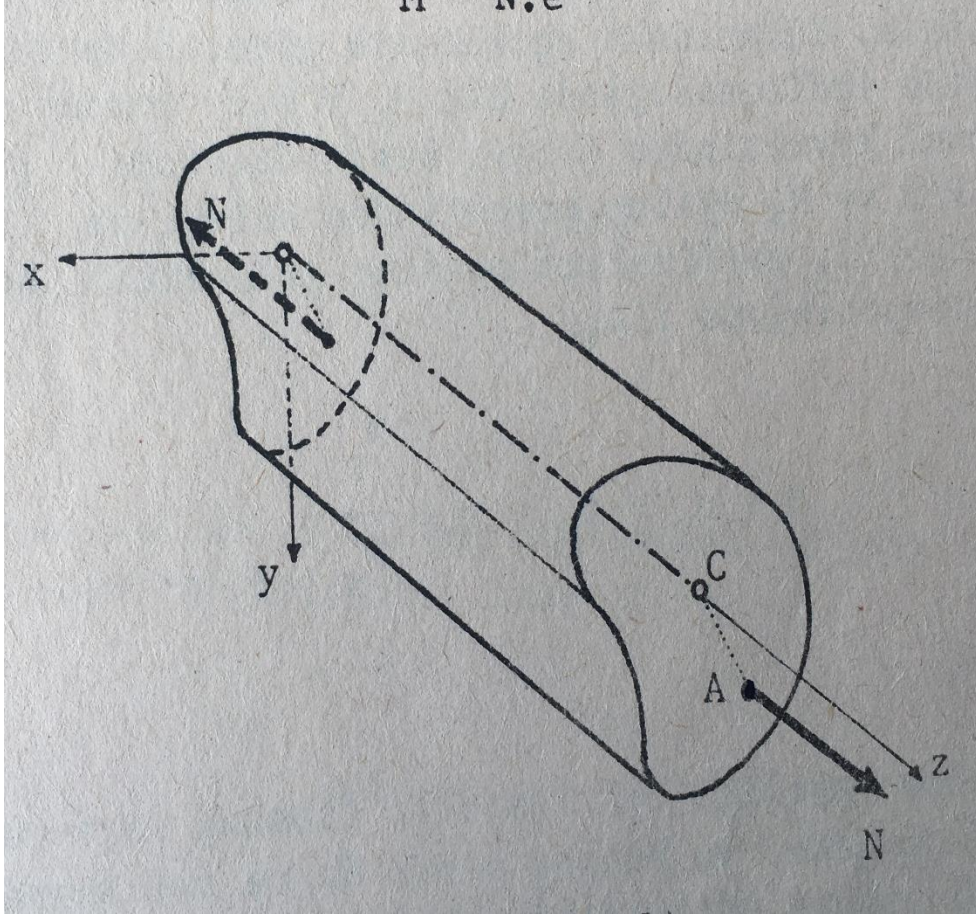


BİLEŞİK MUKAVEMET HALLERİ

NORMAL KUVVET VE EĞİLME



Şekilde görülen çubuk kesitinin A noktasında, kesite dik olarak bir N kuvveti etki etsin. Kuvvetin, ağırlık merkezinin dışında bulunduğu bu hale *Ekzantrik Normal Kuvvet* adı verilir.

A da etkiyen normal kuvvet, C ağırlık merkezine indirgendiğinde, N kuvveti ile bir M momenti elde edilir. Bu moment,

$$M = N \cdot \overline{AC}$$

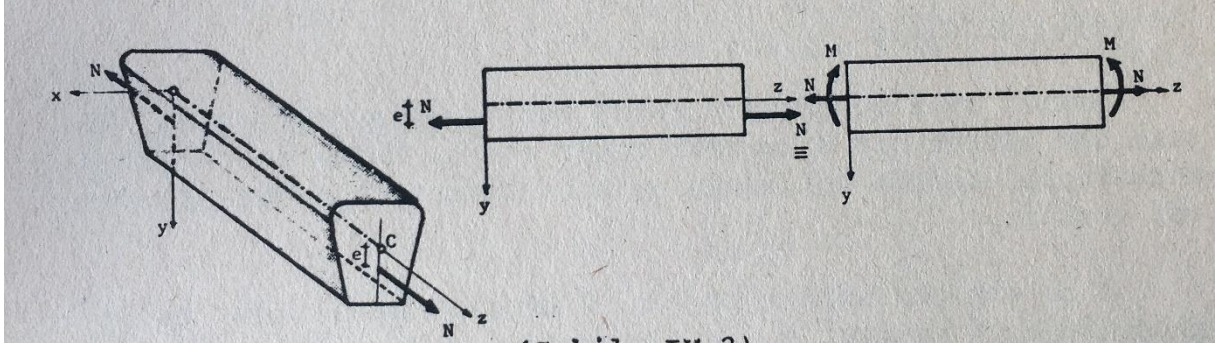
değerindedir. $\overline{AC}$ mesafesi “e” ile gösterilir ve buna ekzantrisite denir. Dolayısıyla,

$$M = Ne$$

olur. Görüldüğü gibi ekzantrik normal kuvvet hali, normal kuvvet ve eğilme haline idantiktir (Her türlü nitelik bakımından oluşan bir eşitlik).

$$e = \frac{M}{N}$$

olur.



