

SOYUT MATEMATİK

DERS NOTLARI

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin BİLGİÇ

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü

Eylül 2011

İçindekiler

1	Önermeler ve İspat Yöntemleri	1
2	Kümeler	13
3	Bağıntılar ve Özellikleri	28
4	Denklik Bağıntıları	41
5	Sıralama Bağıntıları	49
6	Fonksiyonlar	60
7	İşlem ve Özellikleri	71
8	Cebirsel Yapılar	83
9	Sayılabilirlik	99
10	Doğal Sayıların İnşası	109
11	Tümevarım İlkesi	119
12	Tamsayılar	125

Bölüm 1

Önermeler ve İspat Yöntemleri

Tanım 1.1 Doğru veya yanlış ama bunlardan sadece bir tanesi olabilen ifadelere *önerme* denir. Önermeler $p, q, r, \dots$ gibi harflerle gösterilir.

Örnek 1.2 Aşağıdaki ifadelerin önerme olup olmadığını bulalım:

- (a) 2 asal sayıdır.
- (b) Her n doğal sayısı için $2^n + 1$ asaldır. (**Dikkat:** 0 doğal sayıdır)
- (c) Düzlemde bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 derecedir.
- (d) 4'den büyük her çift sayı iki asal sayının toplamıdır. (Goldbach, 1742)
- (e) Yarın pikniğe gidelim.

Çözüm: Burada (a) ve (c) doğru birer önermedir. $n = 3$ için $2^n + 1 = 9$ asal olmadığından (b) yanlış bir önermedir. (d) ifadesi 1742'de Rus matematikçi Christian Goldbach tarafından ortaya atılmış bir iddiadır ve henüz doğru olup olmadığı ispatlanamamıştır. Ya doğru ya yanlış olacağından bir önermedir. (e) cümlesi kesin bir hüküm bildirmediğinden bir önerme değildir.

Not: Bir tahtada yazan “Bu tahtadaki her cümle yanlıştır” cümlesinin doğru olması da yanlış olması da çelişkiye yol açacağından bu cümle bir önerme değildir. Benzer şekilde bir Romalının söyleyeceği “Bütün Romalılar yalancıdır” cümlesi de önerme olamaz.

Tanım 1.3 İfadesinde değişkenler bulunan ve bu değişkenlerin alacağı değerlere göre doğru veya yanlış (ama bunlardan sadece bir tanesi) olabilen ifadelere *açık önerme* denir. Açık önermeler değişken sayısına göre $p(x), p(x, y), p(x, y, z), \dots$ gibi gösterilir.

Örnek 1.4 x bir reel sayıyı göstermek üzere, $p(x)$ açık önermesi “ $x^2 + x = 0$ ” olsun. $x = 0$ ve $x = -1$ için önerme doğrudur. Yani $p(0)$ ve $p(-1)$ doğrudur. Aksi halde önerme yanlıştır.

Birleşik Önergeler

Tanım 1.5 p ve q iki önerme olsun. “ p ve q ” önermesi bu önermelerden her ikisi de doğru iken doğru; aksi halde yanlış olan önermedir. Buna iki önermenin **kesişimi** de denir ve $p \wedge q$ ile gösterilir. “ p veya q ” önermesi de bu önermelerden en az birisi doğru iken doğru; aksi halde yanlış olan önermedir. Buna iki önermenin **birleşimi** de denir ve $p \vee q$ ile gösterilir. (**Dikkat:** “veya” kelimesinin Türkçe’deki kullanılışı farklı olabilir.)

Önergelerin ve bunlara karşılık gelen birleşik önermelerin alacağı değerleri bir tablo halinde gösterelim. Burada doğru için 1 sembolü veya D harfi; yanlış için ise 0 sembolü veya Y harfi yazılır. Bu tablolara “doğruluk tablosu” denir.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
D	D	D	D
D	Y	Y	D
Y	D	Y	D
Y	Y	Y	Y

veya

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Tablo 1.1: $p \wedge q$ ile $p \vee q$ önermelerinin doğruluk tablosu.

Tanım 1.6 Bir p önermesi doğru iken yanlış; yanlış iken doğru olan önermeye p ’nin **değili** veya **olumsuzu** denir ve $p', \sim p, \neg p, \bar{p}$ sembollerinde birisi ile gösterilir.

p	$\sim p$
1	0
0	1

Örnek 1.7 p : “Bir gün 24 saattir” önermesinin değili $\sim p$: “Bir gün 24 saat değildir” önermesidir. $q(x) : x^2 < 7$ önermesinin değili $\sim q(x) : x^2 \geq 7$ dir.

Tanım 1.8 Doğruluk değeri her zaman aynı olan p ve q önermelerine **eşdeğer** veya **denk** önermeler denir ve $p \equiv q$ yazılır. $p(x)$ ve $q(x)$ açık önermelerinin denk olması her x için $p(x)$ ve $q(x)$ önermelerinin aynı olmasıdır.

Örnek 1.9 p : “Her doğal sayı tektir” önermesi ile q : “63 asaldır” önermeleri denktir. Ayrıca sağdaki üç açık önerme de denktir: (x reel sayıyı göstermektedir)

$$r(x) : “x^2 < 25”, \quad s(x) : “x < 5 \text{ ve } -5 < x”, \quad t(x) : |x| < 5$$

Örnek 1.10 Aşağıdaki özelliklere De Morgan Kuralları denir:

$$(p \wedge q)' \equiv (p' \vee q') \quad \text{ve} \quad (p \vee q)' \equiv (p' \wedge q')$$

Bu özelliklerin doğru olduğunu tablo ile gösterin: (boşlukları doldurun)

p	q	p'	q'	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$
1	1	0	0						
1	0	0	1						
0	1	1	0						
0	0	1	1						

Tanım 1.11 “ p ise q ” önermesi p doğru ve q yanlış iken yanlış; aksi halde doğru olan önermedir. Buna **koşullu** önerme denir ve $p \implies q$ ile gösterilir. p 'ye **hipotez** q 'ya da **sonuç** önermesi denir. $p \implies q$ önermesi “ p , q 'yu gerektirir” şeklinde de okunur.

p	q	$p \implies q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Örnek 1.12 “ $2 < 1$ ise $2 < 3$ tür” önermesi doğrudur, çünkü $(0 \implies 1) \equiv 1$. Şimdi

$$p: \text{“Yağmur yağıyor”}, \quad p: \text{“Bahçe ısıralıyor”}$$

önergelerini düşünelim. Yağmur yağdığında her zaman bahçenin ısıraldığı bilindiğine göre $p \implies q$ önermesi doğrudur. (Yağmur yağmadığında zaten p yanlış olduğundan $p \implies q$ doğrudur.) Ancak $q \implies p$ doğru değildir. (Neden?)

Not: $p \implies q$ önermesinde

“ p önermesi q önermesi için yeter koşuldur”

“ q önermesi p önermesi için gerek koşuldur”

denir.

Örnek 1.13 $(p \implies q) \equiv (q' \implies p') \equiv (p' \vee q)$ olduğunu gösterelim.

p	q	p'	q'	$p \implies q$	$q' \implies p'$	$p' \vee q$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Buna göre aşağıdaki üç önermenin birbirine denk olduğunu (aslında doğru olduğunu) söyleyebiliriz:

- (a) Yağmur yağıyor $\implies$ bahçe ıslanıyor.
- (b) Bahçe ıslanmıyor $\implies$ yağmur yağmıyor
- (c) Yağmur yağmıyor veya bahçe ıslanıyor.

