + q^2 - [5 \times 4 + 5 \times (-q) + 4 \times (-q)] = 10^2$

$q^2 + 9q - 79 = 0 \rightarrow q = 5.462\ kN/cm^2$



Şekilde görülen elemanın δ kalınlığını kuvvetlerin yüzeylere üniform dağıldığını kabul ederek

a) En büyük normal gerilme hipotezine göre

b) En büyük kayma gerilmesi hipotezine göre

c) Toplam şekildeğiştirme enerjisi hipotezine göre

d) Biçimdeğiştirme enerjisi hipotezine göre

hesaplayınız. $\sigma_{güv} = 12\ kN/cm^2$, $\nu = 0.30$, malzeme çekme ve basınçta aynı özelliği göstermektedir.

Çözüm: $\sigma_1 = \frac{18}{6\times\delta} = \frac{3}{\delta}\ kN/cm^2$, $\sigma_3 = \frac{-8}{4\times\delta} = -\frac{2}{\delta}\ kN/cm^2$

$\sigma_2 = \frac{24}{4\times6} = 1\ kN/cm^2$

a) $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ kabul edelim

$\sigma_1 = \sigma_{güv} \rightarrow \frac{3}{\delta} = 12 \rightarrow \delta = 3/12 = 0.25\ cm$

olarak bulunur. Bulunan bu δ'ya göre gerilme sıralanışını kontrol edecek olursak,

$\sigma_1 = 3/0.25 = 12\ kN/cm^2 > \sigma_2 = 1\ kN/cm^2$

σ_3 gerilmesi basınç olduğundan basınçta en büyük gerilmeye göre δ'yı yeniden hesaplayacak olursak,

$\sigma_3 = -\sigma_{güv} \rightarrow -\frac{2}{\delta} = -12 \rightarrow \delta = 2/12 = 0.167\ cm$

Buna göre $\delta = 0.25\ cm$ seçilmelidir.

b) $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{güv}$

$\frac{3}{\delta} - \left(-\frac{2}{\delta}\right) = 12 \rightarrow \delta = 5/12 = 0.417\ cm$

$\sigma_1 = 3/0.417 = 7.20\ kN/cm^2$, $\sigma_3 = -2/0.418 = -4.80\ kN/cm^2$

Kabulumüz doğru.

c) $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) = \sigma_{güv}^2$

$$\frac{3^2}{\delta^2} + \frac{2^2}{\delta^2} + 1^2 - 2\times0.3\times\left[\frac{3}{\delta}\times\left(\frac{-2}{\delta}\right) - \frac{2}{\delta}\times1 + \frac{3}{\delta}\times1\right] = 12^2$$

$143\delta^2 + 0.6\delta - 16.6 = 0$

$\delta = 0.339\ cm$

d) $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) = \sigma_{güv}^2$

$$\frac{3^2}{\delta^2} + \frac{2^2}{\delta^2} + 1^2 + \frac{3}{\delta}\times\frac{2}{\delta} + \frac{2}{\delta}\times1 - \frac{3}{\delta}\times1 = 12^2$$

$143\delta^2 + \delta - 19 = 0$

$\delta = 0.361\ cm$

Boyutları axaxa olan bir küp aynı boyutlara sahip üstü açık rijit bir oyuğun içine yerleştirilmiştir. Küp, üst yüzeyine uygulanan z ekseni doğrultusunda üniform basınç gerilmesiyle 0.01 cm sıkıştırılmaktadır. Malzemede $E = 9\times10^4$ MPa , $\nu = 0.2$ ve çekme güvenlik gerilmesi $\sigma_{güv} = 150$ MPa olarak verildiğine göre kübün a boyutunu maksimum kayma gerilmesi (Tresca) hipotezine göre hesaplayın.

Çözüm: Probleme ait bilinenler ve bilinmeyenler

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0 \quad , \quad \varepsilon_z = -\frac{0.1}{a}$$

$$\sigma_x \neq 0 = ? \quad \sigma_y \neq 0 = ? \quad \sigma_z = -q$$

Gerilme-şekildeğiştirme bağıntılarından

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - 0.2(\sigma_y - q)\right] = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - 0.2(\sigma_x - q)\right] = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - 0.2\sigma_y &= -0.2q \\ \sigma_y - 0.2\sigma_x &= -0.2q \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &4.8\sigma_x = -1.2q \\ &\sigma_x = -0.25q \ , \ \sigma_y = -0.25q \ \text{ bulunur} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = \frac{1}{E}\left[-q - 0.2(-0.50q)\right] = -\frac{0.1}{a}$$

$$-\frac{0.9q}{9\times10^4} = -\frac{0.1}{a} \rightarrow q = \frac{1\times10^4}{a}$$