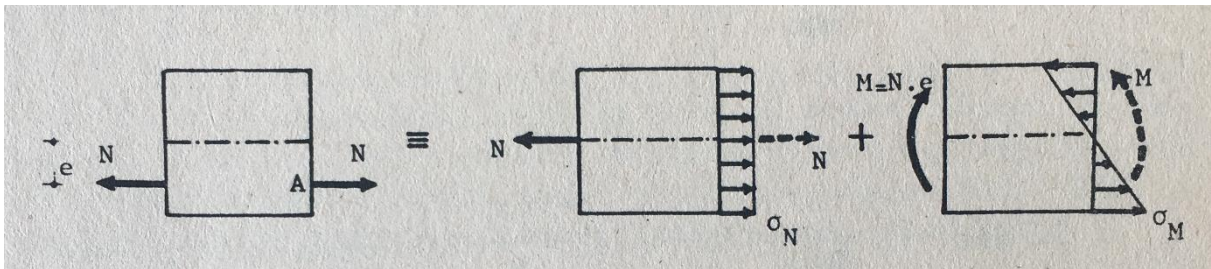
Normal kuvvet ve eğilme halinde, çubuk kesitlerinde ortaya çıkacak gerilmeler, her iki hal tek tek dikkate alınarak elde edilecek gerilmelerin süperpozisyonuna (toplamına) eşittir.

Simetrik Kesitler

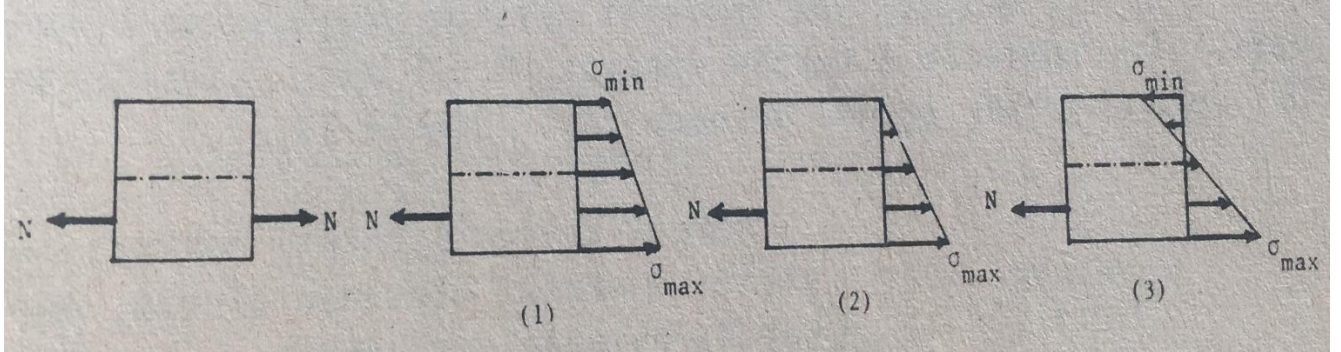
Şekilde görülen dikdörtgen kesitli çubuğun, y simetri eksenini üzerinde bulunan bir A noktasına N normal kuvveti tesir etsin. Yukarıdaki açıklamaya göre, N kuvveti ağırlık merkezine indirgendiğinde bir $M_x = Ne$ momenti doğacaktır. N normal kuvvetinden dolayı kesit üzerinde $\sigma_N = N/F$ ve M_x eğilme momentinden dolayı da $\sigma_M = M_x y / I_x$ gerilmeleri meydana gelecektir. Bu gerilmelerin süperpozisyonu ile,

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} y$$

elde edilir.



σ_N gerilme yayılımı tek işaretli (basınç veya çekme) olduğu halde, σ_M çekme ve basınç olmak üzere iki işaretlidir. σ_N ile σ_M süperpoze edildiğinde aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere üç hal söz konusudur;



Kesit kenarlarında meydana gelecek maksimum ve minimum gerilmeler için,

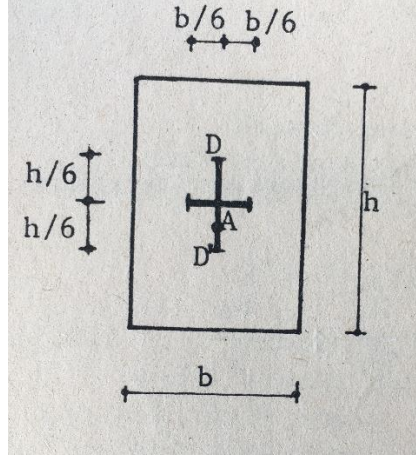
$$\sigma_{max} = \frac{N}{F} + \frac{M_x h}{I_x 2} = \frac{N}{bh} + \frac{6N_e}{bh^2} = \frac{N}{bh} \left(1 + \frac{6e}{h} \right)$$

$$\sigma_{min} = \frac{N}{F} - \frac{M_x h}{I_x 2} = \frac{N}{bh} - \frac{6N_e}{bh^2} = \frac{N}{bh} \left(1 - \frac{6e}{h} \right)$$

