

Bölüm 11

DİREKT ÇARPIMLAR VE TOPLAMLAR

Bu bölümde değişmeli gruplar için direkt toplam kavramı tanımlanacaktır. İki kümenin kartezyen çarpımından yola çıkarak iki yada daha fazla grubun kartezyen çarpımının da bir grup olduğu gösterilecektir.

11.1 Dış Direkt Çarpımlar (Toplamlar)

Tanım (Dış Direkt Çarpım): G_1 ve G_2 herhangi iki grup olmak üzere

$$G_1 \times G_2 = \{(a, b) \mid a \in G_1, b \in G_2\} \text{ kümesi}$$

üzerinde tanımlanan $\forall (a, b), (c, d) \in G_1 \times G_2$ için $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$ ikili işlemine göre bir grup olup, bu gruba G_1 ve G_2 gruplarının dış direkt çarpımı denir ve $(G_1 \times G_2, \cdot)$ şeklinde gösterilir.

Örnek: $U(6) \otimes U(8) = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (5, 7)\}$ kümesinin elemanları çarpma işlemi altında bir gruptur. Örneğin

$$(5, 3)(5, 7) = (1, 5)$$

dir. Burada ilk iki bileşen mod 6 ya göre ve ikinci iki bileşen ise mod 8 e göre alınır.

Örnek: $Z_2 \times Z_4$ grubunun devirli olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $Z_2 \times Z_4 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$

olup, mertebesi 8 dir.

$$\forall (a, b) \in Z_2 \times Z_4 \text{ için } 4(a, b) = (4a, 4b) = (0, 0)$$

olduğundan, grupta her elemanın mertebesi ≤ 4 olur. Halbuki, grubun mertebesi $2 \cdot 4 = 8$ olduğundan devirli grup olamaz.

Tanım (Dış Direkt Toplam): Toplama işlemine göre $G_1 \times G_2 = \{(a, b) \mid a \in G_1, b \in G_2\}$ kümesi bir grup olup, bu gruba G_1 ve G_2 gruplarının dış direkt toplamı denir ve $(G_1 \times G_2, +)$ şeklinde gösterilir.

Örnek: $Z_2 = \{0,1\}$ ve $Z_3 = \{0,1,2\}$ olmak üzere $(Z_2,+)$ ve $(Z_3,+)$ birer değişmeli (Abel) grup ise $Z_2 \times Z_3$ toplama işlemine göre değişmeli bir grup mudur? Mertebeleri $o(Z_2 \times Z_3) = o(Z_2) \cdot o(Z_3)$ midir?

Çözüm: $Z_2 \times Z_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$ kümesi toplama işlemine göre mertebesi 6 olan değişmeli bir gruptur. O halde $6 = o(Z_2 \times Z_3) = o(Z_2) \cdot o(Z_3) = 2 \cdot 3 = 6$ eşitliği sağlanır.

Örnek: $Z_4 \times Z_6$ grubunun devirli olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $x \in Z_4$ ve $y \in Z_6$ olmak üzere $\forall (x,y) \in Z_4 \times Z_6$ için

$$\text{ekok}(4,6) = 12$$

olduğundan

$$12(x,y) = (12x, 12y) = (0,0)$$

olduğundan $Z_4 \times Z_6$ grubunun her elemanının mertebesi 12 den küçük ya da eşittir. Halbuki $o(Z_4 \times Z_6) = 24$ dır. O halde $Z_4 \times Z_6$ grubu devirli değildir.

Örnek: $(Z_2,+)$ ve $(Z_3,+)$ gruplarının direkt toplamının üreticinin $\langle (1,1) \rangle$ olduğunu gösteriniz ve mertebesini bulunuz .

Çözüm: $(Z_2,+)$ ve $(Z_3,+)$ gruplarının direkt toplamı olan $Z_2 \times Z_3$ ü oluşturalım:

$$Z_2 \times Z_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$$

olup, 6 elemanlı bir toplam grubudur.

$$6(1,1) = 5(1,1) + (1,1) = (1,2) + (1,1) = (0,0)$$

olup, $o(1,1) = 6$ dır.

Önerme 11.1.1 G_1 ve G_2 sonlu iki grup olmak üzere $G = G_1 \times G_2$ direkt çarpımının herhangi bir elemanının mertebesi o elemanın bileşenlerinin mertebelerinin en küçük ortak katına eşittir. Yani;

$$(g_1, g_2) \in G = G_1 \times G_2$$

ise o zaman

$$o(g_1, g_2) = \text{ekok}(o(g_1), o(g_2))$$

dir.

Örnek: $Z_3 \times Z_{12}$ grubunun $(2, 6)$ elemanının mertebesini bulunuz.

Çözüm: $o(2, 6) = \text{ekok}(o(2), o(6)) = \text{ekok}(3, 2) = 6$

(Burada $n \cdot 2 = 0 \Rightarrow n = 3$ ve $n \cdot 6 = 0 \Rightarrow n = 2$ olmalıdır.)

Örnek: $Z_3 \times Z_{12}$ grubunun mertebesi 6 olan bütün elemanlarının sayısını bulunuz.

Çözüm: $(a, b) \in Z_3 \times Z_{12}$ ve $o(a, b) = 6$ ise üç durum söz konusudur.

- i) $o(a) = 1, o(b) = 6$ için iki seçenek var, $(0, 2)$ ve $(0, 10)$
- ii) $o(a) = 3, o(b) = 2$ için iki seçenek var, $(1, 6)$ ve $(2, 6)$
- iii) $o(a) = 3, o(b) = 6$ için dört seçenek var, $(1, 2), (1, 10), (2, 2)$ ve $(2, 10)$

sonuç olarak tam 8 tane elemanı vardır.

