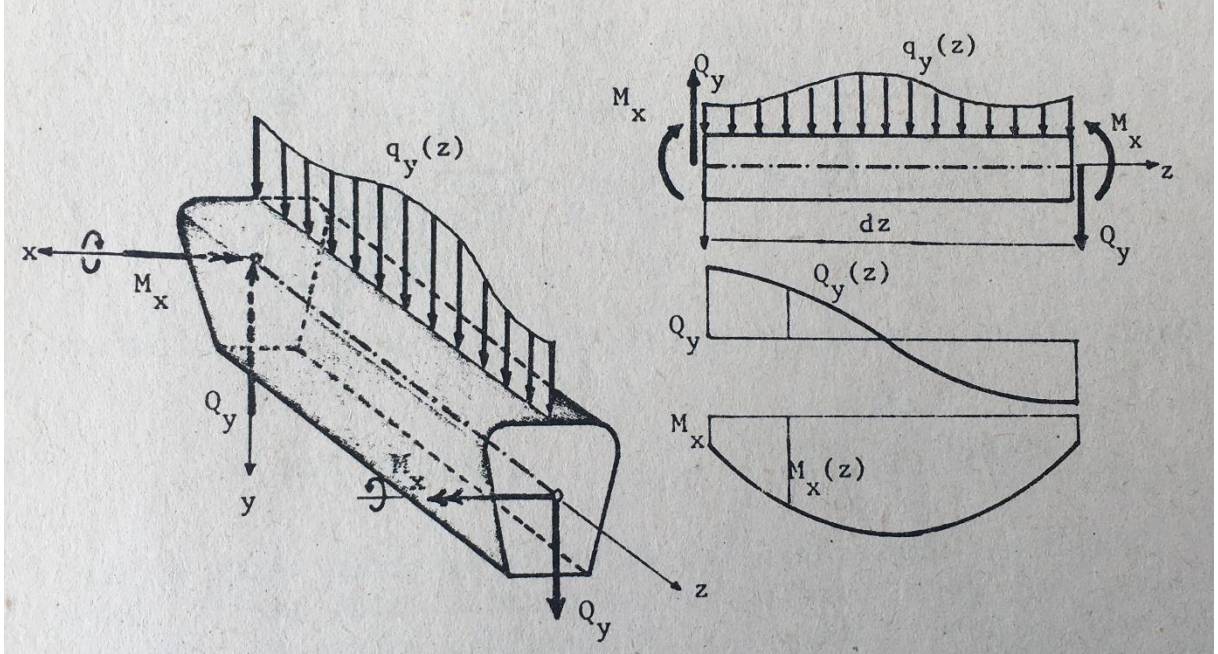


KESMELİ EĞİLME

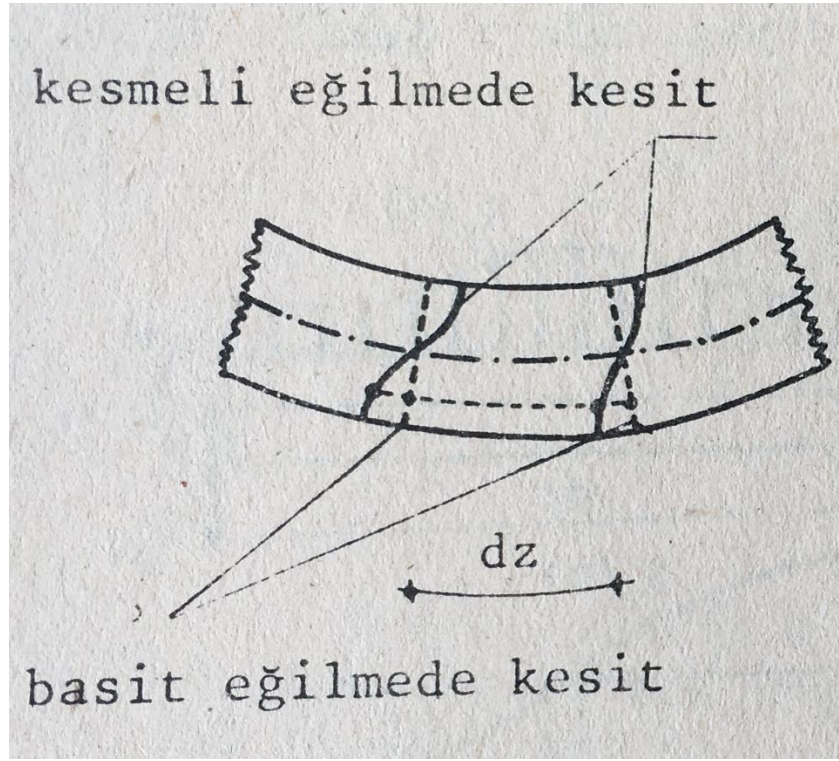
Pratikte en çok rastlanan bileşik mukavemet hallerinden biri olup, kesitlerde hem kesme kuvveti ve hem de eğilme momenti bulunur. Bu halde gerilme dağılımı, kesme kuvvetinden doğan kayma gerilmeleri ile eğilme momentinden doğan normal gerilmelerinden meydana gelir.

Simetrik Kesitler

y eksenine göre simetrik kesitli bir çubuk ele alalım. Çubuğa yz düzleminde etki eden yüklerden meydana gelen Q_y kesme kuvveti ve M_x eğilme momenti diyagramları aşağıda gösterilmektedir.



Basit eğilmede ($Q_y = 0$) dik kesitlerin düzlem kalması hipotezine göre, normal gerilme yayılımı lineer oluyordu. Sadece kesme kuvveti halinde ise ($M_x = 0$) ise, enkesitler düzlem kalmayıp çarpılıyordu. Ancak çarpılmada çubuk liflerinin boyu değişmediğinden,

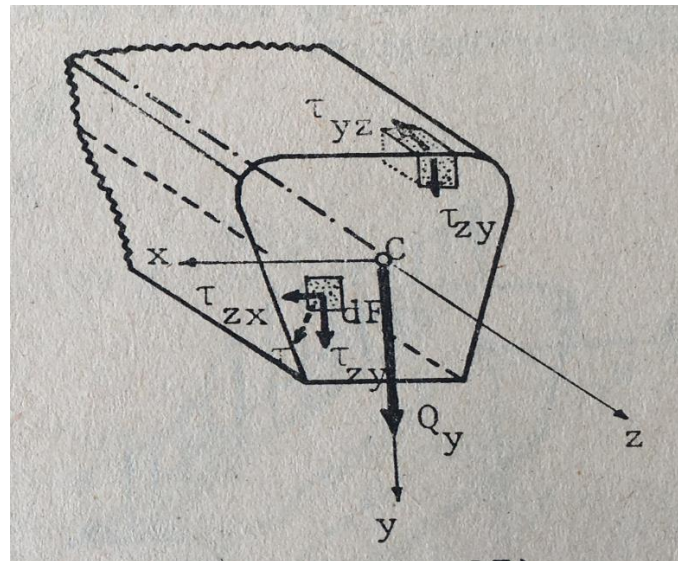


kesmeli eğilmede de σ_z için basit mukavemet hallerinde verilen,

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

ifadesi kullanılabilir. Ancak burada M_x , z' in bir fonksiyonu olduğundan σ_z normal gerilmesi de y ve z' nin fonksiyonu olacaktır; $\sigma_z = \sigma_z(y, z)$.