İfadeleri yazılabilir. Yukarıdaki üç durum, σ_{min} gerilmesinin işaretine bağlıdır. Buna göre;

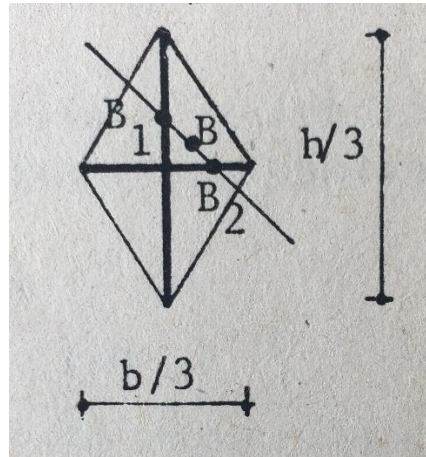
1. Durum: $\sigma_{min} > 0 \rightarrow 1 - \frac{6e}{h} > 0$ veya $e < \frac{h}{6}$
2. Durum: $\sigma_{min} = 0 \rightarrow 1 - \frac{6e}{h} = 0$ veya $e = \frac{h}{6}$
3. Durum: $\sigma_{min} < 0 \rightarrow 1 - \frac{6e}{h} < 0$ veya $e > \frac{h}{6}$

O halde, kesitte tek işaretli gerilme yayılımının bulunması için, kuvvetin A uygulama noktası, $\pm h/6$ ile sınırlanan $\overline{DD'}$ doğru içinde bulunmalıdır.



Normal kuvvetin tatbik noktası y yerine x eksenini üzerinde olursa, yukarıda bulunanlara benzer sonuçlar elde edilir. Dolayısı ile kuvvet, eksenlere göre simetrik olan hac üzerinde oldukça, kesitte tek işaretli gerilme yayılımı bulunacaktır.

Normal kuvvetin uygulama noktasının her iki simetri eksenini üzerinde olmaması hali de ayrıca incelenmelidir.

