

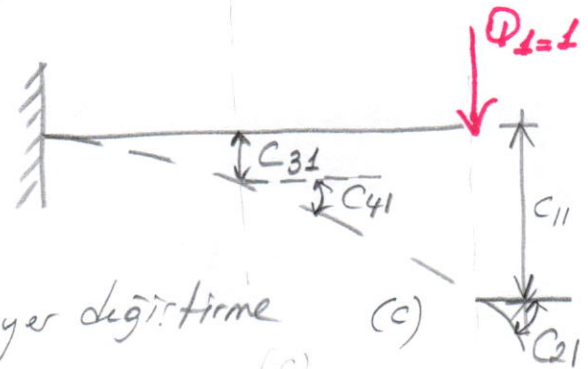
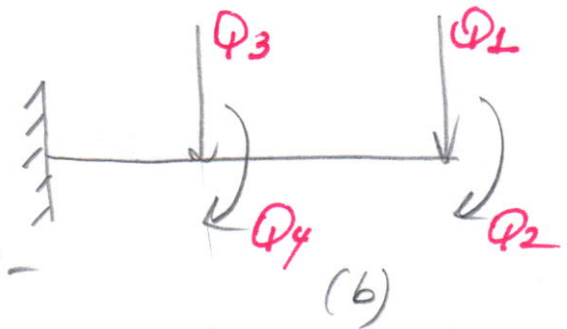
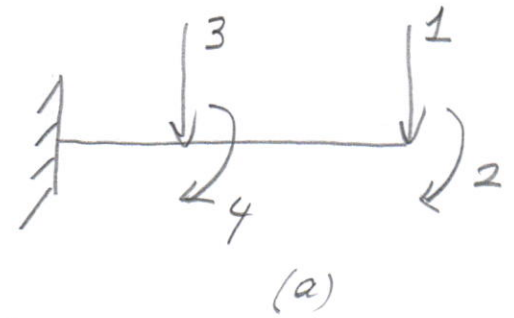
TESİR KATSAYILARI (Yöntem)

Tesir katsayıları elastik sistemin belli bir noktasına etkileyen birim siddetli bir dış etkinin, sistemin diğer noktalarında yapacağı ötelenme ya da dönme hesabında kullanılacağı gibi, bu noktanın birim siddetli bir ötelenme ya da dönme yapması durumunda diğer noktalarda oluşacak kesit tesirlerinin hesabında da kullanılır. Yöntem süperpozisyon ilkesinden yararlandığı için doğrusal elastik sistemlere uygulanabilir.

esneklik tesir katsayıları;

Şekil "a" da gösterilmiştir iki öteleme, iki dönme doğrultularından etkileyecek genel birim kuvvetler (Q_1 ve Q_3) ve gerilleştirilmiş birim momentler (Q_2 ve Q_4) olsun (Şekil b).

Şimdi çubuğa (Şekil c) 'deki gibi $Q_1 = 1$ birimlik ($Q_2 = Q_3 = Q_4$) yük etkilelim, bu durumda "1, 2, 3 ve 4" doğrultularında ortaya çıkan yer değiştirmeler ve dönmeler aşağıdaki gibi ifade edilir;



$C_{11} = Q_1$	ile aynı doğrultudaki	yer değiştirme	(c)
$C_{21} = Q_2$	" " "	dönme açısı	
$C_{31} = Q_3$	" " "	yer değiştirme	
$C_{41} = Q_4$	" " "	dönme açısı	

Burada birinci alt indis yer değıştirmenin ölçüldüğü yer (noktası) ikinci alt indis birim yüklemenin doğrultusunu göstermektedir. Bu durumda;

$Q_2 = 1$ birim momentinin ($Q_1 = Q_3 = Q_4 = 0$) sebep olduğu yer değıştirme ve dönme eksi değerleri;