Kesitin herhangi bir dF alan elemanında, Q_y kesme kuvvetinden doğan kayma gerilmesi bileşenleri τ_{zx} ve τ_{zy} olacaktır.



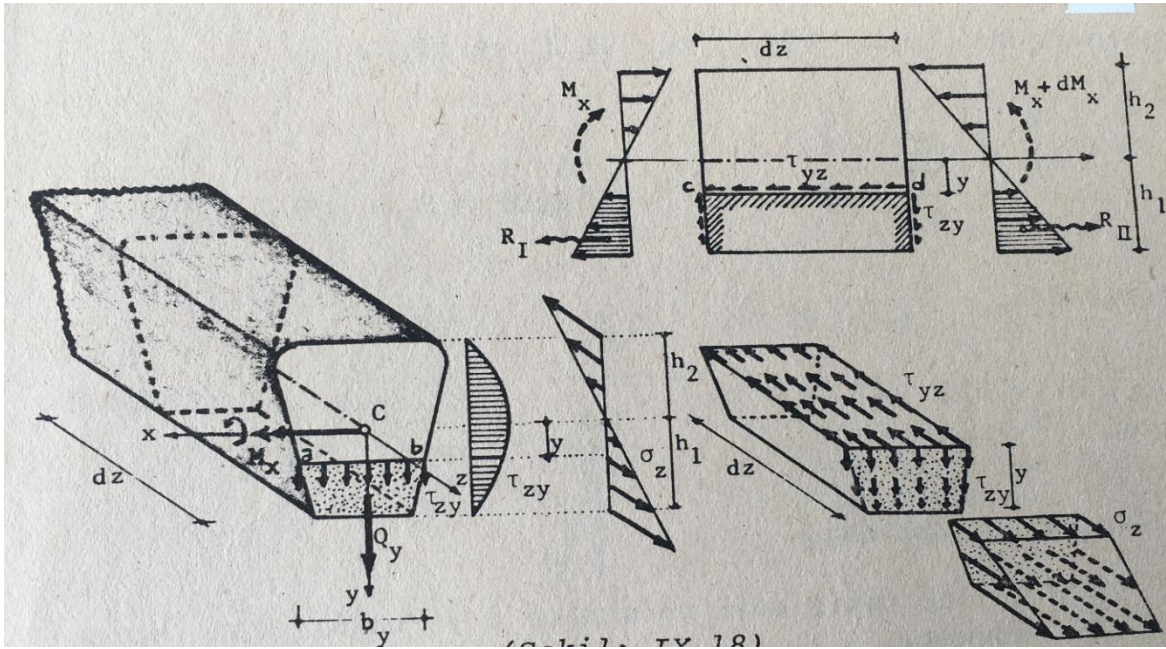
Bu bileşenler;

$$\int_F \tau_{zy} dF = Q_y \quad \int_F \tau_{zx} dF = 0$$

eşdeğerlik denklemlerini sağlamak zorundadırlar. Kayma gerilmelerinin τ_{zy} düşey bileşeninin kesit boyunca yayılışı, aynı y koordinatına sahip noktalarda, yok sayılabilir bir hata ile üniform kabul edilebilir. Bu kabulden dolayı τ_{zy} bileşeni, noktaların x koordinatından bağımsız olur;

$$\tau_{zy} = \tau_{zy}(y)$$

Dolayısıyla τ_{zy} gerilmelerini denge esasından bulmak mümkündür. Yukardaki şekilde verilen çubuktan dz uzunluklu ve tarafsız eksenden y mesafedeki bir düzlemle çıkartılmış bir parçanın yatay dengesini inceleyelim;



Parçanın sol yüzüne etkiyen σ_z gerilmelerinin eşdeğeri R_1 , sağ yüzünde ise R_2 olsun. Kesitin tarafsız eksenden y mesafedeki ab genişliğinde tesir eden düşey kayma gerilmesi τ_{zy} ise, kesite dik cd yüzeyinde de kayma gerilmesi τ_{yz} olacaktır (birbirine dik kesitlerde kayma gerilmeleri birbirine eşit ve ters işaretlidir).

Parçanın yatay dengesinde,

$$R_1 + b_y dz \tau_{zy} = R_2$$

yazılabilir. R_1 ve R_2 için, σ_z yardımı ile;

$$R_1 = \int_{F_1} \frac{M_x}{I_x} y dF \quad R_2 = \int_{F_1} \frac{M_x + dM_x}{I_x} y dF$$

eşitlikleri elde edilir. Bu değerler yukardaki yatay dengede yerine konularak,

$$\int_{F_1} \frac{M_x}{I_x} y dF + b_y \cdot dz \cdot \tau_{zy} = R_1 = \int_{F_1} \frac{M_x}{I_x} y dF + \int_{F_1} \frac{dM_x}{I_x} y dF$$

ve

$$\frac{dM_x}{dz} \int_{F_1} \frac{y dF}{I_x} = b_y \tau_{zy}$$

bulunur. Bu ifade de,

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y \quad ve \quad \int_{F_1} y dF = S_x$$

olduğundan,

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x}{I_x b_y}$$

şeklını alır. Burada;

Q_y : Kesite tesir eden ve sadece z ye bağılı olan kesme kuvveti,

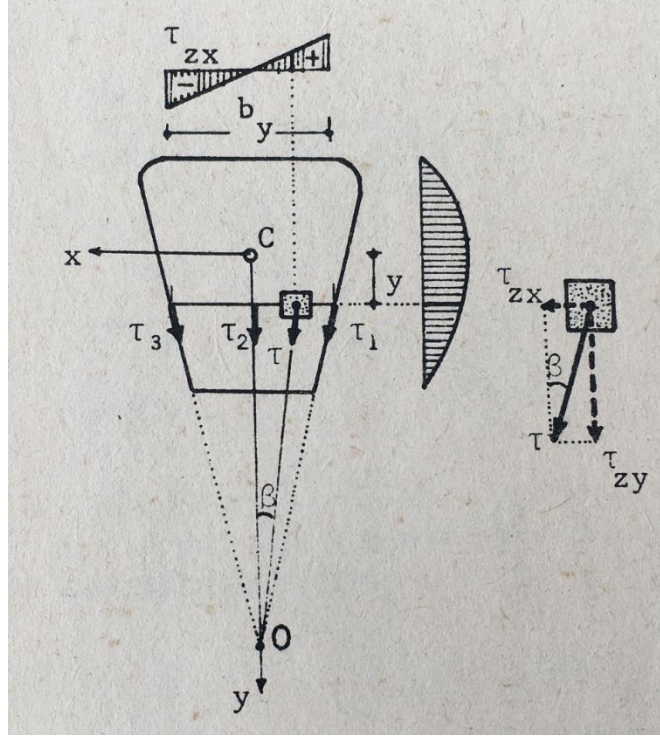
S_x : Taralı F_1 alanının x eksenine göre statik momenti,

I_x : Bütün kesitin x eksenine göre atalet momenti,

b_y : Tarafsız eksenden y mesafedeki kesit genişliğidir.