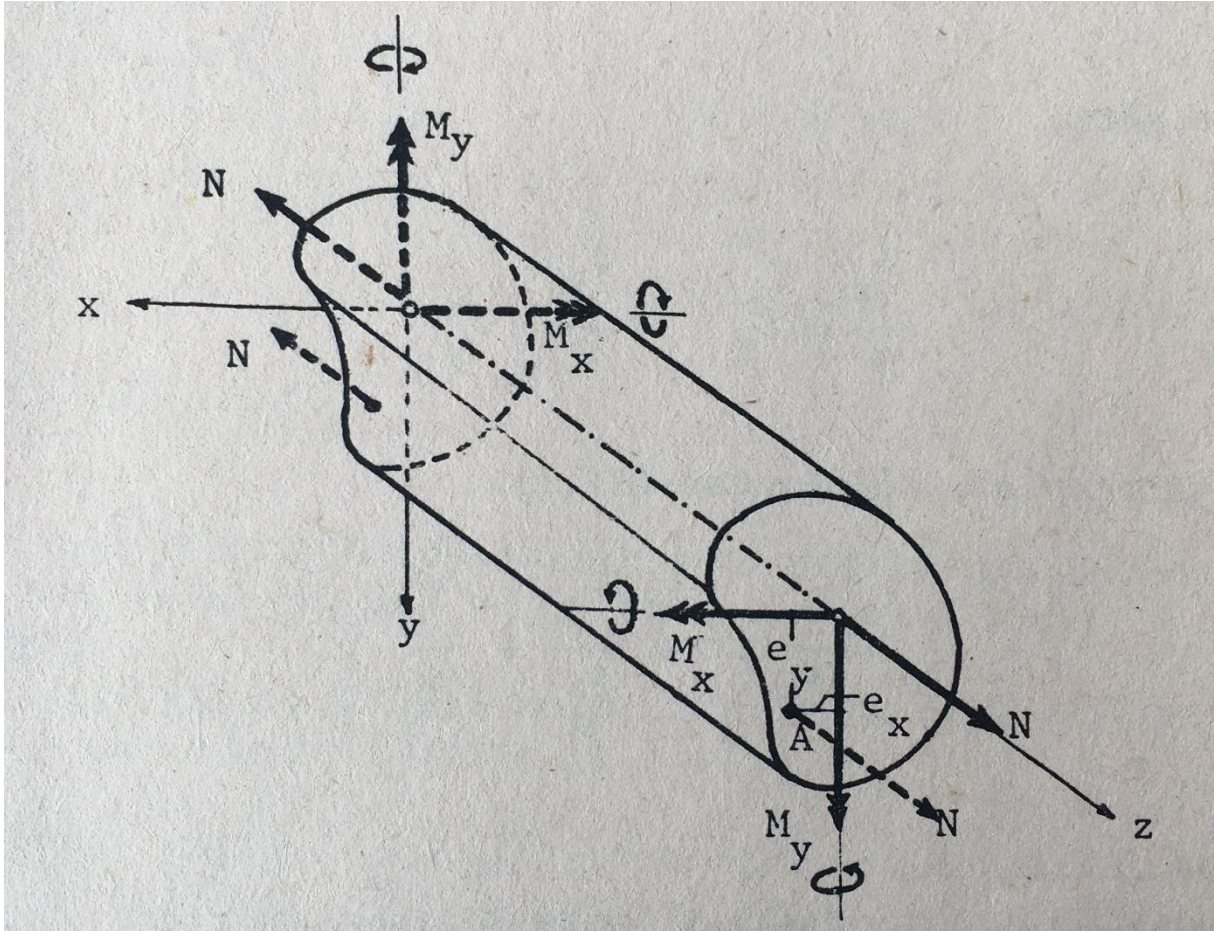


Şekilden görüldüğü üzere B'den geçen ve haçı B_1 ve B_2 noktalarında kesen keyfi bir doğru ele alalım. B de tesir eden N kuvveti yerine onun, B_1 ve B_2 noktalarındaki bileşenleri alınabilir. Her iki halde de kesitte gerilme yayılımı tek işaretli olacağından, bunların süperpozisyonu ile bulunacak gerilme de tek işaretli olur.

B noktası, haçın uçlarını birleştirmek suretiyle elde edilen eşkenar dörtgen içinde kaldığı sürece gerilme, tek işaretli olacaktır. Bu eşkenar dörtgene *Kesit Çekirdeği* adı verilir. Kuvvet, çekirdeğin kenarları üzerinde etki ederse, bazı noktalarda gerilme sıfır olur. Çekirdek dışında tesir eden kuvvet halinde ise, çift işaretli gerilme yayılımı elde edilir.

Simetrik Olmayan Kesitler

Kesiti simetrik olmayan bir çubuk ele alalım. x, y eksenleri, kesitin asal eksenleri olsun. Bu kesitin $A(e_x, e_y)$ gibi pozitif bölgede alınan herhangi bir noktasına N normal kuvveti tesir ettiğinde, diğer bir $B(x, y)$ noktasındaki normal gerilmeyi hesap etmek isteyelim.



A noktasındaki kuvvet, kesitin C ağırlık merkezine indirgenirse, normal kuvvete ek olarak x ve y doğrultularında;

$$M_x = Ne_y$$

$$M_y = -Ne_x$$

Eğilme momentleri elde edilir. N , çekme kuvveti olduğundan M_y moment vektörü $-y$ yönünde olup, işareti negatif alınmıştır.

Bu şekilde elde edilen statik tesirlerden doğan normal gerilmeler süperpoze edilirse, kesitteki normal gerilme yayılımı bulunmuş olur;

$$\sigma_{z,N} = \frac{N}{F} \quad + \quad \sigma_{z,M} = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

$$I_{xy} \neq 0 \rightarrow \sigma_{z,M} = \frac{M_x I_y + M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} y - \frac{M_x I_{xy} + M_y I_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} x$$

$$\sigma_z = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = \frac{N}{F} + \frac{N e_y}{I_x} y + \frac{N e_x}{I_y} x$$

$$\sigma_z = \frac{N}{F} \left(1 + \frac{y \cdot e_y}{I_x/F} + \frac{x \cdot e_x}{I_y/F} \right)$$

Bu denklemlerde,

$$\frac{I_x}{F} = i_x^2 \quad \frac{I_y}{F} = i_y^2$$

Atalet yarıçapları olduğundan,

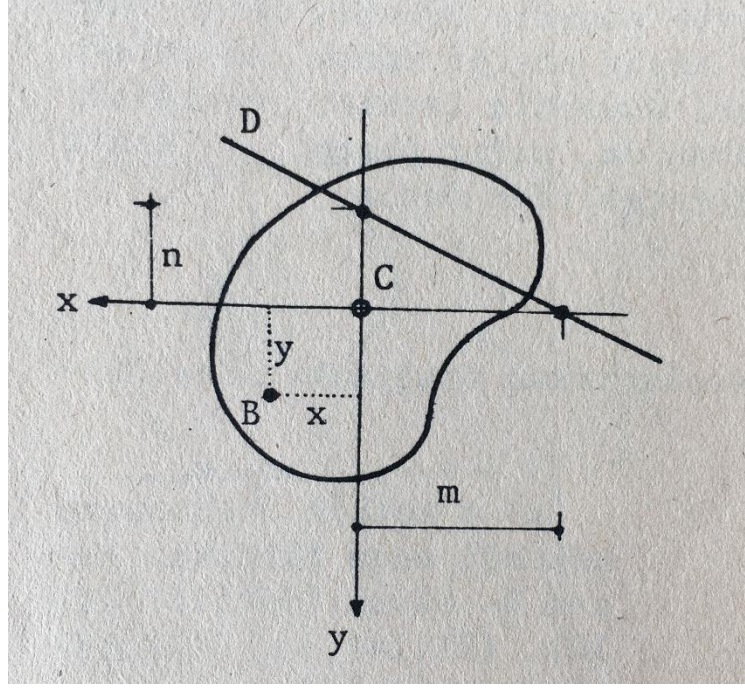
$$\sigma_z = \frac{N}{F} \left(1 + \frac{y \cdot e_y}{i_x^2} + \frac{x \cdot e_x}{i_y^2} \right)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece kesitin herhangi bir B(x, y) noktasındaki normal gerilme bulunmuş olur.