Önerme 11.1.2 G_1 ve G_2 sonlu iki devirli grup olsun. O zaman $G_1 \times G_2$ direkt çarpımının devirli olması için g.v.y.k G_1 ve G_2 nin mertebelerinin aralarında asal olmasıdır. Yani $(o(G_1), o(G_2)) = 1$ olmasıdır. $G_1 \times G_2$ direkt çarpımının üretici

$$G_1 \times G_2 = \langle (g_1, g_2) \rangle$$

şeklindedir.

Örnek: $Z_2 \times Z_3 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$ kümesi $(1, 1)$ elemanı tarafından üretilen devirli bir grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$0(1, 1) = (0, 0), \quad 1(1, 1) = (1, 1)$$

$$2(1, 1) = (0, 2), \quad 3(1, 1) = (1, 0)$$

$$4(1, 1) = (0, 1), \quad 5(1, 1) = (1, 2)$$

olduğundan

$$Z_2 \times Z_3 = \langle (1, 1) \rangle$$

dir.

Önerme 11.1.3 $G_1, G_2, \dots, G_n$ n-tane sonlu grup olsun. Buna göre $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ direkt çarpımının devirli bir grup olması için g.v.y.k $G_1, G_2, \dots, G_n$ gruplarının mertebelerinin aralarında ikişer ikişer relatif asal olmasıdır. Yani $i \neq j$ için $(o(G_i), o(G_j)) = 1$ olmasıdır.

Buna göre; G_m mertebesi m olan bir devirli grup ise o zaman $G_m \cong Z_m$ ve G_n mertebesi n olan bir devirli grup ise $G_n \cong Z_n$ olduğundan eğer $(m, n) = 1$ ise $Z_m \times Z_n \cong Z_{mn}$ dir.

Sonuç: $k_1, k_2, \dots, k_n$ sayıları ikişer ikişer aralarında relatif asal yani $i \neq j$ için $(k_i, k_j) = 1$ ise o zaman

$$Z_{k_1} \times Z_{k_2} \times \dots \times Z_{k_n} \cong Z_{k_1 k_2 \dots k_n}$$

dir.

Örnek: 2,3,5,7 sayıları aralarında ikişer ikişer relatif asal olduğundan yani

$$(2, 3) = (2, 5) = (2, 7) = (3, 5) = (3, 7) = (5, 7) = 1$$

oldüğundan

$$Z_2 \times Z_3 \times Z_5 \times Z_7 \cong Z_{210}$$

dır.

Örnek: $Z_2 \times Z_3 \cong Z_6$ dır. Çünkü $Z_2 \times Z_3 = \langle (1, 1) \rangle$ dir. Yani $(1, 1)$ elemanı tarafından üretilen devirli bir gruptur ve mertebesi 6 dır. $Z_6 = \langle 1 \rangle$ dir. Yani 1 ile üretilen devirli bir gruptur ve mertebesi 6 dır.

O halde mertebeleri aynı olan devirli gruplar izomorf olduğundan $Z_2 \times Z_3 \cong Z_6$ yazabiliriz.

11.2 İç Direkt Çarpımlar (Toplamlar)

Tanım (İç Direkt Çarpım): G bir grup ve $i = 1, 2, \dots, m$ için $N_i < G$ olsun. Buna göre eğer

$$i) \quad G = N_1 N_2 \dots N_m$$

$$ii) \quad i \neq j \text{ için } H_i H_j = H_j H_i \text{ ve } (H_1 \dots H_i) \cap H_{i+1} = \{e\}$$

$$iii) \quad \text{Herhangi bir } g \in G, n_i \in N_i \text{ } i = 1, 2, \dots, m \text{ olmak üzere } g = n_1 n_2 \dots n_m$$

koşullarını sağlıyorsa G ye $N_1, N_2, \dots, N_m$ alt gruplarının iç direkt çarpımı denir.

$$G = N_1 \Theta N_2 \Theta \dots \Theta N_m$$

şeklinde gösterilir.

Tanım (İç Direkt Toplam): N_i lerin toplama işlemine göre grup olmaları halinde G grubuna N_i lerin iç direkt toplamı denir.

$$G = N_1 + N_2 + \dots + N_m$$

şeklinde gösterilir.

Uyarı: İç direkt çarpımla dış direkt çarpım arasındaki fark : Dış direkt çarpımda gruplar herhangi gruplar olabilir. İç direkt çarpımda ise belli bir G grubunun bazı koşulları sağlayan alt gruplarının olması gerekir.

Önerme 11.2.1 $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m$; $G_1, G_2, \dots, G_m$ gruplarının dış direkt çarpımı ve $g_i \in G$ ve e_i ler G nin birim elemanları olmak üzere

$$N_i = \{(e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \dots, e_m) \in G \mid g_i \in G_i, i = 1, 2, \dots, m\}$$

şeklindeki bir N_i alt kümesi aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$i) \quad N_i < G$$

$$ii) \quad N_i \cong G_i$$

$$iii) \quad G = N_1 N_2 \dots N_m$$

$$iv) \quad \forall g \in G, n_i \in N_i \text{ olmak üzere } g = n_1 n_2 \dots n_m \text{ şeklinde tek olarak yazılabilir.}$$

Örnek: $(\mathbb{R}, +)$ reel sayılar kümesinin toplama işlemine göre bir grubu ise

$$C = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

kümesi de toplama işlemine göre bir gruptur. Çünkü $(C, +)$ grubunun birim elemanı $(0, 0)$ ve $(x, y) \in C$ nin tersi $(x, y)^{-1} = (-x, -y)$ olduğundan

$$N_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \text{ ve } N_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

kümeleri C nin normal alt grupları olup $N_1 \cong \mathbb{R}$ ve $N_2 \cong \mathbb{R}$ dir. Böylece C , N_1 ve N_2 normal alt gruplarının bir iç direkt toplamıdır. Yani

$$C = N_1 \oplus N_2$$

dir.