τ_{zy} bağıntısına göre, kesit üzerinde kayma gerilmesi yayılışı yukarıdaki şekilde gösterilmiştir.

Şimdi de kayma gerilmelerinin τ_{zx} yatay bileşenini bulalım. Kesitte, tarafsız eksenden y mesafedeki noktalara ait bir τ kayma gerilmelerinin doğrularının sabit O noktasından geçtiği kabul edilmektedir.



Buna göre, doğrultusu ve düşey bileşeni bilinen τ kayma gerilmesinin, τ_{zx} yatay bileşeni,

$$\tau_{zx} = \tau \tan \beta$$

ile hesap edilebilir. Genellikle τ_{zx} değeri çok küçük ve bazı hallerde sıfırdır.

Kayma gerilmesinin iki bileşeni de bulunduktan sonra şiddeti,

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$$

ile bulunur.

τ_{zy} kayma gerilmesi, aynı bir kesitte S_x/b_y oranının maksimum olması halinde, maksimum olur:

$$\max \tau_{zy} = \frac{Q_y}{I_x} \left(\frac{S_x}{b_y} \right)_{\max}$$

Bu ifade daha önce basit mukavemet hallerinde görüldüğü gibi,

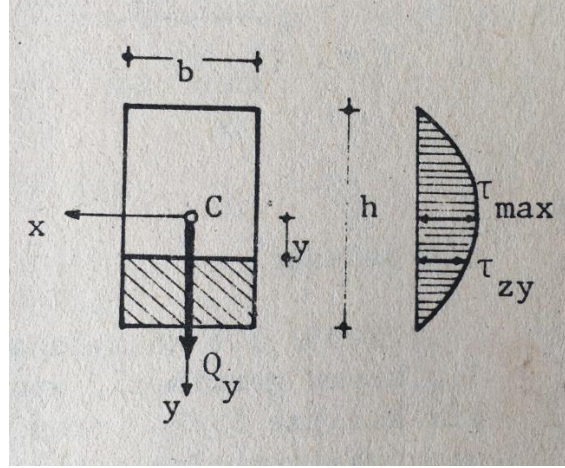
$$\max \tau_{zy} = k_y \frac{Q_y}{F}$$

şeklinde yazarak iki eşitliği kullanarak,

$$k_y \frac{Q_y}{F} = \frac{Q_y}{I_x} \left(\frac{S_x}{b_y} \right)_{max} \rightarrow k_y = \frac{F}{I_x} \left(\frac{S_x}{b_y} \right)_{max}$$

elde edilir. k_y kesit geometrisine bağılı sabit elde edilir. Bazı kesit şekilleri için k_y ve kayma gerilmesi değerleri aşağıda verilmektedir;

a- Dikdörtgen Kesit



$$\tau_{zx} \equiv 0 \quad \tau_{zy} = \tau \quad b_y = b$$

$$S_x = ba \left(\frac{a}{2} + y \right) \quad a = \left(\frac{h}{2} - y \right)$$

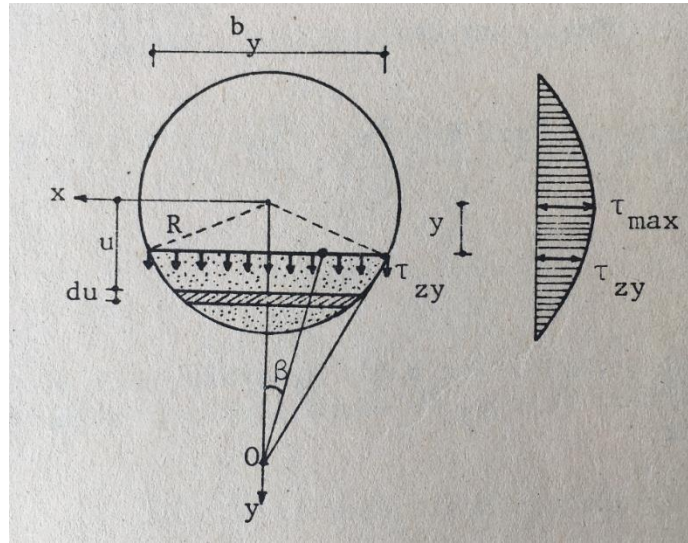
$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$\max \left(\frac{S_x}{b_y} \right)_{y=0} = \frac{b}{2b} \left(\frac{h^2}{4} \right) = \frac{h^2}{8}$$

$$k_y = \frac{F}{I_x} \left(\frac{S_x}{b_y} \right)_{max} = \frac{12 bh}{bh^3} \frac{h^2}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\max \tau_{zy} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{F}$$

b- Daire Kesit;



$$b_y = 2\sqrt{(R^2 - y^2)} \quad I_x = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$dS_x = 2\sqrt{(R^2 - u^2)}u \cdot du \quad , \quad S_x = \int_y^R 2u \sqrt{(R^2 - u^2)} du = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2}$$

$$\max \left(\frac{S_x}{b_y} \right)_{y=0} = \frac{2R^3}{3 \cdot 2R} = \frac{R^2}{3} \quad , \quad k_y = \frac{F}{I_x} \left(\frac{S_x}{b_y} \right)_{\max} = \frac{4\pi R^2}{\pi R^4} \frac{R^2}{3} = \frac{4}{3}$$

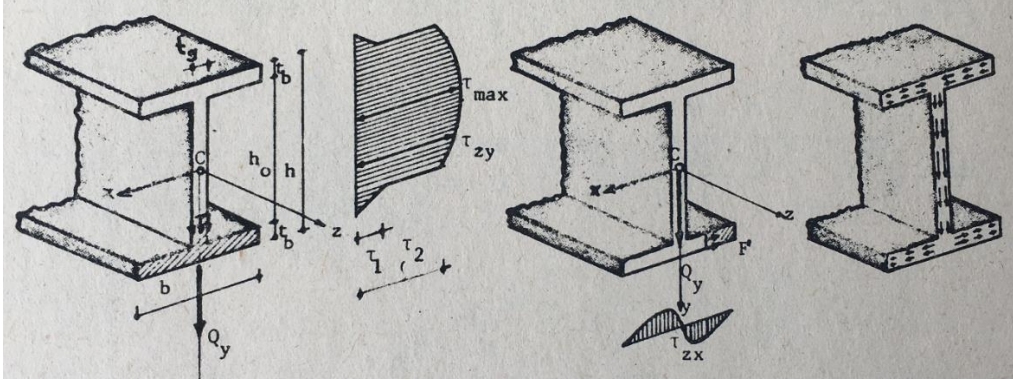
$$\max \tau_{zy} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{F}$$