Kesitte gerilmenin sıfır olduğu noktaların geometrik yeri bulunmak istenirse, $\sigma_z = 0$ yazılmalıdır. Bu şekilde,

$$1 + \frac{y \cdot e_y}{i_x^2} + \frac{x \cdot e_x}{i_y^2} = 0$$

gibi bir doğru denklemi elde edilir. Bu doğruya **Sıfır Eksen** veya **Tarafsız Eksen** adı verilir (D Doğrusu).



D sıfır ekseninin x, y eksenlerini kestiği noktalarda şu şekilde bulunabilir (K ve L noktaları):

$$y = 0 \quad \text{için} \quad x = m$$

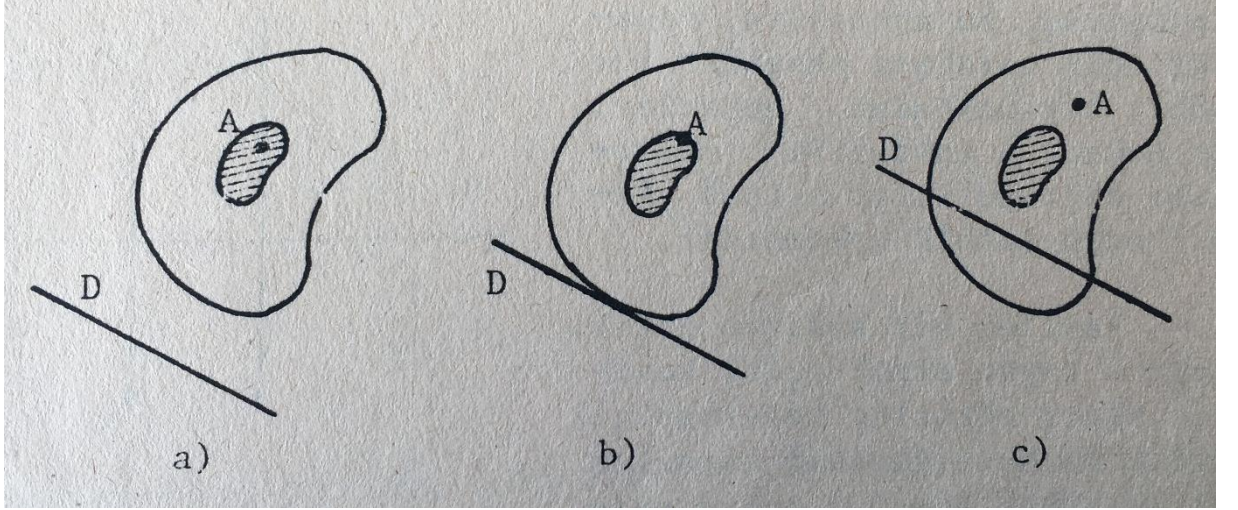
$$1 + \frac{m \cdot e_x}{i_y^2} = 0 \quad \rightarrow \quad m = -\frac{i_y^2}{e_x}$$

$$x = 0 \quad \text{için} \quad y = n$$

$$1 + \frac{n \cdot e_y}{i_x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad n = -\frac{i_x^2}{e_y}$$

Kuvvetin A uygulama noktasının yeri değiştikçe, sıfır ekseninin konumu da değişir ve üç durum söz konusudur:

- Sıfır eksen kesiti kesmez. Bu durumda, kesitteki gerilme tek işaretlidir.
- Sıfır eksen, kesitin çevre eğrisine teğettir. Kesitte yine tek işaretli gerilme vardır, ancak $\sigma_{min} = 0$ 'dır.
- Sıfır eksen kesiti keser. Bu durumda ise, kesitte çift işaretli gerilme yayılımı mevcuttur.