Önerme 11.2.2 $N_1, N_2, \dots, N_m$ ler bir G grubunun normal alt grupları olmak üzere iç direkt çarpımları $G = N_1 \Theta N_2 \Theta \dots \Theta N_m$ ve dış direkt çarpımları $G' = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_m$ ise o zaman G ve G'

$$G \cong G'$$

izomorftur.

Örnek: $Z_{36}^* = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35\}$ grubu ve alt grupları $H_1 = \{1, 13, 25\}$, $H_2 = \{1, 17\}$, $H_3 = \{1, 9\}$ verilsin. Bu alt gruplar bir iç direkt çarpım grubu oluşturur mu?

Çözüm: $H_1 H_2 = \{1, 5, 13, 17, 25, 29\} < Z_{36}^*$, $H_2 H_3 = \{1, 17, 19, 35\} < Z_{36}^*$

$$H_1 H_2 H_3 = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35\} = Z_{36}^* \text{ ve}$$

$$H_1 \cap H_2 = H_1 \cap H_3 = H_2 \cap H_3 = \{1\}$$

olduğundan bir iç çarpım grubu $Z_{36}^* = H_1 \times H_2 \times H_3$ elde edilir.

Bölüm 12

OTOMORFİZMALAR

Bu bölümde tanım kümesi ile değer kümesi aynı olan grup otomorfizmalarını vereceğiz.

12.1 Eşlenik, İç Otomorfi ve İnvaryant Alt Gruplar

Tanım (Eşlenik): G bir grup ve $a, g \in G$ olsun. G nin $h = a g a^{-1}$ elemanına g nin a ile dönüştürülmüşü (eşleniği) denir.

Tanım (Eşlenik): M , G grubunun herhangi bir alt grubu ve $a \in G$ olsun. $a M a^{-1}$ alt grubuna M nin a ile dönüştürülmüşü (eşleniği) denir.

Tanım (Otomorfizm=İç otomorfizm): G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere, $I_a : G \rightarrow G$
 $I_a : g \rightarrow a \cdot g \cdot a^{-1}$ ($g \in G$) tasvirine G nin bir iç otomorfizmi olarak adlandırılır.

G nin bütün otomorfizmlerinin kümesi de $\text{Aut}(G)$ ile gösterilir.

Önerme 12.1.1 $a \in G$ olmak üzere, $I_a : g \rightarrow a \cdot g \cdot a^{-1}$ ($g \in G$) tasviri G nin bir otomorfizmidir.

İspat: i) $I_a : g \rightarrow a \cdot g \cdot a^{-1}$ tasviri $\forall h \in G$ ye karşılık $I_a(g) = h$ olacak şekilde bir ve bir tek $g \in G$ vardır. Yani; $I_a : G \rightarrow G$ 1-1 bir tasvirdir.

$$I_a(g) = h \Leftrightarrow a \cdot g \cdot a^{-1} = h \Leftrightarrow g = a^{-1} \cdot h \cdot a \in G \text{ dir.}$$

ii) $\forall g_1, g_2 \in G$ için $I_a(g_1 \cdot g_2) = I_a(g_1) \cdot I_a(g_2)$ dir. yani; bir homomorfizmadır Çünkü

$$\begin{aligned} I_a(g_1 \cdot g_2) &= a(g_1 \cdot g_2)a^{-1} \\ I_a(g_1) \cdot I_a(g_2) &= (a \cdot g_1 \cdot a^{-1})(a \cdot g_2 \cdot a^{-1}) = (a \cdot g_1)(a^{-1} \cdot a)(g_2 \cdot a^{-1}) = a(g_1 \cdot g_2)a^{-1} \end{aligned}$$

dir.

Önerme 12.1.2 Bir G grubunun bütün iç otomorfizmleri, tasvirlerin çarpma işlemine göre bir grup oluştururlar.

Tanım (İç Otomorfiler Grubu): $I(G) = \{ I_a \mid a \in G \}$ grubuna iç otomorfiler grubu denir.

Önerme 12.1.3 Bir G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin kümesi, $(\text{Aut}(G), o)$ grubunun bir normal alt grubudur.

İspat: $I(G) = \{ I_a \mid a \in G \} \triangleleft \text{Aut}(G)$ olduğunu göstermek için $I_a \in I(G)$ ve $f \in \text{Aut}(G)$ olmak üzere $f \circ I_a \circ f^{-1} \in I(G)$ olduğunu göstermeliyiz. $\forall g \in G$ için

$$\begin{aligned} (f \circ I_a \circ f^{-1})(g) &= (f \circ I_a)(f^{-1}(g)) \\ &= f[I_a(f^{-1}(g))] \\ &= f[a f^{-1}(g) a^{-1}] \\ &= f(a) f(f^{-1}(g)) f(a^{-1}) \\ &= f(a) f(f^{-1}(g)) f(a)^{-1} \\ &= f(a) g f(a)^{-1} \\ &= I_{f(a)}(g) \in I(G) \end{aligned}$$

olduğundan $I(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$ elde edilir.

Önerme 12.1.4 Bir G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin kümesi, $(\text{Aut}(G), o)$ grubunun bir alt grubudur.

İspat: $I(G) = \{ I_a \mid a \in G \} \subseteq \text{Aut}(G)$ olduğunu göstermek için

$I_a, I_b \in I(G)$ için $I_a \circ I_b^{-1} \in I(G)$ olduğunu göstermeliyiz. $\forall g \in G$ için

$$\begin{aligned} (I_a \circ I_{b^{-1}})(g) &= I_a(I_{b^{-1}}(g)) = I_a(b^{-1} g b) = a(b^{-1} g b) a^{-1} \\ &= (a b^{-1}) g (b a^{-1}) = (a b^{-1}) g (a b^{-1})^{-1} = I_{a b^{-1}}(g) \end{aligned}$$

dir. O halde $I(G) \subseteq \text{Aut}(G)$ olur. Burada $(I_a)^{-1} = I_{a^{-1}}$ eşitliği kullanılmıştır.

