

ELASTİK EĞRİ

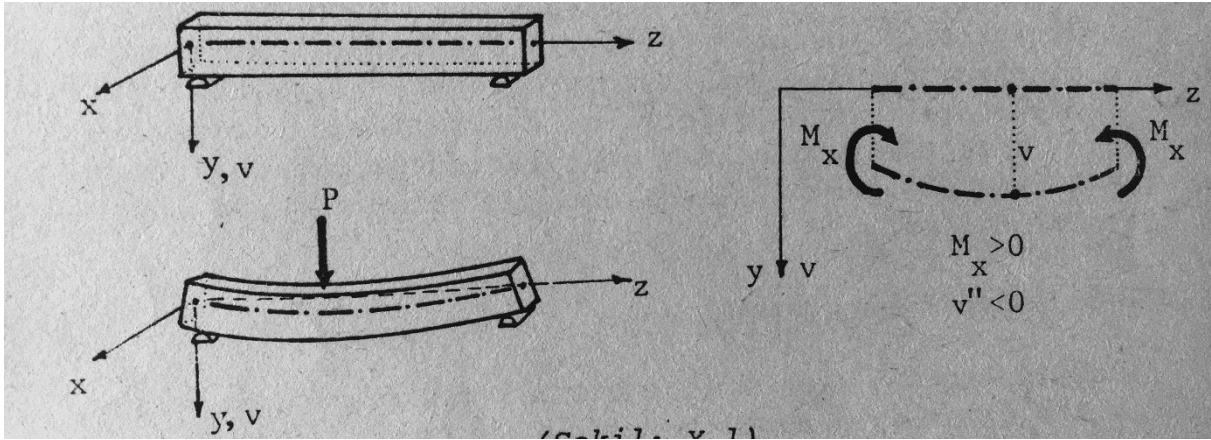
Elastik eğri, çubuk eksenini üzerindeki noktaların düşey yer değiştirmelerinin geometrik yeridir. Elastik eğrinin oluşturulması, mukavemette iki bakımdan önemlidir;

1. Herhangi bir konstrüksiyonun boyutlandırılmasında sadece gerilmeler değil, şekil değiştirmelerde dikkate alınmalıdır.
2. Hiperstatik konstrüksiyonların hesabında, sistemin şekil değiştirme uygunluğunu gösteren geometrik karakterli ilave denklemlere ihtiyaç vardır. Bu denklemlerin yazılabilmesi için konstrüksiyonun bazı noktalarındaki yer değiştirmelerin bilinmesi gerekir. Bu da ancak elastik eğrinin bilinmesi ile mümkün olur.

Elastik Eğrinin Bulunması

Elastik eğrinin hesabı için birçok metot vardır, en çok kullanılan metotların başında Diferansiyel Denklem Metodu ile Mohr Metodudur.

Diferansiyel Denklem Metodu



y eksenine göre simetrik kesitli bir çubuğun yz düzleminde eğilmesi halinde, elastik eğrinin eğrilik ifadesi,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x(z)}{EI_x}$$

şeklindedir. Ayrıca bir eğrinin eğriliği için diferansiyel geometriden;

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}}$$

bağıntısı bilinmektedir. Bu iki bağıntının eşitliğinden,

$$\frac{M_x(z)}{EI_x} = \pm \frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}}$$

yazılabilir.

$M_x > 0$ alındığına göre, şekilde görüldüğü gibi, elastik eğrinin eğimi çubuk ortasına doğru gittikçe azalmaktadır. Bu durumda v' azalan bir fonksiyon olduğundan, $v'' < 0$ olmak zorundadır. Dolayısı ile (-) işaret dikkate alınmalıdır. Ayrıca çökmeler çok küçük olduğundan v'^2 değeri 1' in yanında ihmal edilebilecek mertebededir. Bu durumda yukarıdaki ifade;

$$v'' = -\frac{M_x(z)}{EI_x}$$

şeklini alır. Böylece elastik eğrinin diferansiyel denklemi elde edilmiş olur. Buradan çift integrasyon sonucu, elastik eğri denklemi bulunur:

$$v' = -\int \frac{M_x(z)}{EI_x} dz + C_1$$
$$v = -\iint \frac{M_x(z)}{EI_x} dz \cdot dz + C_1 \int dz + C_2$$

C_1 ve C_2 sınır şartlarından bulunabilecek integrasyon sabitleridir.

Buraya kadar anlatılanlardan çubuğa ait geometrik ve statik büyüklükler arasında şu bağıntılar yazılabilir;

$$-EI_x v'' = M_x \quad (\text{Eğilme Momenti})$$

$$v' = \text{Elastik Eğrinin Eğim Fonksiyonu (Dönmeler)}$$

$$v = \text{Elastik Eğri Fonksiyonu (Çökmeler)}$$

Ayrıca;

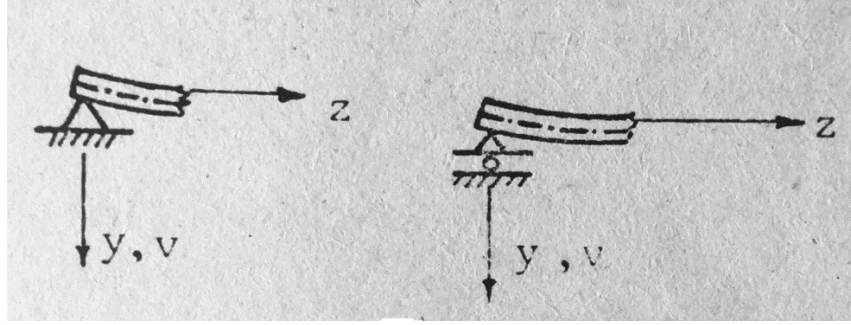
$$-EI_x v''' = Q_y$$

$$-EI_x v'''' = q_y$$

olduğu hatırlanmalıdır.