$y=0$ ' da $\tau_{zx} = 0$ dır. Kesit üzerindeki herhangi bir A noktasında τ_{zx} için;

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} \tan \beta = \frac{-xy}{R^2 - y^2} \tau_{zy}$$

elde edilir.

c- I Profili



Pratikte çok kullanılan I profillerine ait τ_{zy} kayma gerilmesi dağılımı yukarıdaki şekilde gösterilmiştir. Bu profilde, başlıktan gövdeye geçerken b genişliği aniden t_g ye düştüğünden, diyagramda bu noktada bir sıçrama görülür. Buna göre,

$$\tau_1 = \frac{Q_y S_x}{I_x b} \quad \tau_2 = \frac{Q_y S_x}{I_x t_g}$$

olacaktır. Burada S_x , profil başlığının tarafsız eksene göre statik momentidir. Maksimum gerilme tarafsız eksen üzerinde olup değeri;

$$\max \tau_{zy} = \frac{Q_y S'_x}{I_x t_g}$$

S'_x , yarım kesitin x eksenine göre statik momentidir.

Gerilme diyagramından da görüldüğü gibi, bir I kirişinde kesme kuvvetinden meydana gelen kayma gerilmelerinin düşey bileşeni, alt ve üst başlıklarda ihmal edilebilir. Bunun sonucu olarak, böyle bir profilde kesme kuvvetini sadece gövdenin taşıdığı kabul edilebilir. Dolayısı ile,

$$\max \tau_{zy} = \frac{Q_y}{t_g h_o}$$

yazılabilir. Bu durumda başlıklarda, yalnız eğilme momentine karşı koyarlar.

Kesmeli Eğilmede Kesit Tayini ve Asal Yörüngeler

Doğru eksenli bir kirişin düşey yüklere maruz kalması halinde, genellikle maksimum moment ve maksimum kesme kuvveti aynı kesitte değildir. Buna göre, maksimum moment bakımından,

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leq \sigma_{em}$$

şartını sağlayacak bir kesit tayin edilir ve bu kesit maksimum kesme kuvvetine göre,

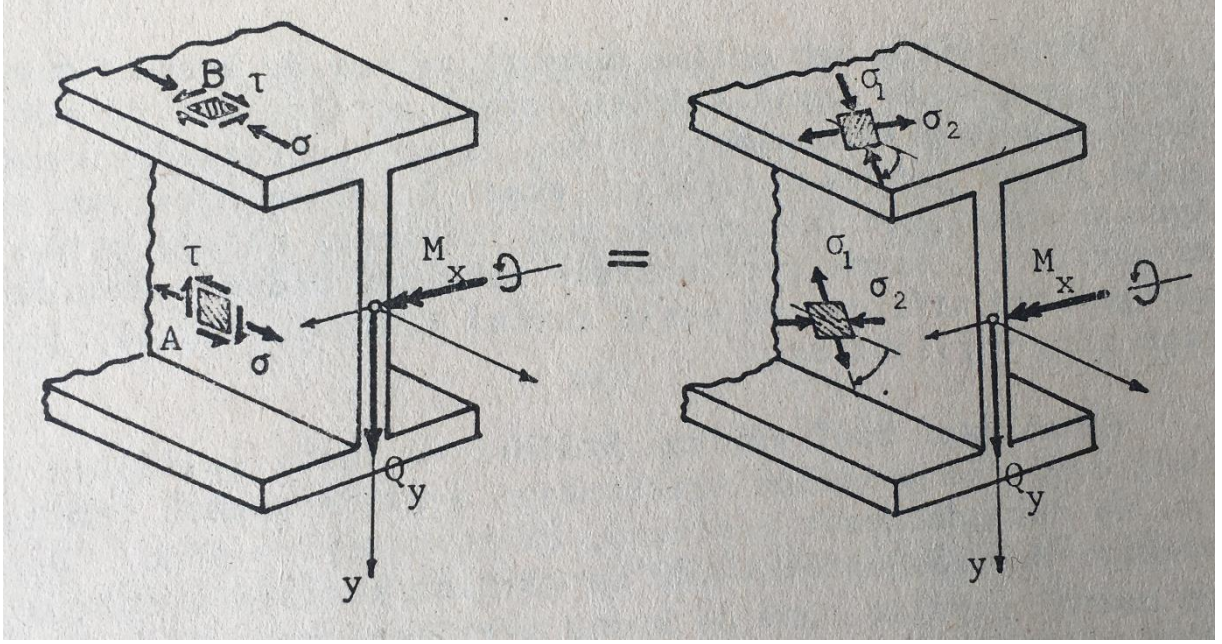
$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}S_x}{I_x b} = k_y \frac{Q_{max}}{F} \leq \tau_{em}$$

ile kontrol edilir. Çoğu zaman normal gerilme ile seçilen kesit kayma gerilmesi şartını sağlar.

Ancak, küçük açıklıklı kirişlerde veya kiriş malzemesinin kayma emniyet gerilmesinin küçük olması halinde, kesit tayini için kayma gerilmesi denklemi önem kazanır.

Bir kesitte hem eğilme momenti ve hem de kesme kuvveti varsa, momentten meydana gelen normal gerilme üst ve alt kenarda maksimum ve minimum olurken, kesme kuvvetinden meydana gelen kayma gerilmesi tarafsız eksen üzerinde maksimum olur. Ayrıca, kayma gerilmesinin maksimum olduğu yerde de normal gerilme sıfırdır ve kesit tayini yukardaki şartlara göre yapılabilir.

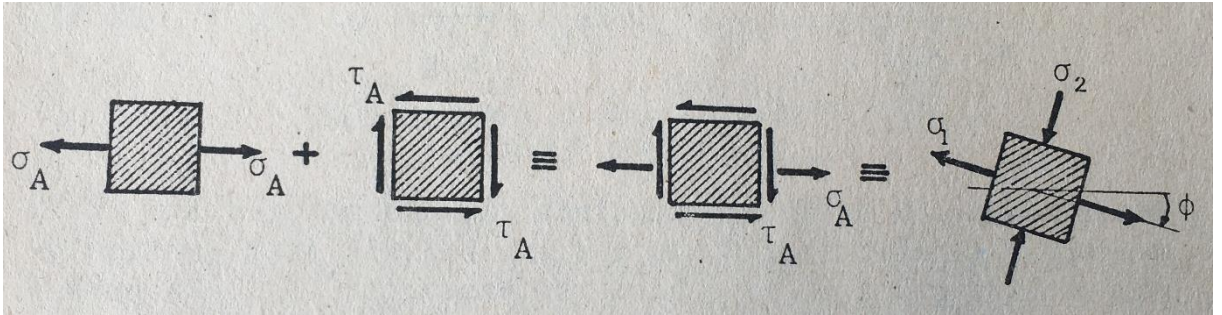
Fakat bazı özel yükleme halleri ve kesit şekilleri için kesit tayinini yukarıda açıklandığı şekilde yapmak yanlış olur. Bu durumda kesit tayini, bileşik tesire göre yapmak gerekir. Örneğin aşağıdaki şekilde görülen kesitin A noktasında hem normal gerilme, hem de kayma gerilmesi bulunmaktadır.