Tanım (İnvariant Alt Grup): Bir G grubunun normal alt grupları G nin bütün iç otomorfizmleri altında $I_g(N) = N$ ise N ye G nin invariant (değişmez) alt grubu denir.

Önerme 12.1.5 Bir G grubunun normal alt grupları G nin bütün iç otomorfizmleri altında invariant (değişmez) dir. Yani, $\forall N \triangleleft G$ için $g \in G$ olmak üzere $I_g(N) = N$ dir.

İspat: Normal alt gruplardaki denk ifadelerden

$$\forall g \in G \text{ için } gN = Ng \Leftrightarrow gNg^{-1} = N$$

$$I_g(N) = \{gng^{-1} \mid n \in N\} = gNg^{-1} = N$$

yazılabilir. Böylece $\forall N \triangleleft G$ için $g \in G$ olmak üzere $I_g(N) = N$ olduğu gösterilmiş oldu.

Örnek: $H < G$ ve G nin her $I(G) = \{I_a \mid a \in G\}$ otomorfizmi için $I_g(N) = N$ ise H alt grubunun normal alt grup olduğunu gösteriniz.

İspat: $\forall h \in H$ ve $\forall g \in G$ için ghg^{-1} , h nin g ile eşleniği olduğundan $I(G) = \{I_a \mid a \in G\}$ iç otomorfizmi için $ghg^{-1} = I_g(h) \in I_g(H) = H$ elde edilir. Böylece H nin normal alt grup olduğunu göstermiş oluruz.

“Normal alt grup” ve “invariant alt grup” kavramları birbiriyle çakışır.

Önerme 12.1.6 Her $n > 1$ için $\text{Aut}(Z_n) \cong Z_n^*$ dır.

İspat: $\Phi \in \text{Aut}(Z_n)$ elemanı $\Phi(1) = 1$ için sağlanır. Çünkü $\forall k \in Z_n$ için $\Phi(k) = k\Phi(1)$ dir. Ayrıca Φ bir örten homomorfizma olduğundan $\Phi(1) \in Z_n^*$ dır.

$\sigma: \text{Aut}(Z_n) \rightarrow Z_n^*$, $\sigma(\Phi) = \Phi(1)$ ile tanımlanan dönüşüm 1-1 dir.

$$\sigma(\Phi_1) = \sigma(\Phi_2) \Rightarrow \Phi_1(1) = \Phi_2(1) \Rightarrow \Phi_1(x) = \Phi_2(x), \forall x \in Z_n$$

$$\Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2$$

olduğundan σ , 1-1 dir.

$b \in Z_n^*$ için $\sigma(\Phi)(x) = \Phi(1)x = bx \in Z_n$ olacak şekilde $bx \in Z_n$ var olduğundan σ , örtendir.

$$\sigma(\Phi_1 \circ \Phi_2) = \Phi_1(\Phi_2(1)) \Rightarrow \Phi_1(1)\Phi_2(1) = \sigma(\Phi_1)\sigma(\Phi_2)$$

olduğundan σ , homomorfizmadır. Üç koşul sağlandığından σ bir izomorfizmadır.

Sonuç (Cayley Teoremi): Her grup bir permütasyon grubu ile izomorftur.

Örnek: $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ grubunun iç otomorfizma grubunu bulunuz.

Çözüm: S_3 ün ilk iç otomorfizması $I_{(1)}(S) = (I)S(I)^{-1}$ dir. Diğerleri ise

$I_{(12)} : S \rightarrow S$, $I_{(12)}(S) = (12)S(12)^{-1}$, $I_{(13)} : S \rightarrow S$, $I_{(13)}(S) = (13)S(13)^{-1}$ olup,

$$(12)(12)(12)^{-1} = (12)$$

$$(13)(12)(13)^{-1} = (23)$$

$$(12)(13)(12)^{-1} = (23)$$

$$(13)(13)(13)^{-1} = (13)$$

$$(12)(23)(12)^{-1} = (13)$$

$$(13)(23)(13)^{-1} = (12)$$

$$(12)(123)(12)^{-1} = (132)$$

$$(13)(123)(13)^{-1} = (132)$$

$$(12)(132)(12)^{-1} = (123)$$

$$(13)(132)(13)^{-1} = (123)$$

$I_{(23)} : S \rightarrow S$, $I_{(23)}(S) = (23)S(23)^{-1}$,
olup,

$I_{(123)} : S \rightarrow S$, $I_{(123)}(S) = (123)S(123)^{-1}$

$$(23)(12)(23)^{-1} = (13)$$

$$(123)(12)(123)^{-1} = (23)$$

$$(23)(13)(23)^{-1} = (12)$$

$$(123)(13)(123)^{-1} = (12)$$

$$(23)(23)(23)^{-1} = (23)$$

$$(123)(23)(123)^{-1} = (13)$$

$$(23)(123)(23)^{-1} = (132)$$

$$(123)(123)(123)^{-1} = (123)$$

$$(23)(132)(23)^{-1} = (123)$$

$$(123)(132)(123)^{-1} = (132)$$

$I_{(132)} : S \rightarrow S$, $I_{(132)}(S) = (132)S(132)^{-1}$ olup,

$$(132)(12)(132)^{-1} = (13)$$

$$(132)(13)(132)^{-1} = (23)$$

$$(132)(23)(132)^{-1} = (12)$$

$$(132)(123)(132)^{-1} = (123)$$

$$(132)(132)(132)^{-1} = (132)$$

Şimdi S_3 ün elemanlarını sırasıyla 1,2,3,4,5,6 ile numaralarsak,

$$I_{(1)} = (I)$$

$$I_{(12)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (34)(56)$$

$$I_{(13)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (24)(56)$$

$$I_{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (23)(56)$$

$$I_{(123)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (243)$$

$$I_{(132)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (234)$$

elde edilir. Yani, S_3 ün iç otomorfizma grubu, S_6 nın

$$\{I, (34)(56), (24)(56), (23)(56), (243), (234)\}$$

alt grubudur.