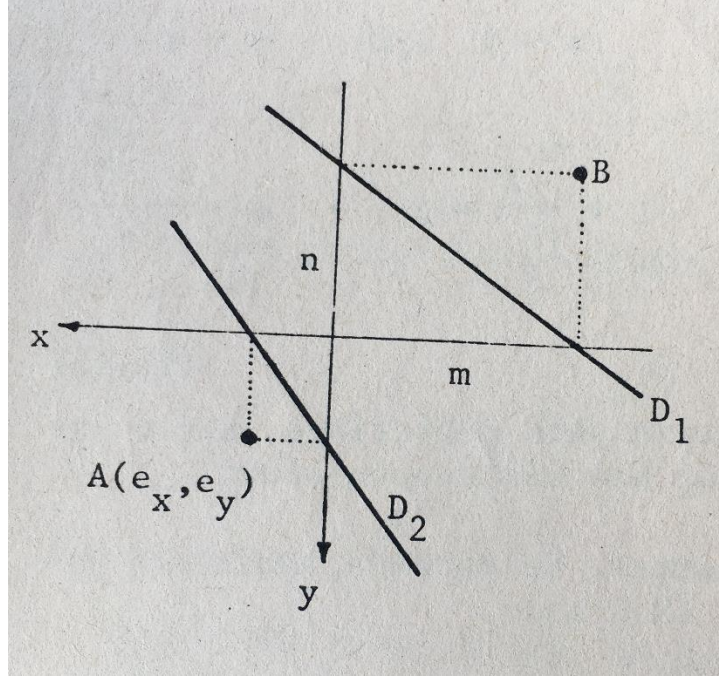


Kesit içerisinde s eğrisi ile sınırlı öyle bir bölge vardır ki, kuvvet bu bölge içinde etki ettiği zaman kesitteki gerilmeler tek işaretli olurlar. Kuvvetin uygulama noktaları s eğrisi üzerinde bulunduğu zaman da, sıfır eksenini kesit çevresine teğet olur. Bu bölgeye **Çekirdek** denir.

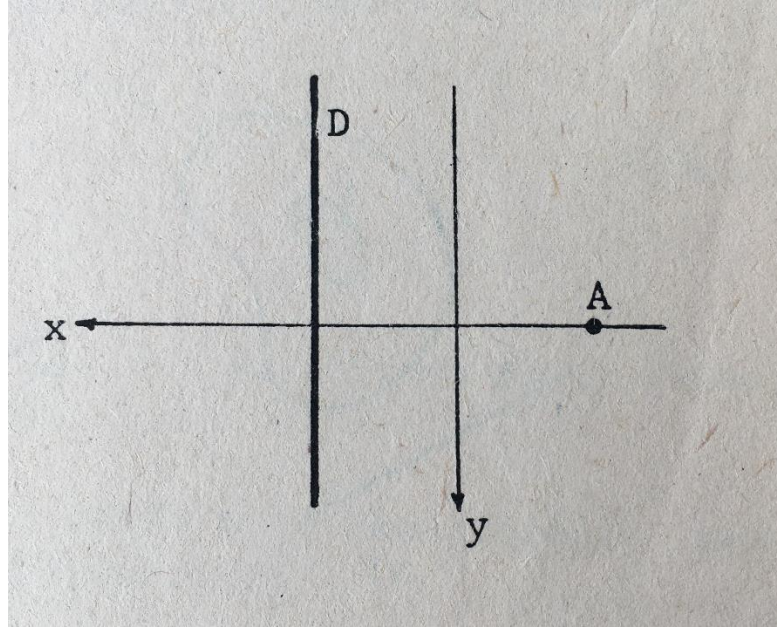
Çekirdek Hesabı

Bir kesitin çekirdeği hesaplanırken aşağıdaki özellikler dikkate alınmalıdır:

- A uygulama noktasına karşılık gelen tarafsız eksen D_1 olsun, yukardaki bağıntılar göz önüne alınarak, e_x ve e_y değerleri m ve n değerleri ile yer değiştirdiğinde B uygulama noktasına karşılık gelen tarafsız eksen de D_2 olur.



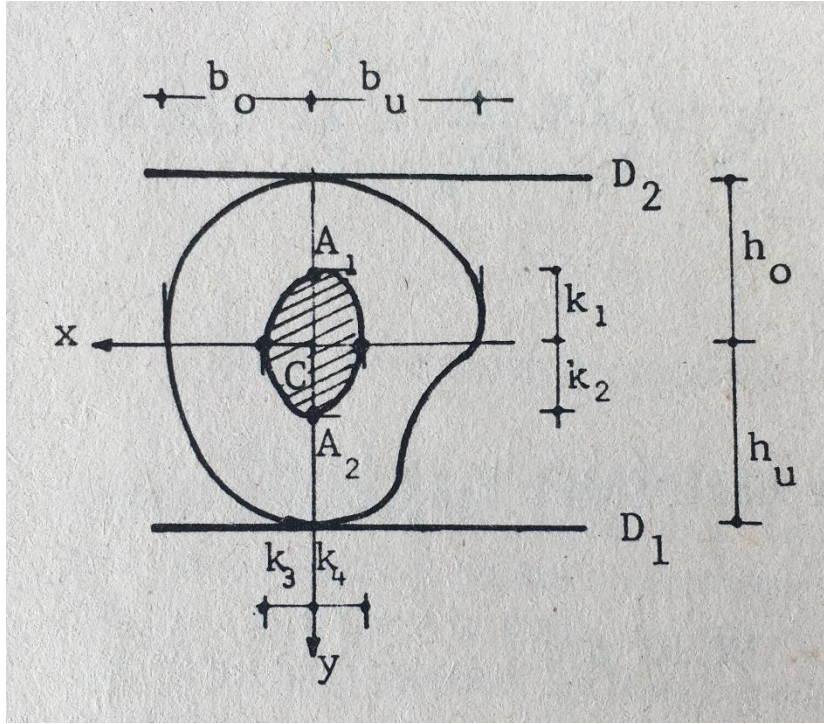
- b. A uygulama nokta asal eksenlerden biri üzerinde bulunursa, buna karşılık gelen D tarafsız eksenini, diğer asal eksene paralel olur



- c. Kuvvetin A uygulama noktası sabit bir doğru üzerinde dolaşırsa, bu noktalara karşılık gelen tarafsız eksenler de sabit bir noktadan geçerler. Bu nokta, A noktasının dolaştığı doğruyu sıfır eksenini kabul eden uygulama noktasıdır.