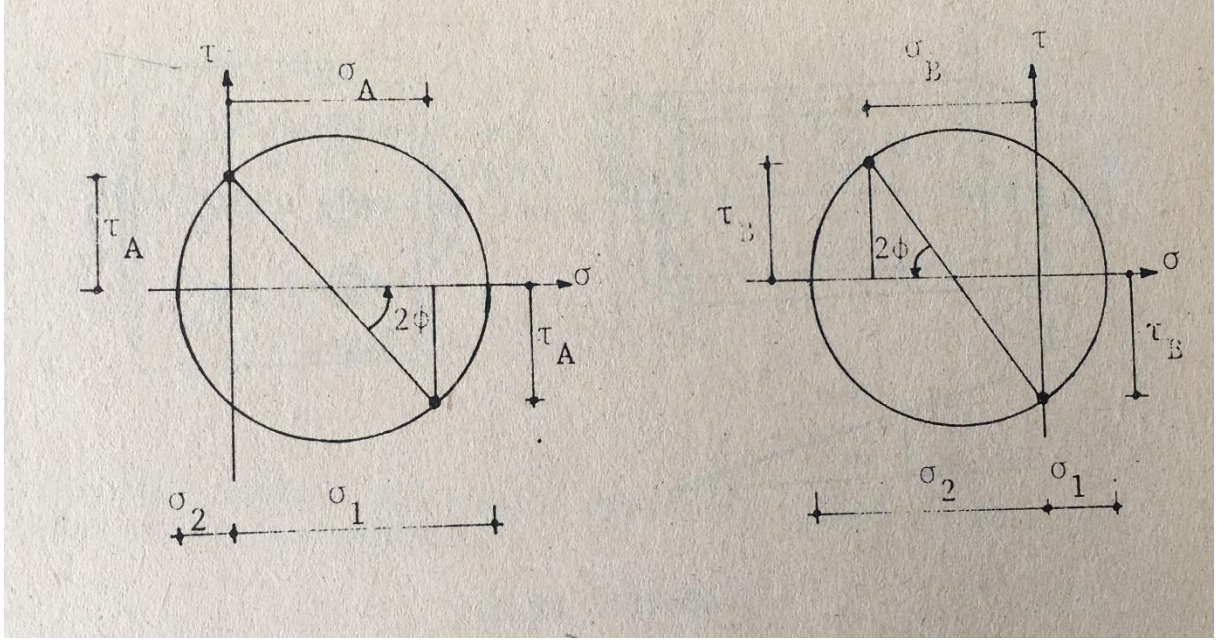
Örneğin; yukarıdaki şekilde görülen kesitin A noktasında hem normal gerilme, hem de kayma gerilmesi mevcuttur. A noktasındaki normal ve kayma gerilmeleri,

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} y \quad , \quad \tau_A = \frac{Q_y S_x}{I_x t_g}$$

değerindedir. O halde A noktasında iki eksenli gerilme hali mevcuttur.



Bu gerilme halinin asal gerilmelerinden biri çekme (σ_1), diğeri ise basınçtır (σ_2). Bu gerilme haline ait Mohr Çemberi aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Mohr Çemberinden,

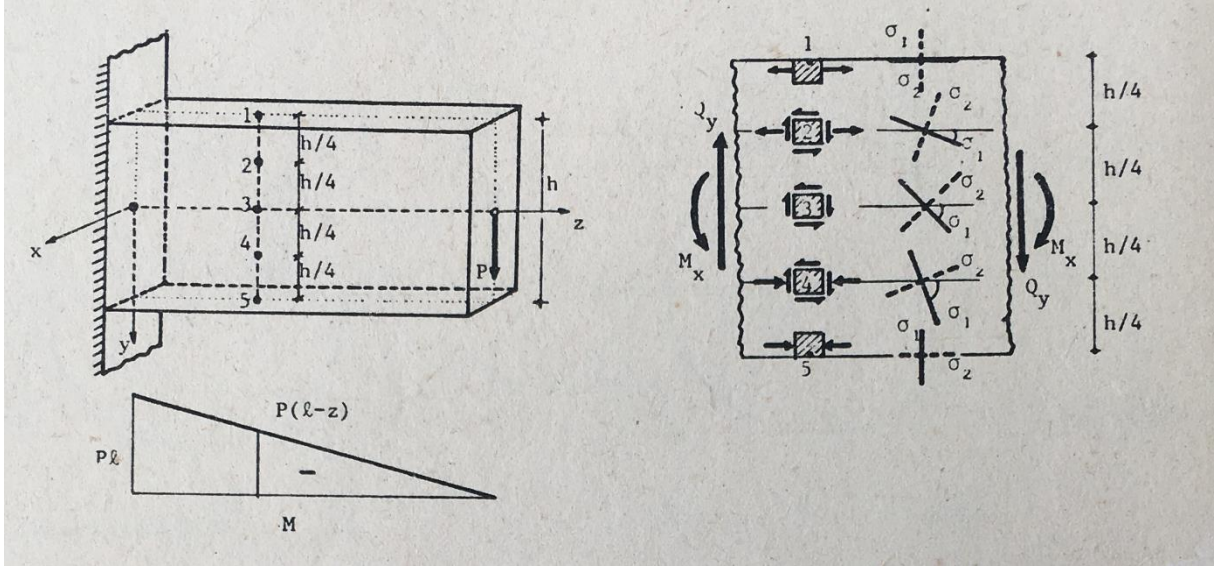
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{2}\right)^2 + \tau_A^2}$$

ve $\emptyset$ açısı için de,

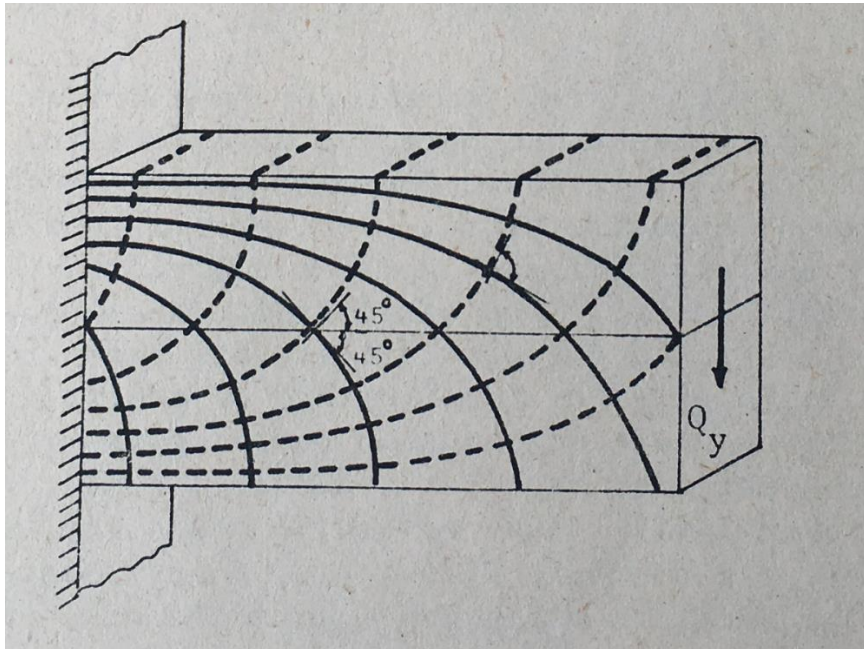
$$\tan 2\emptyset = \frac{2\tau_A}{\sigma_A}$$

elde edilir.