Örnek: $\varphi: G \rightarrow G$ bir otomorfizm ise φ nin çekirdeği hakkında ne söylenebilir? Açıklayınız.

Çözüm: φ bir otomorfizm olduğundan 1-1 dir. Dolayısıyla önerme gereği, çekirdeği tek elemandan oluşmak zorundadır. Yani $\text{Ker } \varphi = \{e\}$ dir.

Bölüm 13

DÖNME VE SİMETRİ GRUPLARI

Bu bölümde grupların bir çeşidi olan dihedral grupları inşa edeceğiz. Bu gruplar mimari gibi sanatsal eserlerin yapımında önemli rol oynarlar.

13.1 Dihedral Gruplar

Tanım 1 (Dihedral Grup): $D_n = \{x, y \mid x^n = y^2 = e \text{ ve } xy = yx^{n-1}\}$ şeklinde tanımlanan iki üreteçli bu gruba dihedral grup ya da n . dereceden dihedral grup denir. Bu grubun mertebesi $o(D_n) = 2n$ dir.

Tanım 2 (D_n Dihedral Grup): $x^n = y^2 = e$ ve $xy = yx^{n-1}$ koşulları sağlayan x ve y ile üretilen gruba dihedral grup denir.

D_n dihedral grubunun merkezi n tek ise $M = \{e\}$, $n > 2$ çift ise $M = \{e, x^{n/2}\}$ dir.

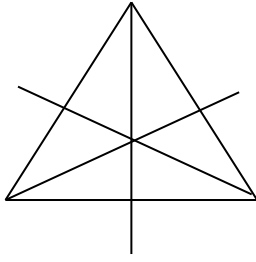
Tanım (D_2 Dihedral Grup): D_2 dihedral grubu $D_2 = \{e, x, y, yx\}$ şeklinde tanımlanır. $x^2 = y^2 = e$ ve $xy = yx$ koşullarını sağlayan bu grup değişmeli bir gruptur.

Tanım (D_3 : Eşkenar Üçgenin Simetrileri Grubu): Eşkenar bir üçgenin merkezi etrafında $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ derecelik dönmeler ve kenar ortaylarına göre simetriler ile oluşturulan

$\left\{ \underbrace{\rho_0, \rho_1, \rho_2}_{\text{Dönmeler}}, \underbrace{\mu_1, \mu_2, \mu_3}_{\text{Simetriler}} \right\}$ grubuna bir eşkenar üçgenin simetrileri grubu denir.

$D_3 = \{x, y \mid x^3 = y^2 = e \text{ ve } xy = yx^2\}$ şeklinde tanımlanır. Bu grup 3. dereceden dihedral grup olarak da adlandırılır.

Örnek: Bu grup S_3 simetrik grubu ile aynıdır. Yani; Köşeleri 1,2,3 olan bir eşkenar üçgenin $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ derecelik dönmeleri sırasıyla ρ_0, ρ_1, ρ_2 ile ve d_1, d_2, d_3 kenarortaylarına göre simetrileri de μ_1, μ_2, μ_3 ile gösterilirse



0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

$$\rho_0 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (I), \quad \rho_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123),$$

$$\rho_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132), \quad \mu_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23),$$

$$\mu_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13), \quad \mu_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)$$

S_3 simetrik grubunun elemanlarına karşılık gelir. Burada,

$$\rho_0 = e, \quad \rho_1 = x, \quad \rho_2 = x^2, \quad \rho_3 = x^3 = e$$

$$\mu_i = y, \quad \mu_i^2 = y^2 = e, \quad \rho_1 \mu_i = \mu_i \rho_2 \Leftrightarrow xy = yx^2 \quad (i=1,2,3)$$

koşulları sağlanır. Burada üreteçler x ve y dir.

$$D_3 = \{e, x, x^2, y, yx, yx^2\} \cong S_3 \text{ elde edilir.}$$

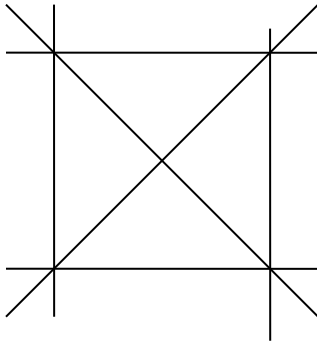
Tanım (D_4 dihedral grubu): Köşeleri 1,2,3,4 olan karenin merkezi etrafındaki 0,90,180,270 derecelik dönmeleri ve d_1, d_2, d_3, d_4 kenar ortaylarına göre simetrileri ile oluşturulan $D_4 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$ grubuna **karenin simetrileri grubu** denir ve $D_4 = \{x, y \mid x^4 = y^2 = e \text{ ve } xy = yx^3\}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek: D_4 grubunu inşa edelim.