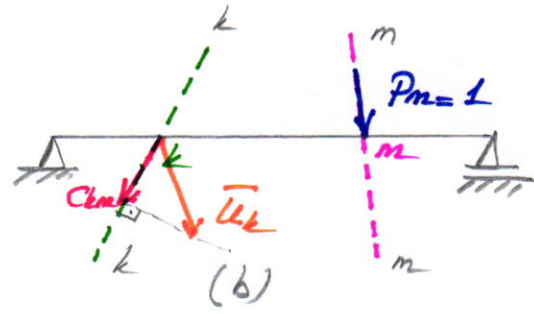
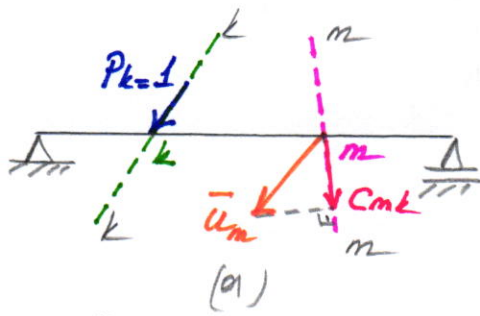
C_{12} , C_{22} , C_{32} ve C_{42} olur.

Aynı şekilde $Q_3 = 1$ ve $Q_4 = 1$ yüklemeleri ile de " C_{ij} " ifadeleri elde edilir.

Eğer genelleştirilmiş doğrultu sayısı "4" değil de "n" olursa, a zaman $n \times n$ adet "c" katsayıları elde edilir ve bunlar toplu olarak matris şeklinde gösterilirse;

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Bu matrise "esneklik tesir katsayıları" deriz. Şimdi bu " c_{ij} " leri (yani yer değıştirme ve dönme değerleri) virtüel ır denklemleri ile hesaplayalım.



"k" ve "m" noktaları ve buralarından geçen doğrultuların önceden belirlendiği farz edilsin.

* "Şekil a" daki $P_k=1$ birim yükleme için;

kesit tesirleri; $\vec{R}_k, \vec{M}_k$

yer ve şekil değiştirmeler; $\vec{u}_k, \vec{\delta}_k, \vec{w}_k$

* "Şekil b" daki $P_m=1$ birim yükleme için;

kesit tesirleri; $\vec{R}_m, \vec{M}_m$

yer ve şekil değiştirmeler; $\vec{u}_m, \vec{\delta}_m, \vec{w}_m$ olsun.

Şimdi $P_m=1$ yüklemesinin yer ve birim şekil değiştirmeleri;

$P_k=1$ yüklemesine virtüel yer ve şekil değiştirmeler $(\vec{u}_m, \vec{\delta}_m, \vec{w}_m)$ olarak birimde uygulanırsa, P_k yüklemesi için virtüel iş denklemi;

$$\vec{P}_k \cdot \vec{u}_m = C_{km} = \int (\vec{R}_k \cdot \vec{\delta}_m + \vec{M}_k \cdot \vec{w}_m) dz$$

olur. Denklemi aetik olarak ve doğrusal sistemleri için yazarsak;

$$C_{km} = \int \left[\frac{(\vec{k}' T_k \vec{T}_m)_x}{GA} + \frac{(\vec{k}' T_k \vec{T}_m)_y}{GA} + \frac{(N_k \vec{N}_m)}{AE} + \frac{(\vec{M}_k \vec{M}_m)_x}{EI_x} + \frac{(\vec{M}_k \vec{M}_m)_y}{EI_y} + \frac{(\vec{M}_k \vec{M}_m)_b}{6I_b} \right] dz$$

Esneklik tesir katsayılarının bazı özellikleri şöyledir;

$$C_{kk} > 0 \quad (k=1, \dots, n)$$

$$C_{km} = C_{mk} \text{ simetrik tir. } (k, m=1, \dots, n)$$

$$C_{km} \geq 0 \text{ olabilir } (k \neq m)$$

$$\det [C] = |C_{km}| > 0 \text{ pozitif definit.}$$

Esneklik tesir katsayılarından yararlanarak, herhangi bir yüklemeye içine taşıyıcı sistemde yer değiştirme hesabı yapılır. Örneğin sistemde 1, 2, 3, ... n adet noktaya başlangıçta belirlenmiş doğrultularda $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ tane genelleştirilmiş kuvvet etkiler. "k" noktasında başlangıçta belirlenmiş olan doğrultuda meydana gelecek olan yer değiştirilmiştir yer değiştirme ve dönme açısı;

$$d_k = C_{k1} Q_1 + C_{k2} Q_2 + \dots + C_{kn} Q_n = \sum_{m=1}^n C_{km} Q_m$$

Bu hesaplama diğer nokta ve doğrultularda d_k ($k=1, \dots, n$) yapılırsa yukarıdaki denklemler bir denklem takımına geçer ve bu denklem takımı matris formunda;

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \rightarrow \{d\} = \{C\} \{Q\}$$

biçiminde yazılır.