Tanım 1.14 $p \implies q$ ve $q \implies p$ önermeleri aynı anda doğru iken doğru, aksi halde yanlış olan önermeye *iki yönlü koşullu önerme* denir ve $p \iff q$ şeklinde yazılır. “ p ancak ve ancak q ” şeklinde veya “ p için gerek ve yeter şart q dur” şeklinde okunur. Doğruluk tablosu şu şekildedir.

p	q	$p \implies q$	$q \implies p$	$p \iff q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Tablodan da anlaşılacağı gibi aslında $(p \iff q) \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p)$. Ayrıca şunu da diyebiliriz:

“ $p \iff q$ önermesi, p ile q denk iken doğru; aksi halde yanlış olan önermedir.”

Örnek 1.15 “Bir asal sayı çifttir ancak ve ancak 2 dir” önermesini ele alalım. p : “ n sayısı asal ve çifttir” ve q : “ $n = 2$ ” diyelim. $p \implies q$ nun ve $q \implies p$ nin doğru olduğu açıktır. O halde $p \iff q$ doğrudur.

Örnek 1.16 x bir reel sayıyı göstermek üzere her x için $|x| = 1 \iff x^3 = x$ önermesi doğru mudur?

Çözüm: $|x| = 1 \implies x = 1$ veya $x = -1$ olup $x^3 = x$ doğru olur. Ancak $x = 0$ için $x^3 = x$ olur fakat $|x| \neq 1$ dir. O halde $|x| = 1 \iff x^3 = x$ önermesi yanlıştır. Ama, $|x| = 1 \iff x^2 = 1$ önermesi doğrudur.

Niceleyiciler

Önermelerdeki “bütün”, “her”, “en az bir”, “bazı”, “hiçbir” gibi kelimelere *niceleyici* denir. Mesela, “bütün öğrenciler bayandır”, “sıfırdan büyük en az bir tamsayı vardır” önermelerinde olduğu gibi. Şimdi, bir $p(x)$ açık önermesi verilsin.

“Bütün x ler için $p(x)$ doğrudur” yerine kısaca $\forall x, p(x)$

“En az bir x için $p(x)$ doğrudur” yerine kısaca $\exists x, p(x)$

yazacağız. Burada $\forall$ ve $\exists$ niceleyicilerine sırasıyla *evrensel* ve *varlıksal niceleyici* denir.

Örnek 1.17 “ $\forall x$ tamsayısı için $|x| = x$ ” önermesi yanlıştır. Çünkü $x = -2$ için $|-2| \neq -2$ dir.

Örnek 1.18 “ $\forall x$ reel sayısı için $x^2 - x + 2 \neq 0$ ” önermesi doğrudur. Çünkü $x^2 - x + 2 = 0$ denkleminin diskriminantı $\Delta = b^2 - 4ac = -7 < 0$ olup bu denklemin reel kökü yoktur.

Örnek 1.19 “ $\exists x$ reel sayısı için $x^2 = x$ ” önermesi doğrudur. Çünkü $x = 0$ için $0^2 = 0$ dir.

Örnek 1.20 “ $\exists n$ doğal sayısı için $3(n + 2)$ asaldır” önermesi yanlıştır. Çünkü $3(n + 2)$ sayısı 3’den büyük ve 3’ün bir tam katı olup asal olamaz.

Not: $\exists$ ve $\forall$ niceleyicileri ile başlayan önermelerin olumsuzları şöyledir:

$$\boxed{\sim(\exists, p(x)) \equiv \forall x, \sim p(x)} \quad \text{ve} \quad \boxed{\sim(\forall, p(x)) \equiv \exists x, \sim p(x)}$$

Örnek 1.21

$$\sim(\forall x, x + 3 < 10) \equiv (\exists x, x + 3 \geq 10)$$

$$\sim(\exists x, x + 3 = 7) \equiv (\forall x, x + 3 \neq 7)$$

Teorem ve İspat Yöntemleri

Tanım 1.22 Doğru olduğu ispatlanmış önermelere *teorem* denir. Teoremler genelde $p \implies q$ şeklinde verilir. Böyle bir teoremin ispatını yapmak için p doğru iken q nun doğru olduğu gösterilmelidir. (Bu yüzden p ’ye hipotez, q ’ya da sonuç denmektedir.) Bazen teoremler $p \iff q$ şeklinde verilir. Bu durumda $p \implies q$ ile $q \implies p$ önermeleri ayrı ayrı ispatlanmalıdır.

Şimdi temel ispat yöntemlerini görelim:

A) Doğruluk Çizelgesi Yöntemi

Bu yöntemle bir teoremin her zaman doğru olduğu tablo ile gösterilir.

Örnek 1.23 $p \implies q$ ve $r' \implies q'$ önermeleri doğru ise $r' \implies p'$ önermesinin doğru olduğunu gösterin.

Çözüm: Burada hipotez (H) ve sonuç (S) önermeleri şöyle seçilir:

$$H : (p \implies q) \wedge (r' \implies q') \quad S : r' \implies p'$$

Daha sonra $H \implies S$ teoreminin her zaman doğru olduğu gösterilir.

p	q	r	p'	q'	r'	$p \implies q$	$r' \implies q'$	H	$S : r' \implies p'$	$H \implies S$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Soru: $p \implies q$ ve $q \implies r$ önermeleri doğru iken $p \implies r$ önermesinin de doğru olduğunu gösterin.

B) Doğrudan İspat Yöntemi

Bu yöntemde, $p \implies q$ önermesini ispatlamak için daha önceden doğru olduğu bilinen

$$p \implies r_1, r_1 \implies r_2, r_2 \implies r_3, \dots, r_{n-1} \implies r_n, r_n \implies q$$

önergeler zincirinden faydalanılır.

Örnek 1.24 “Bir tek doğal sayının karesi tektir” teoremini ispatlayalım. p : “ n tektir” ve q : “ n^2 tektir” diyelim. Şimdi

$$\begin{aligned}
n \text{ tek} &\implies \exists k \text{ tamsayısı için } n = 2k + 1 \\
&\implies n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\
&\implies n^2 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_m) + 1 = 2m + 1 \\
&\implies n^2 \text{ tektir, çünkü } m \text{ tamsayı}
\end{aligned}$$

C) Dolaylı İspat Yöntemi

$p \implies q$ önermesi yerine onun dengi olan $q' \implies p'$ önermesi ispatlanır. Bu önermeye $p \implies q$ nun *karşıt tersi* denir.

Örnek 1.25 a ve b iki doğal sayı olsun. $a \cdot b$ bir çift sayı ise a ile b den en az birisinin çift olduğunu gösterelim. p önermesi “ $a \cdot b$ çift” ve q önermesi de “ a çift veya b çift” olsun. Biz $p \implies q$ yerine $q' \implies p'$

önermesini ispatlayalım. q' :“ a ve b tek”, p' :“ $a \cdot b$ tek” olur.

$$\begin{aligned} a \text{ ve } b \text{ tek} &\implies a = 2n + 1, b = 2m + 1 \text{ şeklindedir } (n, m \text{ tamsayı}) \\ &\implies ab = 4nm + 2n + 2m = 2(\underbrace{2nm + n + m}_k) + 1 \\ &\implies ab \text{ tektir, çünkü } k \text{ bir tamsayı} \end{aligned}$$

Soru: $3x + 2 \neq 5$ ise $2x + 3 \neq 5$ olduğunu gösterin.