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I, \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mu_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	μ_3	μ_4	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	μ_4	μ_3
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_4	μ_3	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	μ_4	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	μ_4	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
μ_3	μ_3	μ_1	μ_4	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
μ_4	μ_4	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Burada,

$$\rho_0 = e = x^4, \quad \rho_1 = x, \quad \rho_2 = x^2, \quad \rho_3 = x^3$$

$$\mu_i = y, \quad \mu_i^2 = y^2 = e, \quad \rho_1 \mu_i = \mu_i \rho_3 \Leftrightarrow xy = yx^3 \quad (i=1, 2, 3)$$

koşulları sağlanır. Üreteçler yine x ve y dir.

$$D_4 = \{e, x, x^2, x^3, y, yx, yx^2, yx^3\} \text{ elde edilir.}$$

Aynı zamanda; D_4 aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$D_4 = \left\{ e, g, g^2, g^3, h, \underbrace{gh}_{xy^3}, \underbrace{g^2h}_{xy^2}, \underbrace{g^3h}_{xy} \right\} \text{ olup, mertebesi 8 olan devirsiz bir gruptur.}$$

Burada ,

$$gh = hg^{n-1} = hg^{4-1} = hg^3, \quad g^2h = hg^{n-2} = hg^{4-2} = hg^2, \quad g^3h = hg^{n-3} = hg^{4-3} = hg$$

bağıntıları kullanılmıştır. Bu elemanlarla çarpım tablosunu oluşturursak,

o	e	g	g ²	g ³	h	gh	g ² h	g ³ h
e	e	g	g ²	g ³	h	gh	g ² h	g ³ h
g	g	g ²	g ³	e	gh	g ² h	g ³ h	h
g ²	g ²	g ³	e	g	g ² h	g ³ h	h	gh
g ³	g ³	e	g	g ²	g ³ h	h	gh	g ² h
h	h	g ³ h	hg ²	gh	e	g ³	g ²	g
gh	gh	h	g ³ h	g ² h	g	e	g ³	g ²
g ² h	g ² h	gh	h	g ³ h	g ²	g	e	g ³
g ³ h	g ³ h	g ² h	gh	h	g ³	g ²	g	e

elde edilir. Burada, e elemanın mertebesi 1, g^2 elemanın mertebesi 2, g ve g^3 elemanlarının mertebesi 4, h , gh , g^2h ve g^3h elemanlarının mertebeleri 2 dir.

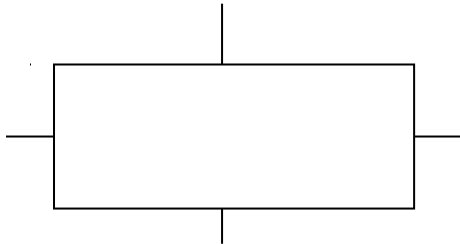
Tanım ($V_4 = \text{Klein-4 grubu}$): Köşeleri 1,2,3,4 olan dikdörtgenin hiç değişmemiş hareketi e , merkezi etrafındaki 180 derecelik dönme a , x eksen etrafında 180 derecelik dönme b ve y eksen etrafında 180 derecelik dönme c ile oluşturulan $\text{Klein } 4 = \{e, a, b, c\}$ grubuna **dikdörtgenin simetrileri grubu** denir ve V_4 ile gösterilir.

Örnek: Klein-4 grubunu inşa edelim.

Köşeleri 1,2,3,4 olan dikdörtgenin 180 derecelik dönmeyi a ile x eksen etrafında yansımayı b ile ve y eksen etrafında yansımayı c ile gösterirsek,

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I,$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$



o	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Burada örneğin, $aob = c$ olduğu kolayca görülür. Böylece bu dönme ile bir grup oluşturulur.

Bu grup, aşık olmaya üç tane öz alt gruba sahiptir. Bunlar, $\{e, a\}$, $\{e, b\}$ ve $\{e, c\}$ dir.

Burada $\{e, a, b\}$ bir alt grup değildir, çünkü V_4 ün işlemi altında kapalı olmadığından dolayı $ab = c$ ve $c \notin \{e, a, b\}$ dir.

13.2 Dihedral Grup Örnekleri

Örnek 1 D_n dihedral grubunun merkezini bulunuz.

Çözüm: Grubun merkezi tanımına göre

$x^i \in M \Rightarrow x^i y = y x^i$ olmalıdır. Fakat dihedral grubun tanımından $xy = yx^{n-1}$

$$x^i y = y x^{i(n-1)}$$

sağlanır. O halde,

$$\begin{aligned} x^i \in M &\Rightarrow x^i y = y x^i = y x^{i(n-1)} \\ &\Rightarrow x^i = x^{i(n-1)} \\ &\Rightarrow x^{2i} = (x^n)^i = e \\ &\Rightarrow n \mid 2i \end{aligned}$$

olmalıdır.

i) n tek ise $n \mid 2i \Rightarrow n \mid i$ ($0 \leq i < n$) olduğundan $i = 0$ bulunur. $M = \{e\}$ dir.

ii) n çift ise $n = 2k \Rightarrow 2k \mid 2i \Rightarrow k \mid i$ ($0 \leq i < 2k$) olduğundan

$$i = 0 \text{ veya } i = k = n/2$$

olmalıdır. $M = \{e, x^{n/2}\}$ dir.

Diğer taraftan, $n \neq 2i$ ise, $i = 0, 1, \dots, n-1$ için $y x^i \notin M$ dir. Çünkü,

$$\begin{aligned} y x^i \in M &\Rightarrow x(y x^i) = (y x^i)x = y x^{i+1} \\ &\Rightarrow (x y) x^i = (y x^{n-1}) x^i = y x^{n-1+i} = y x^{i+1} \\ &\Rightarrow x^2 = e \end{aligned}$$

dir. Yani, $n = 2$ olurdu.

$n = 2$ ise $M = \{e, x, y, yx\} = D_2$ ve $xy = yx$ olduğundan D_2 değişmeli gruptur.

D_n dihedral grubunun merkezi n tek ise $M = \{e\}$, $n > 2$ çift ise $M = \{e, x^{n/2}\}$ dir.

Örnek 2 D_4 dihedral grubunun alt gruplarını, normal alt gruplarını ve eşlenik sınıflarını bulunuz.