Kesmeli eğilmede asal normal gerilmelerin ve doğrultularının bulunması başka bir bakımdan da önemlidir. Örneğin aşağıdaki şekilde görülen kesit üzerinde 5 ayrı noktada σ ve τ gerilmelerini hesaplayıp, $\sigma_{1,2}$ asal gerilmelerini bulmuş olalım.

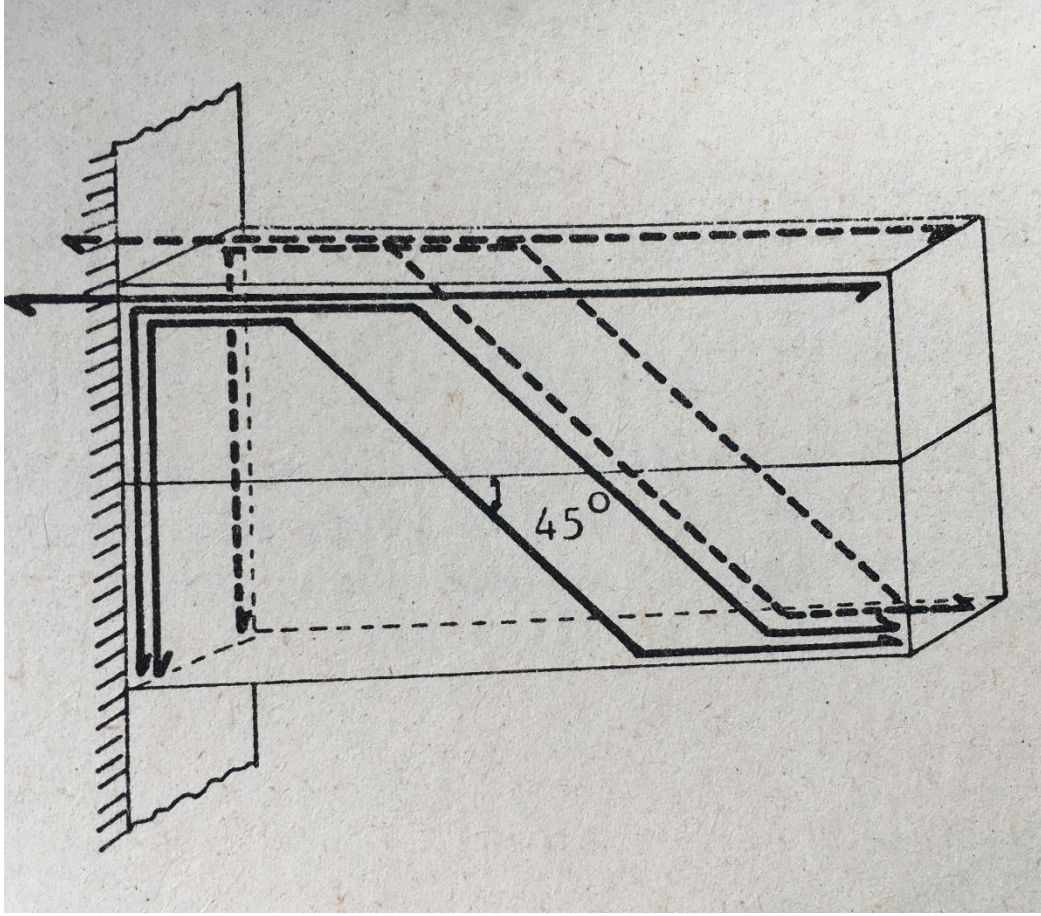


Bu noktalardaki asal gerilme doğrultuları gösterilmektedir. Koyu çizgiler σ_1 , kesik çizgilerde σ_2 asal gerilmelerin doğrultularıdır. Bir kesit için yapılan bu işlem, çubuğun diğer kesitlerinde de tekrarlanarak asal gerilme doğrultuları bulunduğundan sonra, çekme ve basınç doğrultularına müşterek teğetler çizilirse aşağıda görüldüğü gibi bir takım eğriler elde edilir. Bu eğrilere **Asal Gerilme Yörüngeleri** denir. Biri çekme, diğeri basınç halini gösteren bu eğriler, ortogonal (birbirine dik) bir aile teşkil ederler.



Eğer malzeme çekmeye dayanıksız ise (beton gibi), çekme yörüngeleri doğrultusunda çatlaklar meydana gelecektir. Çekme gerilmelerini almak için, bu

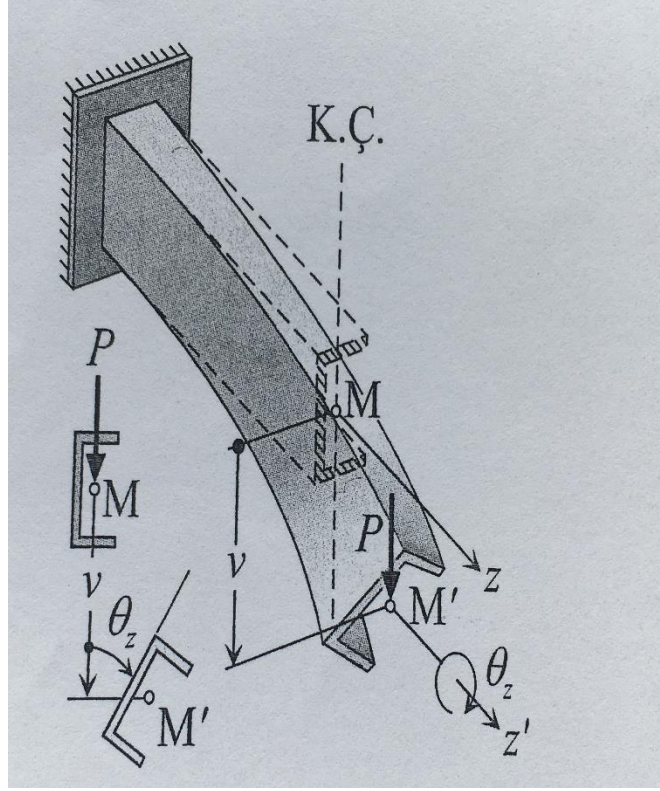
doğrultularda demir donatı konmalıdır (betonarme yapı). Fakat bu eğrilerin hesabı ve demirin bu eğrisel şekilde bükülmesi zor olduğundan, pratikte donatı aşağıdaki gibi yerleştirilir;