D) Olmayana Ergi Yöntemi

$p \implies q$ teoremini ispatlamak için p nin doğru olduğu kabul edilir. Daha sonra q nun yanlış olduğu kabul edilip bir çelişki bulunur. (Genelde p nin doğru olmasıyla çelişen bir durum bulunur.) Böylece q nun doğru olduğu sonucuna varılır.

Örnek 1.26 x, y birer tamsayı olsun. $x \cdot y$ tek ise x ile y den her ikisinin de tek olduğunu ispatlayalım. (Bu ispat dolaylı ispat yöntemi ile de yapılabilir.)

Çözüm: $x \cdot y$ tek olsun. x, y nin her ikisinin de tek olduğunu göstereceğiz. Aksini kabul edelim; yani x, y den en az biri çift olsun. Mesela x çift olsun. (y nin çift olduğunu kabul edilirse aynı ispat yapılır) O halde bir k tamsayısı için $x = 2k$ dır. Şimdi $x \cdot y = (2k)y = 2(ky)$ olup $x \cdot y$ nin çift olduğu görülür. Bu durum bir çelişkidir; çünkü $x \cdot y$ tek kabul edilmişti. O halde x, y nin her ikisi de tektir.

Not: a, b birer tamsayı olmak üzere eğer $ax = b$ olacak şekilde en az bir x tamsayısı mevcutsa $a|b$ yazıp “ a, b yi böler” şeklinde okuyacağız. Bu tanıma göre $0|0$ önermesi doğrudur. **Dikkat:** a/b veya $\frac{a}{b}$ ifadesi bir önerme değildir.

Örnek 1.27 a bir tamsayı olmak üzere $6|a \implies 2|a$ olduğunu olmayana ergi yöntemi ile gösterin.

Çözüm: $6|a$ olsun. O halde bir k tamsayısı için $a = 6k$ dır. Şimdi $2 \nmid a$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda a tektir. Ancak $a = 6k = 2(3k)$ olduğundan a çifttir. Bu bir çelişkidir. O halde $2|a$ olmalıdır.

Not: Her zaman doğru olduğu iddia edilen bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için bir ters örnek (yanlış örnek) verilir. Yani $p \implies q$ önermesinde p yi doğru fakat q yu yanlış yapan bir örnek aranır.

Örnek 1.28 a, b, c, d tamsayılar olsun. $ab|cd \implies a|c$ veya $b|d$ önermesi doğru mudur?

Çözüm: Bu önerme her a, b, c, d için verilmiştir. Önerme doğru değildir; mesela $a = 6, b = 5, c = 10, d = 9$ alınırsa, $30|90$ dır fakat $6 \nmid 10$ ve $5 \nmid 9$ dur.

Not: $\forall x, p(x)$ önermesinin yanlış olduğunu göstermek için $\exists x, \sim p(x)$ önermesinin doğru olduğu ispatlanır. $\exists x, p(x)$ önermesinin yanlış olduğunu göstermek için $\forall x, \sim p(x)$ önermesinin doğru olduğu ispatlanır.

Örnek 1.29 $\exists x$ reel sayısı için $x^2 < 0$ önermesi yanlıştır; çünkü $\forall x$ reel sayısı için $x^2 \geq 0$ dir.

Soru: Çalışmazsam uyuyacağım, üzülürsem uyumayacağım. O halde üzülürsem çalışacağım. İspatlayın.

Örnek 1.30 $2^m - 1$ bir asal sayı ise m nin de asal olduğunu gösterin.

Çözüm: Dolaylı ispat yöntemini kullanalım. m asal olmasın. O halde $n > 1, k > 1$ olmak üzere $m = nk$ şeklindedir. Şimdi

$$2^m - 1 = (2^n)^k - 1 = \underbrace{(2^n - 1)}_A \underbrace{(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \dots + 2^n + 1)}_B$$

Şimdi $n > 1$ olduğundan $A > 1$ dir. Ayrıca $k > 1$ olduğundan $B > 1$ dir. Bu durumda $2^m - 1$ in asal olmadığı görülür. $\square$

Örnek 1.31 $\sqrt{2}$ reel sayısının irrasyonel olduğunu gösterelim. $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olduğunu kabul edelim. O halde a, b ve $b \neq 0$ tamsayıları için

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

şeklindedir. Burada a ile b nin (1 den büyük) ortak çarpanı olmadığını kabul edebiliriz. Şimdi

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \implies 2b^2 = a^2 \implies a^2 \text{ çift} \implies a \text{ çift}$$

olur. $a = 2k$ dersek

$$2b^2 = a^2 \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2 \implies b^2 \text{ çift} \implies b \text{ çift}$$

olur. Yani a ile b nin 1 den büyük ortak çarpanı (yani 2) olur. Bu bir çelişkidir. O halde $\sqrt{2}$ rasyonel değildir. $\square$

Not: Bir önceki örnekte aşağıdaki önermeye olmayan ergi yöntemi uygulanmıştır:

$$a, b \text{ aralarında asal iki tamsayı} \implies \frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$$

Soru: $\sqrt{3}$ ve $\sqrt{6}$ sayılarının irrasyonel olduğunu gösterin. (**İpucu:** p bir asal sayı ve $p|ab \implies p|a$ veya $p|b$ dir.)

ALİŞTIRMALAR

1.) $[p \implies (q \wedge r)] \equiv [(p \implies q) \wedge (p \implies r)]$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \implies q$	$p \implies r$	$p \implies (q \wedge r)$	$(p \implies q) \wedge (p \implies r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

2.) $[p' \implies (q \implies r')] \equiv [(q \wedge r) \implies p]$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

p	q	r	p'	r'	$q \implies r'$	$q \wedge r$	$p' \implies (q \implies r')$	$(q \wedge r) \implies p$
1	1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1

3.) $(p \iff q) \implies [(p \wedge r) \iff (q \wedge r)]$ önermesinin doğruluk tablosunu yapınız.

Çözüm:

p	q	r	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$p \iff q$	$(p \wedge r) \iff (q \wedge r)$	$(p \iff q) \implies (p \wedge r) \iff (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1

4.) Aşağıdaki dağılıma kurallarının doğru olduğunu gösterin:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

ve

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Çözüm:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Diğer özelliğin ispatı da aşağıdaki tablodadır:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

5.) “3 sayısı a ’yı bölmüyor ise 18 sayısı da a ’yı bölmez” önermesinin doğru olduğunu ispat yöntemlerinden birini kullanarak gösterin.

Çözüm: p önermesi: $3 \nmid a$ ve q önermesi: $18 \nmid a$ olsun. Dolaylı ispat yöntemini kullanalım; yani $q' \implies p'$ önermesini ispatlayalım:

$$18 \mid a \implies a = 18k, (k : \text{tamsayı}) \implies a = 3(6k) \implies 3 \mid a$$

çünkü $6k$ bir tamsayıdır. Böylece $p \implies q$ ispatlanmış olur.

6.) $[(p \implies q) \wedge (p \implies r)] \equiv [p \implies (q \wedge r)]$ olduğunu tablo yapmadan gösterin.