Çözüm: $D_4 = \{e, x, x^2, x^3, y, yx, yx^2, yx^3\}$ dihedral grubunun mertebesi 8 olup, önce alt gruplarını bulalım:

Lagrange Teoremine göre alt grupların mertebeleri 8'in bölenleri 1, 2, 4 ve 8 olduğundan

$$\begin{aligned} & \{e\}, D_4 \\ & \{e, y\}, \{e, x^2\}, \{e, yx\}, \{e, yx^2\}, \{e, yx^3\} \\ & \{e, x, x^2, x^3\}, \{e, x^2, y, yx^2\}, \{e, x^2, yx, yx^3\} \end{aligned}$$

alt gruplardır. Şimdi normal alt gruplarını bulalım:

$$\{e\} \text{ ve } D_4 \text{ ile mertebesi 2 olan } \{e, x^2\} \text{ ve}$$

indeksi 2 yapan yani mertebesi 4 olan alt gruplar

$$\{e, x, x^2, x^3\}, \{e, x^2, y, yx^2\}, \{e, x^2, yx, yx^3\}$$

normal alt gruplardır.

Eşlenik sınıfları ise

$$\begin{aligned} E_1 &= \{e\} \\ E_2 &= \{x^2\} \\ E_3 &= \{x, x^3\} \\ E_4 &= \{y, yx^2\} \\ E_5 &= \{yx, yx^3\} \end{aligned}$$

$$1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8$$

dir.

Örnek 3 $D_n = \{x, y \mid x^n = y^2 = e \text{ ve } xy = yx^{n-1}\}$ dihedral grubunun mertebesinin $2n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$x y = y x^{n-1}$$

$$x^2 y = x y x^{n-1} = y x^{n-1} x^{n-1} = y x^{2n-2} = y x^{2(n-1)}$$

$$x^3 y = x x y x^{n-1} = x y x^{n-1} x^{n-1} = x y x^{2n-2} = y x^{n-1} x^{2(n-1)} = y x^{3(n-1)}$$

...

$$x^i y = y x^{i(n-1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \text{ için doğrudur.}$$

$$x^n = e \text{ ve } i(n-1) \equiv k \pmod{n}, \quad 0 \leq k < n-1 \text{ olmak üzere}$$

$$x^i y = y x^{i(n-1)} = y x^k$$

bulunur.

$$D_n = \{e, x, x^2, \dots, x^{n-1}, y, yx, yx^2, \dots, yx^{n-1}\} = \{y^j x^i \mid 0 \leq i < n, j = 0, 1\}$$

kümesindeki elemanların sayısı

$$y^j x^0, y^j x^1, y^j x^2, \dots, y^j x^{n-1}$$

olmak üzere n tanedir. $j = 0, 1$ için mertebe $o(D_n) = 2n$ elde edilir.

Örnek 4 $D_3 = \{e, x, x^2, y, yx, yx^2\}$ dihedral grubunun elemanlarının mertebelerini bulunuz.

Çözüm:

$$o(e) = 1$$

$$o(x) = o(x^2) = 3$$

$$o(y) = o(yx) = o(yx^2) = 2$$

bulunur. Cayley Tablosu aşağıdadır:

e	e	x	x ²	y	yx	yx ²
e	e	x	x ²	y	yx	yx ²
x	x	x ²	e	yx ²	y	yx
x ²	x ²	e	x	yx	yx ²	y
y	y	yx	yx ²	e	x	x ²
yx	yx	yx ²	y	x ²	e	x
yx ²	yx ²	y	yx	x	x ²	e

Örnek 5 $D_4 = \{e, x, x^2, x^3, y, yx, yx^2, yx^3\}$ dihedral grubunun elemanlarının mertebelerini bulunuz.

Çözüm:

$$o(e) = 1$$

$$o(x) = 4$$

$$o(x^2) = o(y) = o(yx) = o(yx^2) = 2$$

$$o(x^3) = 4$$

bulunur.

Örnek 6 $D_{24} = \{x, y \mid x^{24} = y^2 = e \text{ ve } xy = yx^{23}\}$ dihedral grubunun x^4y elemanının mertebesini bulunuz.

Çözüm: $(xy)^2 = e$ olduğundan $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ dir. Bu bağıntıyı kullanarak

$$\begin{aligned} (x^4y)^2 &= x^4yx^4y = x^3xyx^3xy = x^3y^{-1}x^{-1}x^3y^{-1}x^{-1} \\ &= x^3y^{-1}x^2y^{-1}x^{-1} = x^3yx^2yx^{-1} = x^2xyxx^{-1} \\ &= x^2y^{-1}x^{-1}xy^{-1}x^{-1}x^{-1} = x^2y\underbrace{x^{-1}x}_{e}yx^{-1}x^{-1} = x^2x^{-2} = e \end{aligned}$$

olduğundan ikinci mertebededir.

Örnek 7 $D_{12} = \{x, y \mid x^{12} = y^2 = e \text{ ve } (xy)^2 = e\}$ dihedral grubundaki alt grupların mertebeleri nelerdir? Bu grupta $x = a^8b$, $y = a^{10}$ ve $z = a^3b$ elemanlarının mertebelerini bulunuz.

Çözüm: D_{12} dihedral grubunun mertebesi $o(D_{12}) = 2 \cdot 12 = 24$ olduğundan alt gruplarının mertebeleri 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 ve 24 olabilir.