Rijitlik Tesir Kat sayıları (Yöntem)

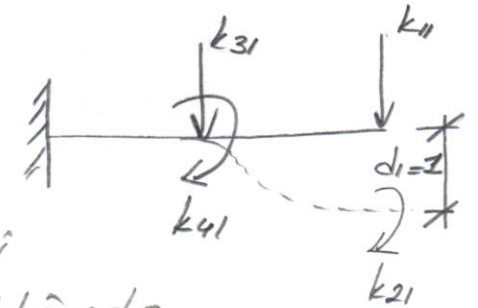
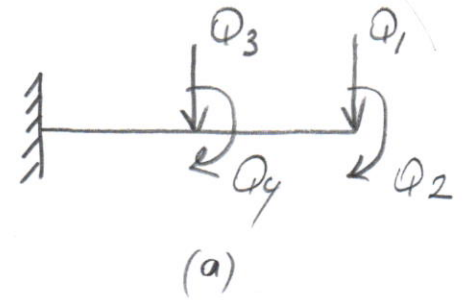
$$\{d\} = [C] \{Q\}$$

bağıntısına soldan; $[k] = [C]^{-1}$ matrisiyk çarpılırsa;

$$\{Q\} = [k] \{d\} \quad (1)$$

elde edilir. Buradaki kare $[k]$ matrisine "rijitlik kat sayıları matrisi" denir. $[k]$ matrisinin geometrik karşılığı şudur;

"Şekil a" çubuğunun $d_1 = 1$ birim yer değiştirmesi dışında tüm diğer şekil değiştirmeler sıfır ($d_2 = d_3 = d_4 = 0$) ise, çubukta bunu sağlayacak biçimde " k_{11}, k_{31} " kuvvetleri ve " k_{21}, k_{41} " momentleri etkilmelidir (Şekil b).



$k_{ij} \rightarrow$ "j" yer değiştirmesi ya da dönmesi yönünde birim şekil değiştirme yapıldığında "i" yer değiştirmesi ya da dönmesi yönünde ortaya çıkacak olan kuvvet ya da momenttir.

"1" bağıntısına gerelleştirerek yukarı olarak yazarsak;

$$Q_1 = k_{11} d_1 + k_{12} d_2 + \dots + k_{1n} d_n$$

$$Q_2 = k_{21} d_1 + k_{22} d_2 + \dots + k_{2n} d_n$$

$$\vdots$$

$$Q_n = k_{n1} d_1 + k_{n2} d_2 + \dots + k_{nn} d_n$$

* Süperpozisyon ilkesinin geçerli olduğu durumlarda yük ⑥ ile yer değiştirme arasında orantılık vardır ve yükler yer değiştirmelerin doğrusal bir fonksiyonudur. O halde, n serbestlikli bir sistem için iç kuvvetlerin işi,

$$U_i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m d_m$$

biçiminde hesaplanır. Orantılık sınırları içinde, şekil değiştirme enerjisi U_i ile tamamlayıcı enerji U_i^* arasındaki ilişki $U_i = U_i^*$ dir. Enerjinin korunumu ilkesinden $U_d \equiv U_i$ biliniyor.

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m d_m \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n c_{mj} Q_m Q_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n k_{mj} d_m d_j \end{aligned}$$

CASTIGLIANO TEOREMİ

(7)

İtalyan demiryolu mühendisi A. Castigliano tarafından 1879'da ilk sırası yapılmıştır.