Çözüm: $(p \implies q) \equiv (p' \vee q)$ denliğini ve $\vee$ ’nın $\wedge$ üzerine dağılma özelliğini kullanırsak:

$$(p \implies q) \wedge (p \implies r) \equiv (p' \vee q) \wedge (p' \vee r) \equiv p' \vee (q \wedge r) \equiv [p \implies (q \wedge r)]$$

elde edilir.

- 7.) $(p \implies q) \implies r$ önermesinin doğruluk tablosunda, bu önermenin sütununda kaç tane 0 vardır?
☐ yoktur ☐ 2 tane ☒ 3 tane ☐ 4 tane ☐ Hiçbiri
- 8.) p : “ $\exists x$ tamsayı, $x^2 + 1 = -x$ ” olsun ve q : “ $\forall x$ reel sayı, $x^4 > x^2$ ” olsun. Buna göre:
☐ p, q : Doğru ☒ p, q : Yanlış ☐ p : Doğru, q : Yanlış ☐ p : Yanlış, q : Doğru ☐ Hiçbiri
- 9.) $(p \implies q)'$ önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?
☒ $p \wedge q'$ ☐ $p' \wedge q$ ☐ $p \vee q'$ ☐ $p' \vee q$ ☐ Hiçbiri
- 10.) p : “ $\exists x$ tamsayı, $x^2 = -x$ ” olsun ve q : “ $\forall x$ reel sayı, $x^2 > x$ ” olsun. Buna göre:
☐ p, q : Doğru ☐ p, q : Yanlış ☒ p : Doğru, q : Yanlış ☐ p : Yanlış, q : Doğru ☐ Hiçbiri
- 11.) $(p \wedge (p \implies q)) \implies q$ önermesinin doğruluk tablosunda bu önermenin sütununda kaç tane 0 vardır?
☒ yoktur ☐ 2 tane ☐ 3 tane ☐ 4 tane ☐ Hiçbiri
- 12.) $(p \implies q) \equiv (\sim q \implies \sim p)$ ilkesini temel alan ispat yönteminin adı nedir?
☐ Doğrudan ispat ☒ Dolaylı ispat ☐ Olmayana Ergi ☐ Çelişki bulma ☐ Hiçbiri
- 13.) Aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır? (t :tamsayı, n :doğal sayı, m :pozitif doğal sayı, x :reel sayı)
☐ $\forall t, t \leq t^4$ ☐ $\exists n, n + 6 = n^3$ ☒ $\forall m, m^2 \neq 6m$ ☐ $\exists x, x + 1 = x^2$ ☐ Hiçbiri
- 14.) $p \implies q$ önermesinin olumsuzu aşağıdakilerden hangisidir?
☒ $p \wedge q'$ ☐ $p' \wedge q$ ☐ $p \vee q'$ ☐ $p' \vee q$ ☐ Hiçbiri
- 15.) $(p' \implies q')'$ aşağıdakilerden hangisidir?
☒ $p' \wedge q$ ☐ $p' \vee q$ ☐ $p \wedge q'$ ☐ $p \vee q'$ ☐ Hiçbiri
- 16.) Aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur? (x :reel sayı, n :doğal sayı, t :tamsayı, r :rasyonel sayı)
☐ $\forall x, x^2 + 1 < 1$ ☐ $\exists n, 4n$ asaldir ☒ $\forall t, t(t + 3) > -3$ ☐ $\forall r, 8r$ tamsayıdır ☐ Hiçbiri
- 17.) $(p \wedge q) \implies (p \implies q)$ önermesinin doğruluk tablosunda bu önermenin sütununda kaç tane 0 vardır?
☐ 1 tane ☐ 3 tane ☐ 4 tane ☒ yoktur ☐ Hiçbiri
- 18.) $(p \implies q')'$ aşağıdakilerden hangisidir?
☐ $p' \wedge q$ ☐ $p \vee q$ ☒ $p \wedge q$ ☐ $p \vee q'$ ☐ Hiçbiri
- 19.) Aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur? (n :doğal sayı, x :reel sayı, t :tamsayı, r :rasyonel sayı)
☐ $\exists n, n^2$ asaldir ☐ $\forall x, x^2 - 3 < -3$ ☒ $\forall t, t(t + 4) \geq -5$ ☐ $\forall r, r^2$ tamsayıdır ☐ Hiçbiri
- 20.) $(p \wedge q) \implies (p \implies q)$ önermesinin doğruluk tablosunda bu önermenin sütununda kaç tane 1 vardır?
☒ 4 tane ☐ 1 tane ☐ 3 tane ☐ yoktur ☐ Hiçbiri
- 21.) $(p \wedge q)' \iff (p' \vee q')$ önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?
☐ $p \wedge q$ ☐ $p \vee q'$ ☒ $p \vee p'$ ☐ $p \wedge p'$ ☐ Hiçbiri

22.) Aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır? (x : reel sayı, y : tamsayı olmayan reel sayı, n : doğal sayı, t : tamsayı)

☒ $\forall x, x^3$ rasyonel ☐ $\exists y, y^3$ tamsayı ☐ $\forall n, n+1$ doğal sayı ☐ $\exists t, \sqrt{t^2+40}$ asal ☐ Hiçbiri

23.) p : “7 asal ise $\sqrt{2}$ rasyonel sayıdır”, q : “ $\sqrt{6}$ doğal sayı $\iff$ 1 asaldır” olsun. Buna göre:

☐ p, q : Doğru ☐ p : Doğru, q : Yanlış ☒ p : Yanlış, q : Doğru ☐ p, q : Yanlış ☐ Hiçbiri

24.) Kuşlar ötüyor ise güneş doğuyor. Yağmur yağıyor ise güneş doğmuyor. Yağmur yağdığına göre aşağıdakilerden hangisi söylenebilir.

☐ Güneş doğuyor ☐ Yağmur yağmıyor ☐ Kuşlar ötüyor ☒ Kuşlar ötmüyor ☐ Hiçbiri

25.) $p \wedge (q \vee r)$ önermesinin doğruluk tablosunda, bu önermenin sütununda kaç tane 1 vardır?

☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ Hiçbiri

26.) Aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır? (x : reel sayı, n : doğal sayı, t : tamsayı)

☒ $\forall x, \sqrt{x^3}$ reel ☐ 121 asal ise 7 asal değil ☐ $\forall n, n+1$ tamsayı ☐ $\exists t, \sqrt{t^2+49}$ asal ☐ Hiçbiri

27.) p ve q doğru, r de yanlış bir önerme ise aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

☐ $(p \implies r) \vee q$ ☐ $(r \wedge q) \implies \sim p$ ☐ $\sim p \iff (\sim q \wedge \sim r)$ ☐ $\sim (p \implies r)$ ☒ Hiçbiri

28.) $(a < b \implies a = b)$ önermesinin olumsuzu aşağıdakilerden hangisidir? (İpucu: $(p \implies q) \equiv p' \vee q$)

☒ $a < b$ ☐ $b < a$ ☐ $a = b$ ☐ $a \geq b$ ☐ Hiçbiri

29.) $x > y \implies x = y$ önermesinin olumsuzu hangisidir? (İpucu: $(p \implies q) \equiv p' \vee q$)

☐ $x < y$ ☒ $x > y$ ☐ $x \leq y$ ☐ $x \geq y$ ☐ Hiçbiri

30.) $p \iff q$ önermesinin olumsuzu aşağıdakilerden hangisidir?