Verilen bir kesitin çekirdeğini oluşturmak için, kesitin sınır eğrisine teğetler çizilir ve bu teğetleri tarafsız eksen kabul eden noktaların geometrik yeri aranır.

Şekilde görülen A_1 noktasına basınç yükü etkililsin;



$$e_x = 0 \rightarrow e_y = -k_1$$

ve A_1 ' e karşılık gelen D_1 sıfır eksen, kesit çevresine teğet olacağından,

$$y = h_u$$

değerleri, normal gerilme bağıntısında yerlerine konulacak olursa;

$$\sigma_z = \frac{-N}{F} + \frac{Nk_1}{I_x} h_u = 0 \rightarrow k_1 = \frac{I_x}{Fh_u}$$

elde edilir. Benzer tarzda, A_2 uygulama noktası için,

$$e_x = 0 \rightarrow e_y = k_2 \quad y = -h_o$$

$$\sigma_z = \frac{-N}{F} + \frac{-Nk_2}{I_x} h_o = 0 \rightarrow k_2 = \frac{I_x}{Fh_o}$$

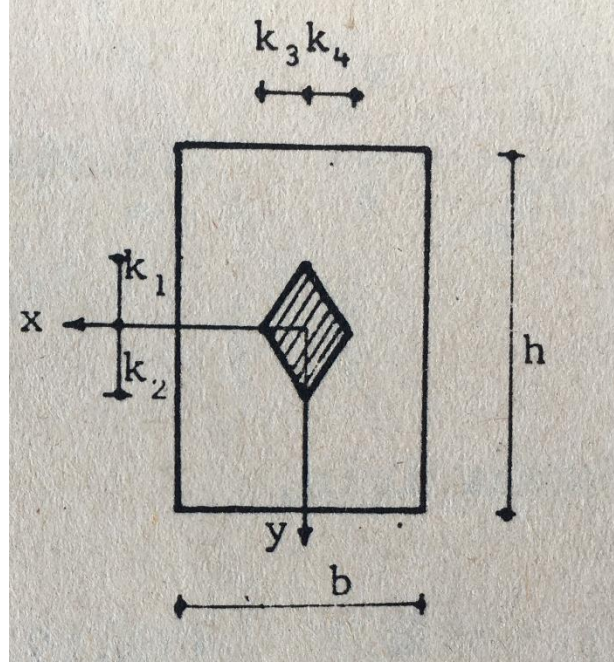
bulunur. Aynı şekilde, çekirdek eğrisinin x eksenini kestiği noktaları belirleyen k_3 ve k_4 mesafeleri için de,

$$k_3 = \frac{I_y}{Fb_u} \quad , \quad k_4 = \frac{I_y}{Fb_o}$$

yazılabilir.

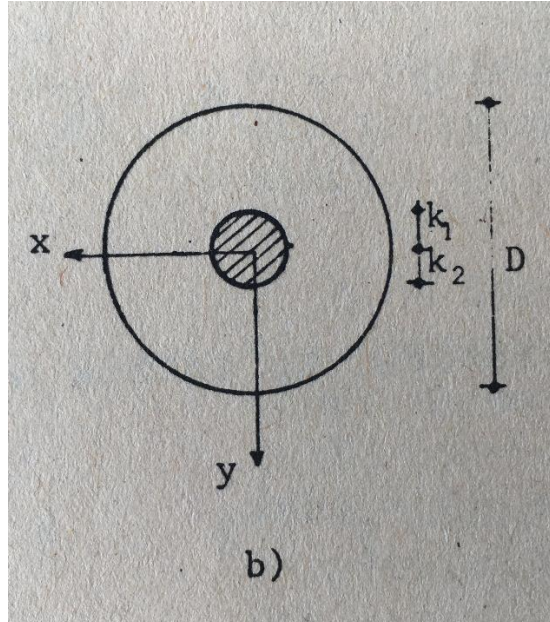
Bazı kesitler için çekirdek mesafeleri aşağıda verilmiştir;