I. Castigliano Teoremi; Bir elastik sistemde, şekil değiştirme enerjisi " U_i " nin her hangi bir dış kuvvete göre kısmi türevi, o kuvvetin etki ettiği noktadaki yer değiştirmeyi verir;

$$\Delta_m = \frac{\partial U_i}{\partial Q_m} \quad (1)$$

burada, " Δ_m " genelleştirilmiş serbestlik, Q_m ise genelleştirilmiş kuvvettir. Çubuk ise kuvvetlerin işi;

$$(2) \quad U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N^2}{EA} + k_x' \frac{T_x^2}{GA} + k_y' \frac{T_y^2}{GA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{Mb^2}{6I_b} \right) dz$$

(1) bağıntısı, (2) bağıntısında uygulanırsa; P_m kuvvetinin etkidiği

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P_m} \int_0^L \left(\frac{N^2}{EA} + k_x' \frac{T_x^2}{GA} + k_y' \frac{T_y^2}{GA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{Mb^2}{6I_b} \right) dz$$

"m" noktasındaki " u_m " yer değiştirmesi, yukarıdaki şekilde bulunur, şimdi geliştirelim; türev operatörünü integralin içine sokularsa;

$$u_m = \int_0^L \left(\frac{k_x' T_x}{GA} \frac{\partial T_x}{\partial P_m} + \frac{k_y' T_y}{GA} \frac{\partial T_y}{\partial P_m} + \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_m} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial P_m} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial P_m} + \frac{Mb}{6I_b} \frac{\partial Mb}{\partial P_m} \right) dz$$

65 term kolayla aslında " $(\frac{\partial}{\partial P_m})' = \frac{\partial}{\partial P_m}$ " kısaltmasını

kullanarak yukarıdaki bağıntıya daha sade bir biçimde;

$$u_m = \int_0^L \left(k_x' \frac{T_x \bar{T}_x'}{6A} + k_y' \frac{T_y \bar{T}_y'}{6A} + \frac{NN'}{EA} + \frac{M_x \bar{M}_x'}{EI_x} + \frac{M_y \bar{M}_y'}{EI_y} + \frac{M_b \bar{M}_b'}{6I_b} \right) dz$$

yazılır. Bu bağıntı virtüel iş denklemini ile özdeşdir. Eğer "m" noktasındaki dönme açısı Ω_m araştırılıyor, o zaman yukarıdaki türev işlemini bu noktaya etkiler ve dönme ile uyumlu tekil moment "Mm" 'e göre hesaplanır.

$$\Omega_m = \frac{\partial U_i}{\partial M_m} \text{ 'den hareketle yukarıdaki adım}$$

larız aynı şekilde tekrar edilerek;

$$\Omega_m = \int_0^L \left(k_x' \frac{T_x \bar{T}_x'}{6A} + k_y' \frac{T_y \bar{T}_y'}{6A} + \frac{NN'}{EA} + \frac{M_x \bar{M}_x'}{EI_x} + \frac{M_y \bar{M}_y'}{EI_y} + \frac{M_b \bar{M}_b'}{6I_b} \right) dz$$

yukarıdaki bağıntılar sadece doğrusal denklemler için de geçerlidir.

Kafes Sistemler; Her bir subukta ona ait normal kuvvet sabit olduğundan "um" bağıntısı sadeleşir ve "um" yer değiştirir;

$$u_m = \sum_{j=1}^n \frac{N_j}{A_j E_j} \left(\frac{\partial N_j}{\partial P_m} \right) \text{ olur.}$$

Castigliano teoremi uygulanırken dikkat edilmesi gereken iki önemli husus aşağıda sıralanmıştır;

1- Cisme etkiler tüm dış etkilerin birbirinden bağımsız olduğu varsayılır.

2- Yer değiştirme ya da dönme hesabının yapılacağı noktada onunla uyumlu bir dış etki yoksa, gerçek yüklere ek olarak bu noktaya uygun bir tekil yük etkiltilir. (Yer değiştirme için tekil kuvvet, dönme için

moment yörü etkitir). Gerçekten böyle bir yük olmadığı için, türev işleni tamamlandıktan sonra denklemlerde bu yük terimi sıfırlanarak gerçek duruma geri döndürülür.

II Castigliano Teoremi: İsten bir yer değiştirmeye göre türevi, o noktada yer değiştirmeye uyumlu olacak birinde aynı doğrultudaki kuvveti verir. Yani

$$Q_m = \frac{\partial U_i}{\partial \Delta_m}$$

II Castigliano teorimi gereldir, doğrual olmayan sistemler içinde gereldir.