☒ $(p' \vee q) \implies (p' \wedge q)$ ☐ $p' \iff q'$ ☐ $p \vee q$ ☐ $p \wedge q$ ☐ Hiçbiri

31.) p : “15 asal değil ise $\sqrt{2}$ rasyonel sayıdır”, q : “ $\sqrt{6}$ rasyonel $\iff$ 9 asaldır” olsun. Buna göre:

☐ p, q : Doğru ☐ p : Doğru, q : Yanlış ☒ p : Yanlış, q : Doğru ☐ p, q : Yanlış ☐ Hiçbiri

Bölüm 2

Kümeler

Tanım 2.1 İyi tanımlanmış nesnelerin bir topluluğuna **küme** denir. Kümeler genelde $A, B, C, \dots$ gibi büyük harflerle; kümenin elemanları da $a, b, c, \dots$ gibi küçük harflerle gösterilir. Eğer bir x elemanı bir A kümesine aitse bunu $x \in A$; aksi halde $x \notin A$ şeklinde gösteririz. Bir kümeyi, elemanlarını teker teker yazarak gösterme yöntemine **listeleme yöntemi** denir. Mesela

$$A = \{ 2, 3, 5 \}.$$

Bir kümeyi elemanlarının taşıdığı ortak özellikleri söyleyerek yazabiliriz. Bunun için

$$\{ x : p(x) \}$$

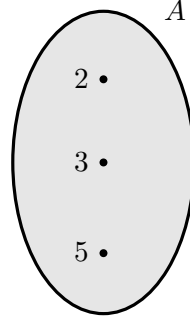
gösterimi kullanılır. Bu küme “ $p(x)$ açık önermesini sağlayan bütün x ’lerin kümesi”dir. Bu yöntemle **ortak özellik yöntemi** denir. O zaman

$$A = \{ x \in \mathbb{R} : (x - 2)(x^2 - 8x + 15) = 0 \}$$

yazılabilir. ($\mathbb{R}$ reel sayılar kümesidir.)

Kümeleri düzlemdeki kapalı eğrilerle ve elemanlarını da bu eğri içinde birer nokta olarak gösterebiliriz. Bu yöntemle **Venn¹ Şeması yöntemi** denir.

¹John Venn (1834–1923)

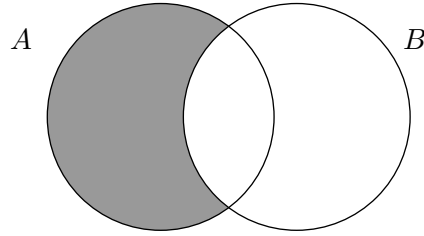
Şekil 2.1: $A = \{2, 3, 5\}$ kümesinin Venn şeması ile gösterimi

Tanım 2.2 A ve B iki küme olsun. Eğer A 'nın her elemanı aynı zamanda B 'nin de bir elemanı ise A 'ya B 'nin bir **alt kümesi** denir ve $A \subseteq B$ yazılır. Eğer $A \subseteq B$ ve B 'de A 'ya ait olmayan en az bir eleman varsa A 'ya B 'nin bir **özalt kümesi** denir ve $A \subsetneq B$ yazılır. Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise o zaman A ile B kümelerine **eşittir** denir ve $A = B$ yazılır.

Tanım 2.3 A ve B iki küme olsun. A da olup B de olmayan elemanların kümesine A ile B nin **farkı** denir ve $A \setminus B$ veya $A - B$ ile gösterilir.

$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\} = \{x \in A : x \notin B\}$$

yazabiliriz. Ancak $A \setminus B = \{x \notin B : x \in A\}$ yazamayız.

Şekil 2.2: İki kümenin farkı $A \setminus B$

Tanım 2.4 Üzerinde çalışılan en geniş kümeye **evrensel küme** diyeceğiz ve E ile göstereceğiz. A bir küme ise A 'da olmayan (ve evrensel kümede olan) elemanların kümesine A 'nın tümleyeni denir ve A' veya $\bar{A}$ ile gösterilir. O halde:

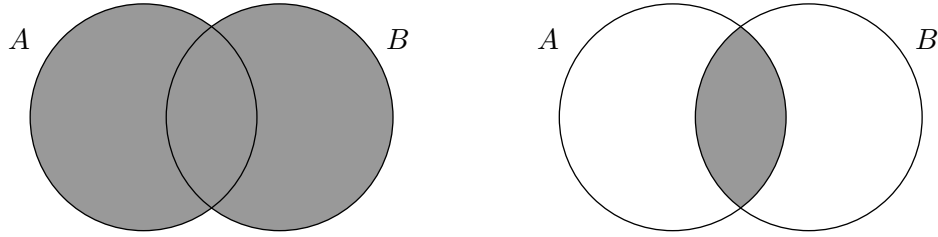
$$A' = \{x : x \notin A\} = \{x \in E : x \notin A\} = E \setminus A$$

yazılabilir. Hiçbir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir ve $\emptyset$ ile gösterilir. Boş küme her kümenin alt kümesidir ve bütün boş kümeler birbirine eşittir.

Tanım 2.5 A ve B iki küme olsun. A ya, B 'ye veya her ikisine ait olan elemanların kümesine A ile B nin **birleşimi** denir ve $A \cup B$ ile gösterilir. Hem A ya hem de B 'ye aynı anda ait olan elemanların kümesine A ile B nin **kesişi**mi (**arakesiti**) denir ve $A \cap B$ ile gösterilir. Kesişimi boş olan kümelere **ayrık** kümeler denir.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\} = \{x \in A : x \in B\}$$



Şekil 2.3: İki kümenin birleşimi $A \cup B$ ve kesişimi $A \cap B$

Kümelerle İlgili İşlemlerin Özellikleri

- 1.) a) Her A kümesi için $A \subseteq A$ (Yansıma özelliği)
 b) $A \subseteq B, B \subseteq A \implies A = B$ (Simetri Özelliği)
 c) $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$ dir. (Geçişme özelliği)
- 2.) $A \cup A = A, A \cap A = A$
- 3.) $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$
- 4.) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 5.) Dağılma Kuralları:
 a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 6.) $\emptyset' = E, E' = \emptyset$
- 7.) De Morgan Kuralları:
 $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- 8.) $A \subseteq B \implies B' \subseteq A'$

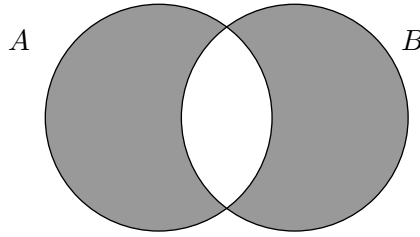
$$9.) \quad A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B \\ A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$$

$$10.) \quad A \subseteq B \implies A \cup B = B \text{ ve } A \cap B = A$$

Not: $A \cup B \cap C$, $A \cap B \cup C$ veya $A \setminus B \cup C$ gibi ifadeler anlamsızdır. Kümelerdeki işlemlerin öncelik sırası olmadığından mutlaka parantez kullanılmalıdır. Ancak yanyana birden fazla kesişim (veya birleşim) işlemi için parantez kullanılmayabilir. (Neden?)