a. Dikdörtgen Kesit



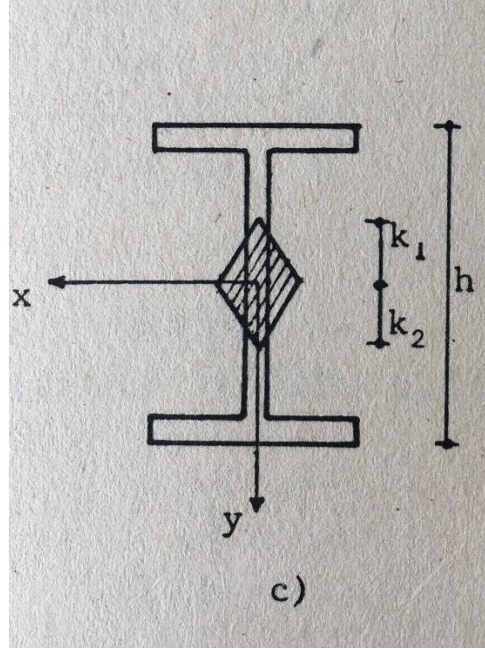
$$k_1 = k_2 = \frac{bh^2/6}{bh} = \frac{h}{6} \quad k_3 = k_4 = \frac{hb^2/6}{bh} = \frac{b}{6}$$

b. Daire Kesit



$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = \frac{\pi R^3/4}{\pi R^2} = \frac{R}{4}$$

c. I Profili



Dikdörtgen gibi hesaplanabilir,

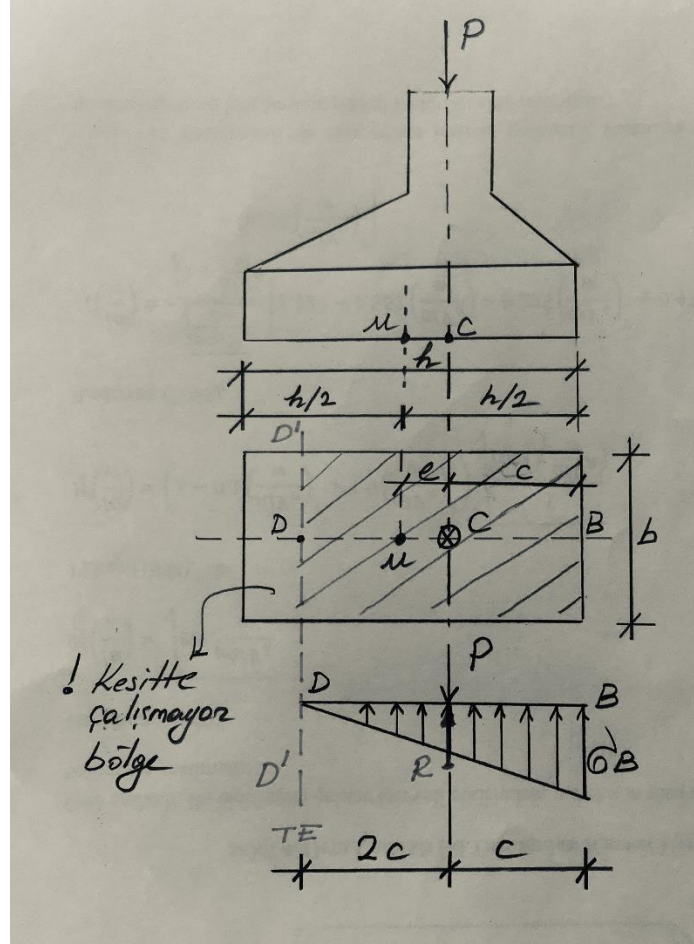
$$k_1 = k_2 = \frac{W_x}{F} \quad k_3 = k_4 = \frac{W_y}{F}$$

Çekmeye Dayanıksız Malzeme

Yukarıdaki açıklamalara göre, kuvvet çekirdek dışında etki ediyorsa kesitte iki işaretli gerilme meydana gelir. Şayet malzemenin çekme mukavemeti, sıfır alınacak kadar küçük ise, gerilme hesabı için, çekme gerilmelerini dikkate almayan yeni bir metot geliştirmek gerekir. Bunun için şu kabul yapılır;

- Kesitte basınç gerilmeleri, kesitin basınca çalışan bölgesiyle çalışmayan bölgesini birbirinden ayıran D' doğrusundan olan uzaklıkla orantılı olarak artar.

Bu kabule göre çizilen gerilme prizmasının bileşkesinin doğrultusunu, P kuvvetinin doğrultusuyla çakıştığı zaman denge mevcut olur. Aşağıda verilen şekilde taralı olan alanın basınç bölgesi olduğu düşünülerek σ_B basınç gerilmesi değerini belirleyelim;



$$\overline{CB} = c \rightarrow \overline{DB} = 3c$$

$$\sum y = 0 \rightarrow P = R \text{ (Bileşke Kuvvet)}$$

Basınç gerilmesinin hacmine eşit bileşke tepki kuvveti;

$$R = -\frac{1}{2} (3 \cdot c \cdot b) \sigma_B = P$$

$$\sigma_B = -\frac{2P}{3 \cdot b \cdot c}$$

$$c = \frac{1}{2}h - e$$

$$\sigma_B = -\frac{4P}{3bh \left(1 - \frac{2e}{h}\right)}$$

$e \geq \frac{h}{6}$ değeri gerilme değeriinde kullanılmaktadır.