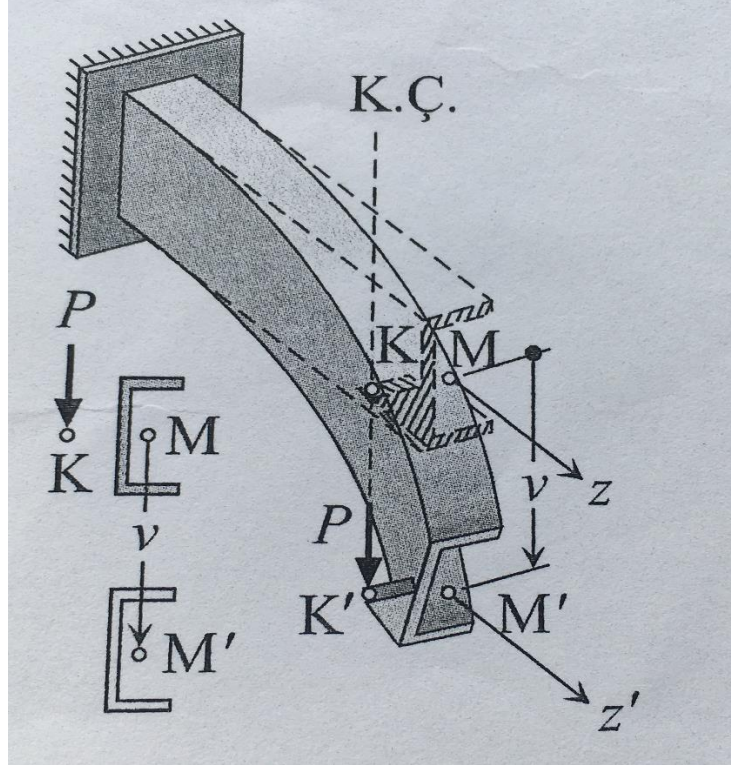
Simetrik Olmayan Kesitler ve Kayma Merkezi

Kesit, ağırlık merkezinden geçen kuvvetler çizgisine göre simetrik değilse çubukta eğilme ile burulma etkileri birlikte oluşur. Buna bir örnek olarak aşağıda verilen konsol kirişi inceleyelim. U kesit, x eksenine göre simetrik olup, kuvvetler çizgisi simetri eksenine diktir. Çubuğun serbest ucuna etkiyen P kuvveti eğer kesitin ağırlık merkezi M den geçerse, çubuk ucunda v kadar çökme ve θ_z kadar dönme ölçülür. Bunun yanında öyle bir K noktası bulunabilir ki, P yükü buradan etkirse çubukta hiçbir burulma olmaz ve serbest uçta sadece v kadar çökme ölçülür. **Kayma Merkezi** olarak adlandırılan bu nokta kesit geometrisine bağlı olarak kesit alanı içinde de, dışında da olabilir.

Burulmalı Eğilme: Şekilde görüldüğü gibi kuvvetler çizgisi kayma merkezinden geçmiyorsa, kesit tesirleri kesme kuvveti, eğilme momenti ve burulma momentidir.



Burulmasız Eğilme: Eğer kuvvetler çizgisi şekilde görüldüğü gibi kayma merkezinden geçiyorsa, kesit tesirleri kesme kuvveti ve eğilme momenti olur.

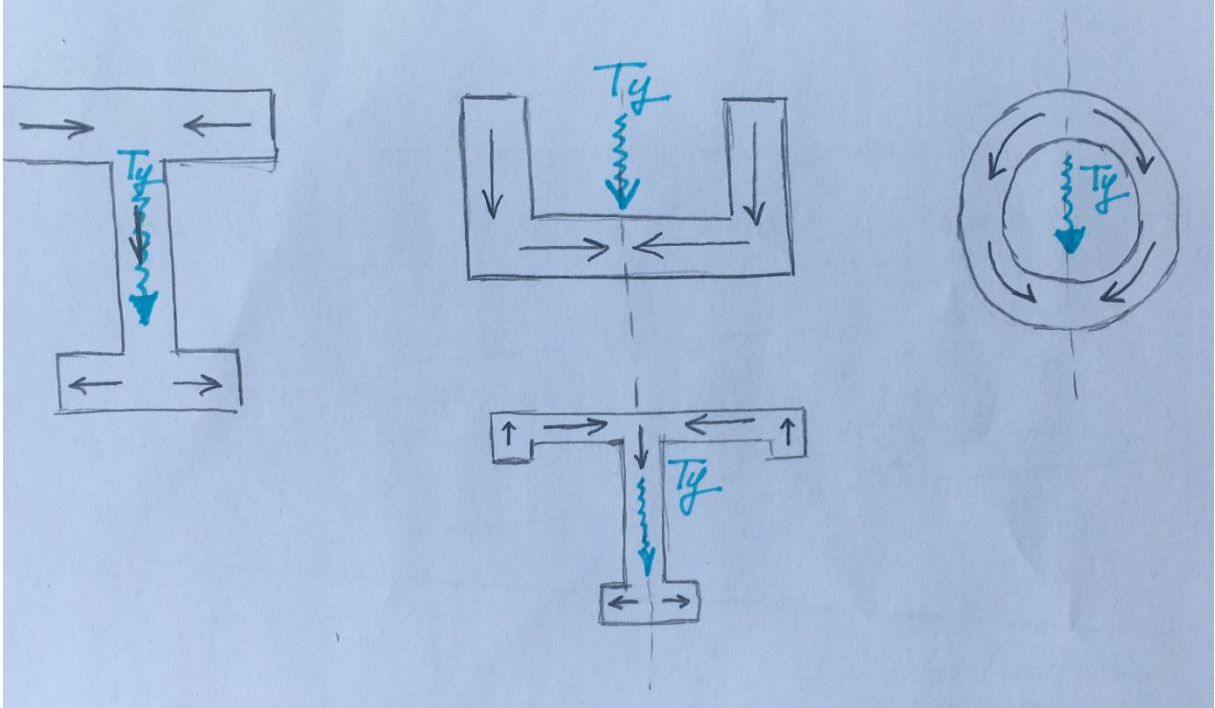


Örnek:

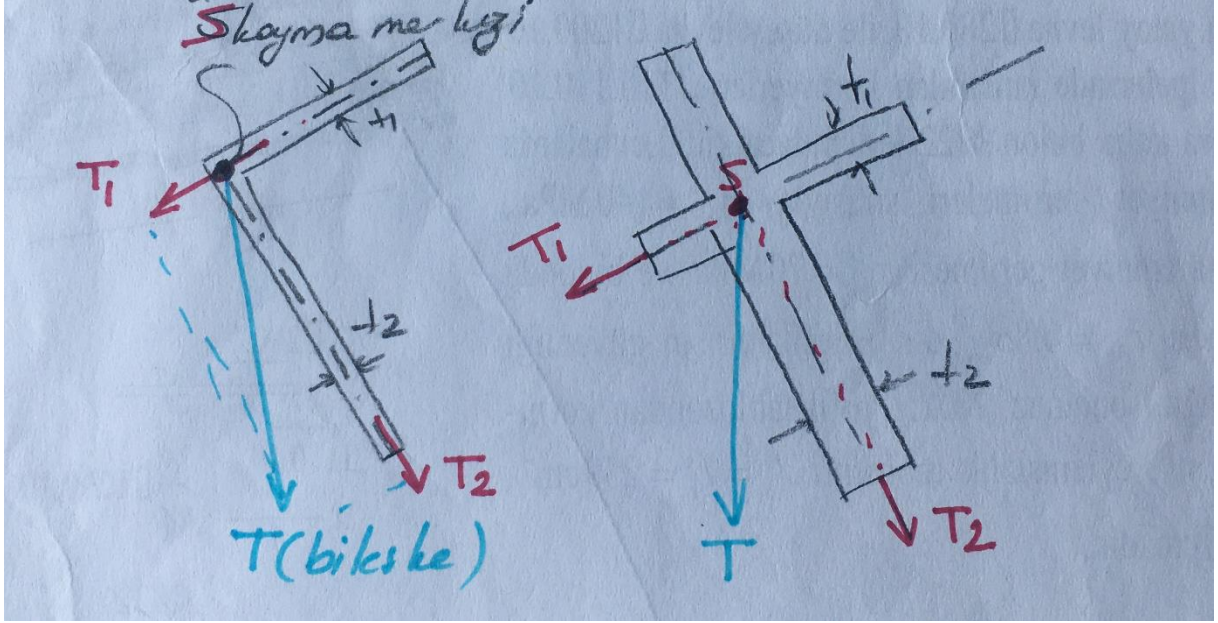
Bir U profilinde kayma merkezi örneğine geçmeden önce gerekli tanımlamaları yapmakta fayda olacaktır;

Kayma Akımı; Kayma gerilmelerinin profil eksenine paralel bileşenleri olarak düşünö bilir.

Kayma akımları bir su akıntısı gibi profil kollarından toplanarak gelen ve sonra kollardan dağılarak çıkan akımlara benzemektedir. Kesme kuvvetinin (T_y)' nin yönü değışir ise akımın yönü de değışir. Akım (T_y) yönünde olmalıdır.

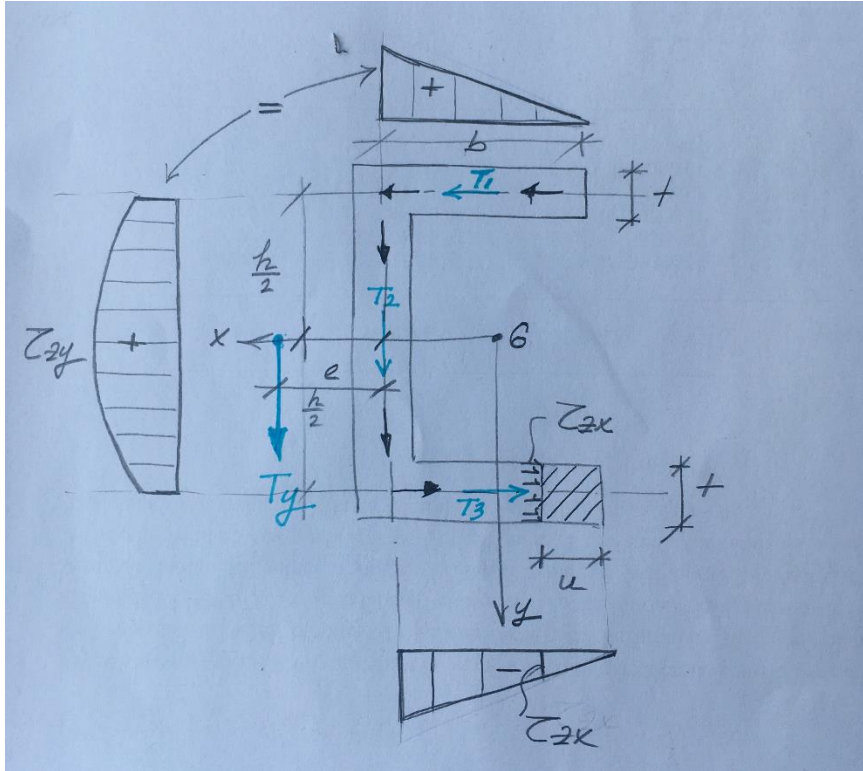


Kayma merkezinin saptanması bazı kesitlerde çok kolaydır. Örneğin aşağıda göröldüğü gibi iki ince dikdörtgen koldan oluşmuş profile kesitlerde kayma merkezi kolların eksenlerinin kesiştiği noktalardır, çünkü kollarda kayma gerilmelerinin parsiyel bileşkeleri olan T_1 ve T_2 kuvvetleri ilgili kolların ekseninden geçer. O halde S Kayma Merkezi bu eksenlerin ara kesitidir.



Yalnız kol sayısı ikiden fazla olur veya profil eksen eğri olursa Kayma Merkezini tayin etmek için kayma gerilmesinin yayılışını mutlaka hesaplamak gerekir.

T_y kesme kuvveti; burulmasız eğilmenin meydana gelebilmesi için öyle bir S noktasından etmektedir ki amacımız bu S noktasının yerini bulmaktır.



$$\tau_{zx} = \frac{T_y S_x(\text{başlık})}{I_x t} = \frac{T_y \cdot u \cdot t \cdot (h/2)}{I_x t} = \frac{T_y \cdot h}{2I_x} u$$

Bütün başlıktaki kayma kuvveti;

$$T_3 = \int_0^b \tau_{zx} t \, du = \frac{T_y \cdot h \cdot t}{2I_x} \int_0^b u \, du = \frac{T_y \cdot h \cdot t \cdot b^2}{4I_x}$$

Üst koldaki T_1 değeri ile düşey koldaki T_2 kayma kuvvetleri denge şartından ötürü;

(T_1, T_2, T_3) Kollardaki Kayma gerilmelerinin parsiyel (parça) bileşenleridir

$$T_1 = T_3 \quad \text{ve} \quad T_2 \equiv T_y$$

T_2, T_1 ve T_3 kuvvetlerinin bileşkesinin geçtiği ‘S’ noktasını bulalım;

‘S’ e göre moment alalım,

$$T_2 e - T_1 h = 0 \quad \text{veya} \quad e = \frac{T_1}{T_2} h$$

T_1 ve T_2 değerleri yerlerine konarak

$$e = \frac{h^2 b^2 t}{4I_x}$$

e kesidin geometrisine bağlı bir büyüklüktür.