Tanım 2.6 A ve B iki küme olsun. $A \cup B$ ye ait olup $A \cap B$ ye ait olmayan elemanların kümesine A ile B nin *simetrik farkı* denir ve $A \Delta B$ ile gösterilir.

$$A \Delta B = \{x : x \in A \cup B, x \notin A \cap B\} = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



Şekil 2.4: İki kümenin simetrik farkı $A \Delta B$

Şekilden de anlaşılacağı gibi $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ diyebiliriz. Ayrıca $A \Delta B = B \Delta A$ dır, çünkü:

$$A \Delta B = \{x : x \in A \cup B, x \notin A \cap B\} = \{x : x \in B \cup A, x \notin B \cap A\} = B \Delta A.$$

Tanım 2.7 Eleman sayısına bir doğal sayı karşılık getirilebilen kümelere *sonlu küme*; aksi halde *sonsuz küme* denir. Mesela $(0, 1)$ açık aralığı ve tek doğal sayılar kümesi $\{1, 3, 5, \dots\}$ sonsuz kümelerdir. $B = \{a, b, c, d\}$ kümesi 4 elemanlı olup sonlu bir kümedir. Bir A kümesinin eleman sayısını $s(A)$ ile göstereceğiz. Bu durumda $s(\emptyset) = 0$ olur. Ayrıca

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \\ s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

formülleri doğrudur. A, B ve C kümeleri ikişer ikişer ayrık iseler:

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C).$$

Kümeler Ailesi

Elimizde bir takım kümeler olsun. Bu kümeleri $A, B, C, D, \dots$ gibi harflerle göstermek yerine; mesela $A_1, A_2, A_3, \dots$ şeklinde göstermek daha kolay olacaktır. Bu durumda kümeleri $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ kümesinin elemanlarını kullanarak indislemiş (damgalamış) oluruz. İşte bir takım kümeleri indislemek için kullandığımız I kümesine **indis kümesi**, her $i \in I$ elemanına bir **indis**, her $i \in I$ için A_i kümesine de **indislenmiş küme** denir. Elemanları bir I indis kümesi tarafından indislenmiş kümelerin kümesine de bir **kümeler ailesi** denir. Böyle bir kümeler ailesi

$$\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$$

şekline gösterilir.

Örnek 2.8 $\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{a\}, \{a, e, f, g\}, \{a, c\}\}$ olsun. Burada $I = \{1, 3, 4, 6\}$ indis kümesi ve

$$A_1 = \{a, b\}, A_3 = \{a\}, A_4 = \{a, e, f, g\}, A_6 = \{a, c\}$$

diyebiliriz. Bu durumda $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ yazılır.

Tanım 2.9 $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ kümeler ailesi verilsin. Bu ailenin **birleşimi**

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \text{En az bir } i \in I \text{ için } x \in A_i\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ailenin **kesişimi** de

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \text{Her } i \in I \text{ için } x \in A_i\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.10 Bir önceki örnekte:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &= A_1 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_6 = \{a, b, c, e, f, g\} \\ \bigcap_{i \in I} A_i &= A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 = \{a\} \end{aligned}$$

Örnek 2.11 $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ ve her $n \in I$ için $A_n = [0, \frac{1}{n}]$ kapalı aralığı olsun. Bu durumda

$$\bigcup_{n \in I} A_n = [0, 1], \quad \bigcap_{n \in I} A_n = \{0\}.$$

Genelleştirilmiş Dağılma Kuralları

$\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ve $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$ aileleri verilsin. Bu durumda kesişimin birleşim üzerine dağılma kuralının genel hali:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J} (A_i \cap B_j)\right)$$

Ayrıca, birleşimin kesişim üzerine dağılma kuralının genel hali:

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} (A_i \cup B_j)\right)$$

İspat:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) &\iff x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \text{ ve } x \in \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \\ &\iff \exists i \in I, x \in A_i \text{ ve } \exists j \in J, x \in B_j \\ &\iff \exists i \in I \text{ ve } \exists j \in J \text{ için } x \in A_i \text{ ve } x \in B_j \\ &\iff \exists i \in I \text{ ve } \exists j \in J \text{ için } x \in A_i \cap B_j \\ &\iff x \in \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J} (A_i \cap B_j)\right) \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır. Diğer kısmın ispatı da şöyledir:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) &\iff x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \text{ veya } x \in \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) \\ &\iff \forall i \in I, x \in A_i \text{ veya } \forall j \in J, x \in B_j \\ &\iff \forall i \in I \text{ ve } \forall j \in J \text{ için } x \in A_i \text{ veya } x \in B_j \\ &\iff \forall i \in I \text{ ve } \forall j \in J \text{ için } x \in A_i \cup B_j \\ &\iff x \in \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} (A_i \cup B_j)\right) \end{aligned}$$

Örnek 2.12 $\mathcal{A} = \{A_1, A_3, A_5\}$ ve $\mathcal{B} = \{B_2, B_4\}$ olsun. Bu durumda $I = \{1, 3, 5\}$, $J = \{2, 4\}$ olur.

$$\begin{aligned} (A_1 \cup A_3 \cup A_5) \cap (B_2 \cup B_4) &= \\ (A_1 \cap B_2) \cup (A_1 \cap B_4) \cup (A_3 \cap B_2) \cup (A_3 \cap B_4) \cup (A_5 \cap B_2) \cup (A_5 \cap B_4) \end{aligned}$$

Genelleştirilmiş De Morgan Kuralları

$\{A_i : i \in I\}$ ailesi verilsin. Bu durumda

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' = \bigcup_{i \in I} A_i' \quad \text{ve} \quad \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)' = \bigcap_{i \in I} A_i'$$

İspat:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' &\iff x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \\ &\iff \exists i \in I \text{ için } x \notin A_i \\ &\iff \exists i \in I \text{ için } x \in A_i' \\ &\iff x \in \bigcup_{i \in I} A_i' \end{aligned}$$

Diğer kısmın ispatı da şöyledir:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)' &\iff x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \\ &\iff \forall i \in I \text{ için } x \notin A_i \\ &\iff \forall i \in I \text{ için } x \in A_i' \\ &\iff x \in \bigcap_{i \in I} A_i' \end{aligned}$$

Çözümlü Örnekler

1.) $A \setminus B = A \cap B'$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\} = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B'\} = A \cap B'$$

2.) $A \cup B = B \cap C \implies A \subseteq B \subseteq C$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $A \subseteq A \cup B$ olduğunu biliyoruz. $A \cup B = B \cap C$ olduğundan $A \subseteq B \cap C$ elde edilir. Ayrıca $B \cap C \subseteq B$ olduğundan, $A \subseteq B$ bulunur. Benzer şekilde:

$$B \subseteq A \cup B = B \cap C \text{ olup } B \subseteq B \cap C \subseteq C$$

olduğundan $B \subseteq C$ bulunur. Sonuç olarak $A \subseteq B \subseteq C$ dir.

3.) $A \cup B = A \cap B \iff A = B$ olduğunu gösterin.

Çözüm: Önce $A \cup B = A \cap B$ olduğunu kabul edelim. $A = B$ olduğunu göstermek için $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olduğunu göstereceğiz.