$$xy = yx^{11} = yx^{-1} \Rightarrow xyx = y \text{ kullanılarak,}$$

$$\begin{aligned}
x^2 &= a^8 b a^8 b = a^7 \underbrace{a b a}_b a^7 b = a^7 b a^7 b = a^6 \underbrace{a b a}_b a^6 b = a^6 b a^6 b \\
&= a^5 \underbrace{a b a}_b a^5 b = a^5 b a^5 b = a^4 \underbrace{a b a}_b a^4 b = a^4 b a^4 b \\
&= a^3 \underbrace{a b a}_b a^3 b = a^3 b a^3 b = a^2 \underbrace{a b a}_b a^2 b = a^2 b a^2 b \\
&= a \underbrace{a b a}_b a b = a \underbrace{b a b}_b = b^2 = e
\end{aligned}$$

ya da $a b = (a b)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$ kullanılarak,

$$\begin{aligned}
x^2 &= a^8 b a^8 b = a^7 a b a a^7 b = a^7 b^{-1} a^{-1} a a^7 b = a^7 b a^7 b = a^6 a b a a^6 b \\
&= a^6 b^{-1} a^{-1} a a^6 b = a^6 b a^6 b = a^5 a b a a^5 b = a^5 b^{-1} a^{-1} a a^5 b \\
&= a^5 b a^5 b = a^4 a b a a^4 b = a^4 b^{-1} a^{-1} a a^4 b = a^4 b a^4 b \\
&= a^3 a b a a^3 b = a^3 b^{-1} a^{-1} a a^3 b = a^3 b a^3 b = a^2 a b a a^2 b \\
&= a^2 b^{-1} a^{-1} a a^2 b = a^2 b a^2 b = a a b a a b = a b^{-1} a^{-1} a b^{-1} a^{-1} \\
&= a \underbrace{b b a^{-1}}_e = e
\end{aligned}$$

olduğundan $x = a^8 b$ elemanı ikinci mertebededir.

$$\begin{aligned}
y^2 &= a^{20} = a^{12} a^8 = a^8 \\
y^3 &= a^{30} = (a^{12})^2 a^6 = a^6 \\
y^4 &= a^{40} = (a^{12})^3 a^4 = a^4 \\
y^5 &= a^{50} = (a^{12})^4 a^2 = a^2 \\
y^6 &= a^{60} = (a^{12})^5 = e
\end{aligned}$$

olduğundan $y = a^{10}$ elemanı altıncı mertebededir.

$a b = (a b)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$ kullanılarak,

$$\begin{aligned}
z^2 &= a^3 b a^3 b = a^2 \underbrace{a b}_{ba^{-1}} a^2 \underbrace{a b}_{ba^{-1}} = a^2 b a^{-1} a^2 b a^{-1} = a^2 b \underbrace{a b}_{ba^{-1}} a^{-1} \\
&= a^2 \underbrace{b b a^{-1}}_e a^{-1} = a^2 a^{-1} a^{-1} = e
\end{aligned}$$

olduğundan $z = a^3 b$ elemanı ikinci mertebededir.

Örnek 8 5-elemanlı bir devirli grubun D_5 dihedral grubunun normal alt grubu olduğunu gösteriniz.

Çözüm: 5-elemanlı bir devirli grup $C_5 = \{e, x, x^2, x^3, x^4\}$ ve

$D_5 = \{x, y \mid x^5 = y^2 = e \text{ ve } xy = yx^4\} = \{e, x, x^2, x^3, x^4, y, yx, yx^2, yx^3, yx^4\}$ dihedral grubu olup, indeks

$$[D_5 : C_5] = \frac{o(D_5)}{o(C_5)} = \frac{10}{5} = 2$$

olduğundan $C_5 \triangleleft D_5$ dir.

Kosetler,

$$C_5 = \{e, x, x^2, x^3, x^4\}$$

$$yC_5 = \{ye, yx, yx^2, yx^3, yx^4\} = \{y, yx, yx^2, yx^3, yx^4\}$$

olmak üzere, $D_5 = C_5 \cup yC_5$ olduğundan bölüm grubu,

$$D_5/C_5 = \{C_5, yC_5\}$$

şeklindedir. O halde $D_5/C_5 \cong C_2$ 'ye izomorftur.

Örnek 9 $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ kuaterniyonlar grubu ile

$D_4 = \{e, x, x^2, x^3, y, yx, yx^2, yx^3\}$ dihedral grubu izomorf mudur? Açıklayınız.

Çözüm: Kabul edelim ki $f : Q_8 \rightarrow D_4$ bir grup izomorfizması olsun.

$$o(i) = o(j) = o(k) = 4$$

$$o(-i) = o(-j) = o(-k) = 4$$

$\pm i, \pm j, \pm k \in Q_8$ elemanlarının mertebeleri 4 olduğundan bu elemanların f dönüşümü altındaki görüntülerinin de mertebesi 4 olmak zorundadır. Fakat D_4 ün elemanlarından mertebesi 4 olanlar sadece

$$o(x) = 4$$

$$o(x^3) = 4$$

olup, iki tanedir. Bu ise f dönüşümünün 1-1 olması ile çelişir. Bundan dolayı $Q_8 \not\cong D_4$ dır.

Örnek 10 D_2 dihedral grubu, C_4 devirli grubuna izomorf mudur ?

Çözüm:

$$D_2 = \{ e, g, h, gh \}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

$$C_4 = \{ e, g, g^2, g^3 \}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{array}$$

o	e	g	h	gh
e	e	g	h	gh
g	g	e	gh	h
h	h	gh	e	g
gh	gh	h	g	e

o	e	g	g ²	g ³
e	e	g	g ²	g ³
g	g	g ²	g ³	e
g ²	g ²	g ³	e	g
g ³	g ³	e	g	g ²

D_2 dihedral grubu C_4 devirli grubuna izomorf olamaz. Çünkü mertebeleri farklıdır.

Örnek 11 D_2 dihedral grubu, Klein-4 grubuna izomorf mudur ?

Çözüm:

$$D_2 = \{ e, g, h, gh \}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

$$V_4 = \{ e, a, b, c \}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

mertebeleri aynı olduğundan, D_2 dihedral grubu, Klein-4 grubuna izomorftur.

Örnek 12 C_4 devirli grubu, $G = \{ 1, -1, i, -i \}$ grubuna izomorf mudur ?

Çözüm:

$$C_4 = \{ e, g, g^2, g^3 \}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{array}$$

$$G = \{ 1, i, -1, -i \}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{array}$$

mertebeleri aynı olduğundan, izomorfturlar.