Tresca hipotezine göre

$$|\sigma_1 - \sigma_3| \leq \sigma_{güv} \qquad \sigma_1 = \sigma_2 = -0.25q \qquad \sigma_3 = -q$$

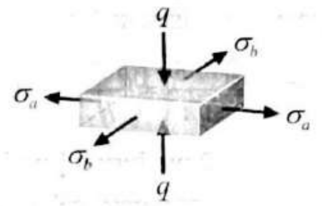
$$|-0.25q - (-q)| \leq 150 \quad \rightarrow 0.75q \leq 150 \qquad q \leq 200 \text{ MPa}$$

$$200 \geq \frac{10^4}{a} \qquad a \geq 50 \text{ mm}$$

$\upsilon = 0.3$ olup, çekme ve basınçta mukavemet gerilmeleri $\sigma_M = \hat{\sigma}_M = 80\,\text{MPa}$ dır. Cisme etkiyen normal gerilmeler $\sigma_a = 70\,\text{MPa}$ $\sigma_b = 20\,\text{MPa}$ olduğuna göre, q basınç gerilmesinin en büyük değerini

a) Toplam şekil değiştirme enerjisi varsayımına göre

b) Biçim değiştirme enerjisi varsayımına (von Mises) göre bulunuz.



Koyma gerilmesi bulunmaktadır;

negatif $q<0$

$\sigma_1 = \sigma_a = 70\,MPa$, $\sigma_2 = \sigma_b = 20\,MPa$; $\sigma_3 = q$

a) $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \leq \sigma_M^2$

$70^2 + 20^2 + q^2 - 2 \cdot 0{,}3(70 \cdot 20 + 70q + 20q) \leq 80^2$

Sınır halde $\rightarrow$ $q^2 - 2 \cdot 0{,}3(70+20)q + 70^2 + 20^2 - 2 \cdot 0{,}3 \cdot 70 \cdot 20 - 80^2 = 0$

$q_1 = -24{,}66\,MPa$; $q_2 = 78{,}66\,MPa$

$q<0$ old. (basınç)

$q_{max} = -24{,}66\,MPa$

b) $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \leq \sigma_M^2$

$70^2 + 20^2 + q^2 - (70 \cdot 20 + 70q + 20q) - 80^2 = 0$

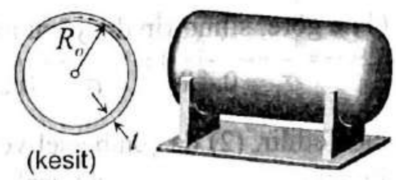
$q^2 - 90q - 2500 = 0$

$q_1 = 112{,}27\,MPa$; $q_2 = -22{,}27\,MPa$

$q < 0$ old.

$q_{max} = -22{,}27\,MPa$

Şekilde iki ucu kapalı silindirik buhar kazanına p iç basıncı etkiyor. Kazanda emniyet gerilmesi $\sigma_{em} = 100\,\text{MPa}$, ortalama yarıçap $R_o = 0.5\,\text{m}$, et kalınlığı $t = 10\,\text{mm}$ dir. İç basınç p nin alabileceği en büyük değeri biçim değiştirme enerjisi (von Mises) varsayımına göre hesaplayınız.



Buhar Kazanı Gövdesi:

$\sigma_ç = \dfrac{qR}{t} = 50q$

$\sigma_\ell = \dfrac{qR}{2t}$  $\sigma_\ell = \dfrac{qR}{2t} = 25q$

$\sigma_ç = \dfrac{q \cdot R}{t} = 50q$

$R = 500\,\text{mm}$; $t = 10\,\text{mm}$

$\sigma_1 = 50q$; $\sigma_2 = 25q$; $\sigma_3 = 0$

Düzlem gerilme hali için von Mises hipotezi;

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \leq \sigma_M^2 \qquad (\sigma_3 = 0)$$

$\sigma_M = \sigma_{em} = 100\,\text{MPa}$ alınacak

$$(50q)^2 + (25q)^2 - 50 \cdot 25 q^2 = 100^2$$

buradan $q^2 = 5,33 \Rightarrow q = \pm 2,31\,\text{MPa}$

$q < 0$ old, $q = -2,31\,\text{MPa}$