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq B \text{ olduğundan } A \subseteq B \\ B \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq A \text{ olduğundan } B \subseteq A \end{array} \right\} \implies A = B.$$

Şimdi de $A = B$ olduğunu kabul edelim.

$$A \cup B = A \cup A = A = A \cap A = A \cap B.$$

Bu kısmın ispatı şöyle de yapılabilirdi:

$$\left. \begin{array}{l} A \cup B = A \cup A = A \\ A \cap B = A \cap A = A \end{array} \right\} \implies A \cup B = A \cap B.$$

4.) $A \subseteq B \implies A \cup C \subseteq B \cup C$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $A \subseteq B$ olduğunu kabul edelim. O halde $x \in A \implies x \in B$ dir.

$$x \in A \cup C \implies x \in A \text{ veya } x \in C \implies x \in B \text{ veya } x \in C \implies x \in B \cup C$$

olup seçilen x keyfi olduğundan önerme her x için doğrudur. O halde $A \cup C$ nin her elemanı $B \cup C$ nin bir elemanı olup ispat biter.

Not: Bu tür ispatlarda $p(x) \implies q(x)$ önermesi doğru ise “oklar soldan sağa doğru ilerlerken” $p(x)$ yerine $q(x)$ yazılabilir. ($q(x)$ yerine $p(x)$ yazılamaz.) Yine $p(x) \implies q(x)$ önermesi doğru ise

$$\{x : p(x)\} \subseteq \{x : q(x)\}$$

kapsaması vardır. $p(x) \iff q(x)$ önermesi doğru ise; yani $p(x) \equiv q(x)$ ise

$$\{x : p(x)\} = \{x : q(x)\}$$

eşitliği vardır.

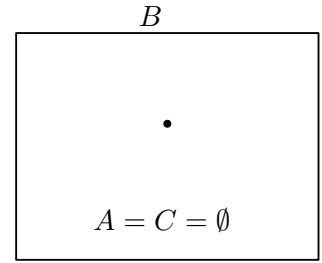
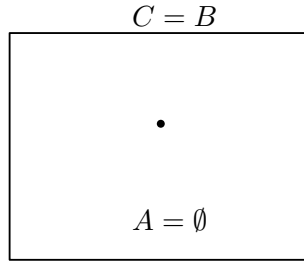
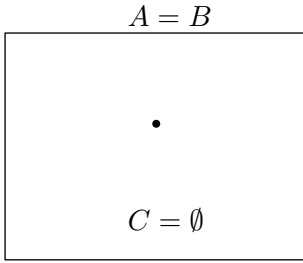
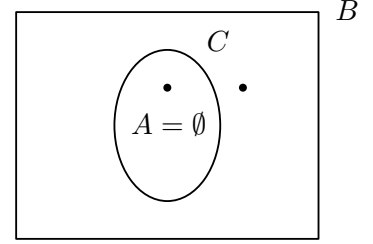
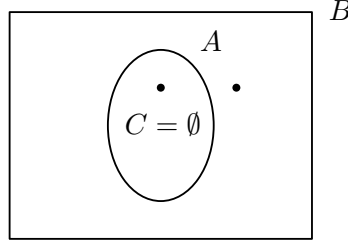
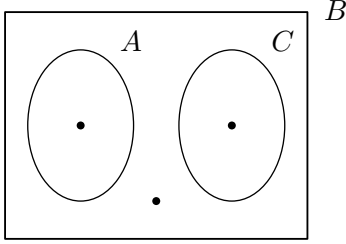
5.) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{x : x \in A \text{ veya } x \in B \cap C\} \\ &= \{x : x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ ve } x \in C)\} \\ &= \{x : (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ ve } (x \in A \text{ veya } x \in C)\} \\ &= \{x : (x \in A \cup B) \text{ ve } (x \in A \cup C)\} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

6.) $A \subseteq B, C \subseteq B, A \cap C = \emptyset$ veriliyor. Bu kümelerin boş olup olmamasına ve birbirlerine eşit olup olmamasına göre farklı bütün durumları Venn şeması ile gösterin.

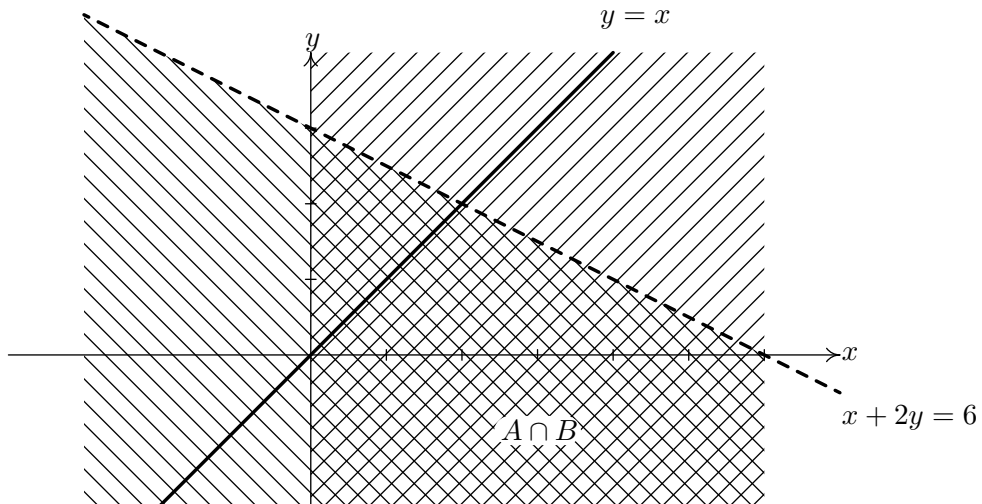
Çözüm: Toplam 7 durum vardır. Şekilde 6 durum gösterilmiş olup son durum $A = B = C = \emptyset$ durumudur.