Sınır Şartları;

a) Sabit ve kayıcı mesnet,

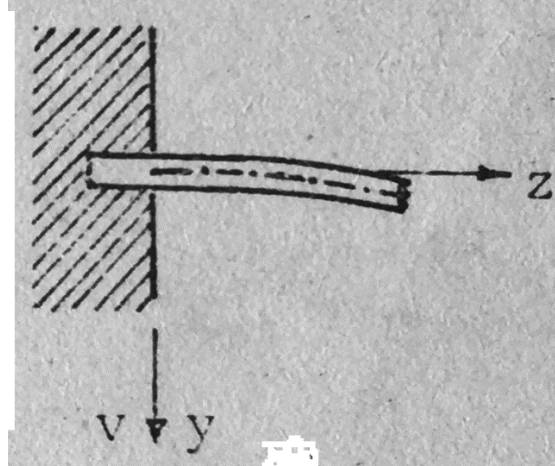


Bu tip mesnetlerde çökme ve moment sıfır olacağından,

$$v = 0 \quad v'' = 0$$

sınır şartları yazılabilir.

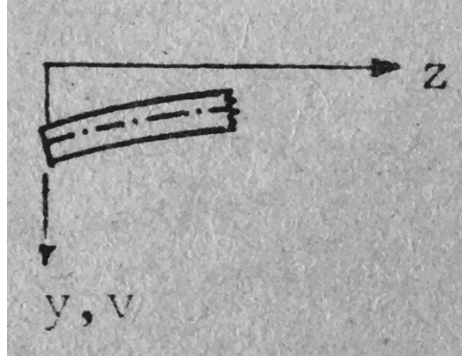
b) Ankastre Mesnet



Bu mesnette ise çökme ve dönme sıfırdır,

$$v = 0 \quad v' = 0$$

c) Serbest Uç



Serbest uçta, kuvvet ve moment etki etmiyorsa,

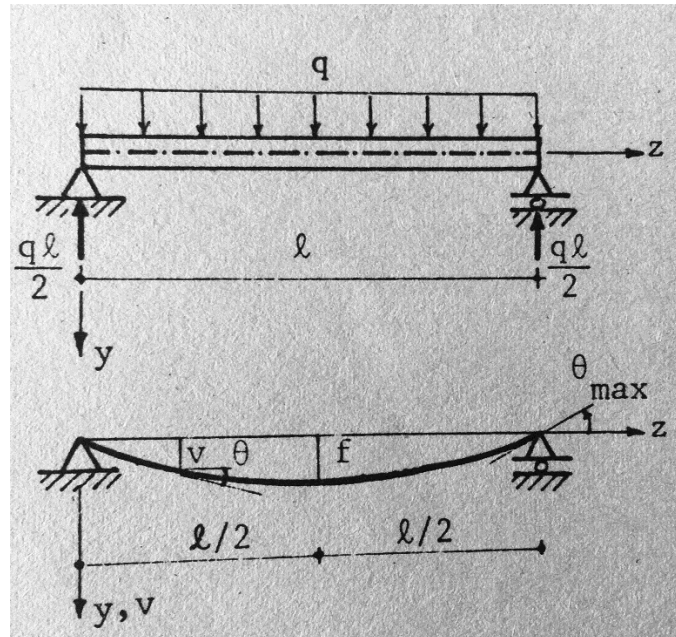
$$v'' = 0 \quad v''' = 0$$

P tekil kuvveti veya M momenti etkiyorsa,

$$v'' = -\frac{M}{EI_x} \quad v''' = -\frac{P}{EI_x}$$

şartları geçerlidir.

Örnek



Yukarıdaki şekilde görülen “ l ” açıklıklı basit kiriş, düzgün yayılı yükle yüklenmiştir. Bu kirişin elastik eğri ve eğim fonksiyonlarını hesaplayalım.

Kirişin “ z ” kesitinde etki eden eğilme momenti,

$$M_x = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2}$$

değerindedir. Dolayısı ile,

$$v'' = -\frac{1}{EI_x} \left(\frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2} \right)$$

yazılabilir. İntegral alınarak,

$$v' = -\frac{1}{EI_x} \left(\frac{ql}{2} \frac{z^2}{2} - \frac{q}{2} \frac{z^3}{3} \right) + C_1$$

ve

$$v = -\frac{1}{EI_x} \left(\frac{ql}{4} \frac{z^3}{3} - \frac{q}{6} \frac{z^4}{4} \right) + C_1 z + C_2$$

elde edilir. Kirişe ait sınır şartları;

$$z = 0 \text{ da } v = 0, \quad v'' = 0$$

$$z = l \text{ de } v = 0, \quad v'' = 0$$

İlk sınır şartı “ v ” de yerine konularak $C_2 = 0$ bulunur. İkinci sınır şartı ile de,

$$C_1 = \frac{ql^3}{24EI_x}$$

elde edilir. Bu sabitler “ v ” ve “ v' ” de yerlerine konulursa elastik eğri ve eğim (dönme) fonksiyonları bulunur;

$$v' = \theta = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{q}{6} z^3 - \frac{ql}{4} z^2 + \frac{ql^3}{24} \right)$$

Kirişe ait en büyük çökme $z = l/2$ de olup değeri f ile gösterilirse;

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_x}$$

elde edilir. Dönmelerinin en büyük değeri ise mesnetlerde oluşur, $z = 0$ değeri v' de yerine konarak;

$$\theta_{max} = \frac{ql^3}{24EI_x}$$

elde edilir.