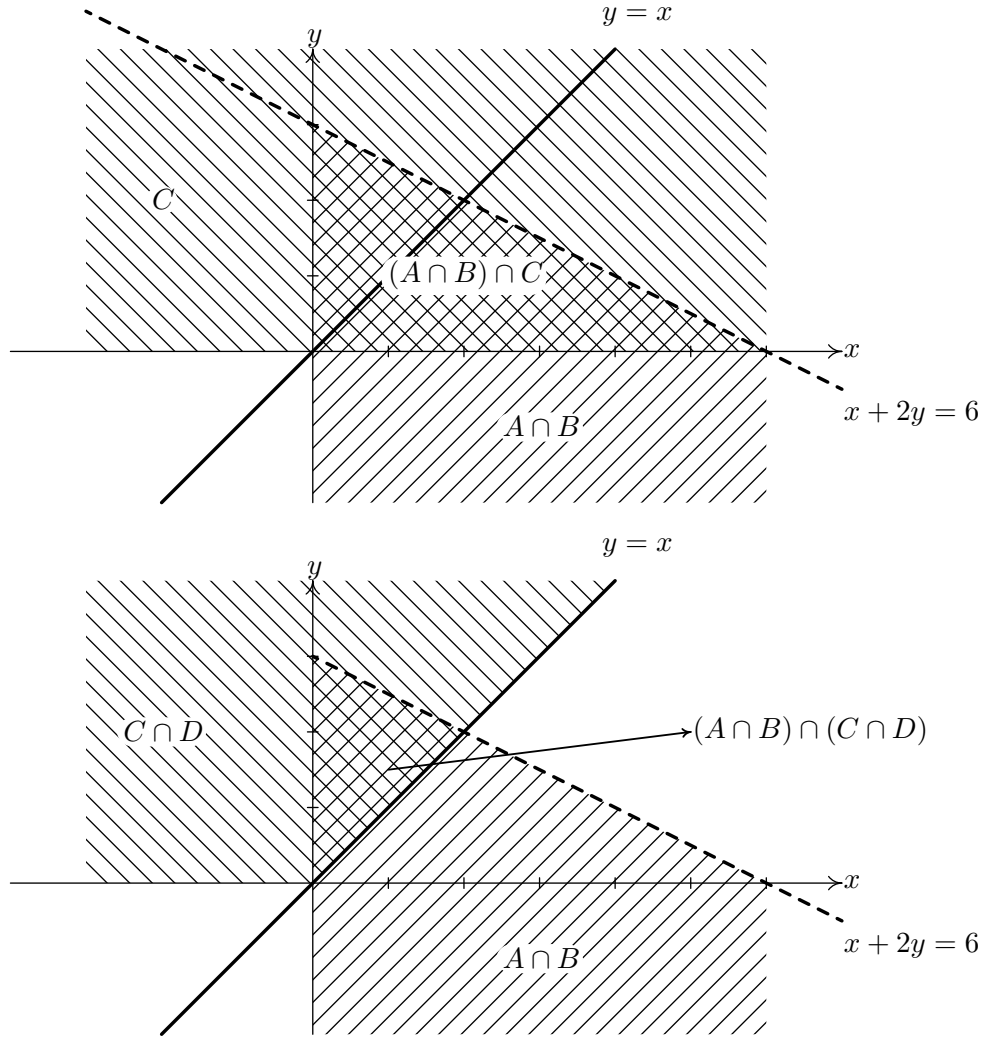


7.) Aşağıda Kartezyen düzlemin A, B, C ve D altkümeleri verilmiştir. Buna göre sırasıyla $A \cap B, (A \cap B) \cap C$ ve $(A \cap B) \cap (C \cap D)$ kümelerini Venn şeması ile gösterin.

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) : x \geq 0\} & B &= \{(x, y) : x + 2y < 6\} \\ C &= \{(x, y) : y \geq 0\} & D &= \{(x, y) : y - x \geq 0\} \end{aligned}$$

Çözüm:





8.) De Morgan Kurallarını ispatlayın. Yani $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ve $(A \cap B)' = A' \cup B'$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 (A \cup B)' &= \{x : x \in (A \cup B)'\} = \{x : x \notin (A \cup B)\} \\
 &= \{x : x \notin A \text{ ve } x \notin B\} = \{x : x \in A' \text{ ve } x \in B'\} = A' \cap B'. \\
 (A \cap B)' &= \{x : x \in (A \cap B)'\} = \{x : x \notin (A \cap B)\} \\
 &= \{x : x \notin A \text{ veya } x \notin B\} = \{x : x \in A' \text{ veya } x \in B'\} = A' \cup B'.
 \end{aligned}$$

9.) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$A \setminus (A \cap B) = A \cap (A \cap B)' = A \cap (A' \cup B') = \underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \cup (A \cap B') = A \cap B' = A \setminus B$$

10.) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C') = (A \cap B') \cap C' = (A \setminus B) \cap C' = (A \setminus B) \setminus C$$

11.) $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$(A \cap B) \cap (A \setminus B) = (A \cap B) \cap (A \cap B') = (A \cap A) \cap (B \cap B') = A \cap \emptyset = \emptyset$$

12.) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$(A \setminus B) \cap B = (A \cap B') \cap B = A \cap \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset} = A \cap \emptyset = \emptyset$$

13.) $A' \setminus B' = B \setminus A$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$A' \setminus B' = \{x : x \in A' \text{ ve } x \notin B'\} = \{x : x \in A' \text{ ve } x \in B\} = \{x : x \in B \text{ ve } x \notin A\} = B \setminus A$$

14.) $A \subseteq A \cup B$ ve $A \cap B \subseteq A$ olduğunu gösterin.

Çözüm: “ $x \in A \implies x \in A$ veya $x \in B$ ” önermesi her zaman doğru olur. (Yani $x \in B$ olmasa da doğrudur.) O halde $A \subseteq A \cup B$ dir. Benzer şekilde $x \in A \cap B$ ise $x \in A$ önermesi her zaman doğrudur. O halde $A \cap B \subseteq A$ dir.

15.) $A \subseteq B \implies A \cup (B - A) = B$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $A \subseteq B$ ise $A \cup B = B$ ve $A \cap B = A$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A') = \underbrace{(A \cup B)}_B \cap \underbrace{(A \cup A')}_E = B \cap E = B$$

16.) $A \cup B = \emptyset \implies A = \emptyset$ ve $B = \emptyset$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $A \cup B = \emptyset$ olsun. $A \subseteq A \cup B$ olacağından $A \subseteq \emptyset$ olur. Ayrıca boş küme her kümenin alt kümesi olduğundan $\emptyset \subseteq A$ dır. Buradan $A = \emptyset$ elde edilir. Benzer şekilde $B = \emptyset$ dir.

17.) A ve B kümeleri için $A \subseteq B \iff A \cup B = B$ olduğunu gösterin.

Çözüm: ($\implies$) Önce $A \subseteq B$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \in A \implies x \in B$ dir. O zaman

$$x \in A \cup B \implies x \in A \text{ veya } x \in B \implies x \in B \text{ veya } x \in B \implies x \in B$$

olup $A \cup B \subseteq B$ olur. Ayrıca $B \subseteq A \cup B$ her zaman doğru olduğundan $A \cup B = B$ elde edilir.

($\impliedby$) Şimdi $A \cup B = B$ olduğunu kabul edelim. $A \subseteq A \cup B$ olduğunu biliyoruz. $A \cup B = B$ olduğundan $A \subseteq B$ elde edilir.

18.) $(A')' = A$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$A = \{x : x \in A\} = \{x : x \notin A'\} : \{x : x \in (A')'\} = (A')'.$$

19.) $A \cup B = E$ ve $A \cap B = \emptyset \iff B = A'$ olduğunu gösterin. (E : evrensel kümedir)

Çözüm: ($\implies$) $A \cup B = E$ ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. $x \in A' \implies x \notin A$ dir. Fakat $x \in E$ olmalı; yani $x \in A \cup B$ olmalıdır. O halde $x \in B$ olmalı. Yani $A' \subseteq B$ dir. Şimdi de

$$x \in B \implies A \cap B = \emptyset \text{ olduğundan } x \notin A \implies x \in A'$$

olup $B \subseteq A'$ elde edilir. Sonuç olarak $B = A'$ dür.

($\impliedby$) $B = A' \implies A \cup B = A \cup A' = E$ dir. Ayrıca $A \cap B = A \cap A' = \emptyset$.

20.) $A - B = \emptyset \iff A \subseteq B$ olduğunu gösterin.

Çözüm: ($\implies$) $A - B = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. $x \in A$ alalım. $x \in B$ olduğunu göstereceğiz. Aksini kabul edelim; yani $x \notin B$ olsun. Bu durumda $x \in B'$ olur. O halde $x \in A \cap B' = A - B$ olmalıdır. Bu bir çelişkidir, çünkü $A - B = \emptyset$ kabul edilmiştir.

($\impliedby$) Şimdi $A \subseteq B$ kabul edelim. Bu durumda $A \cap B = A$ olur. Şimdi

$$A - B = A \cap B' = (A \cap B) \cap B' = A \cap (B \cap B') = A \cap \emptyset = \emptyset.$$

21.) $A \Delta (A \cap B) = A - B$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $A \cap B \subseteq A$ olduğundan $A \cup (A \cap B) = A$ dir.

$$\begin{aligned} A \Delta (A \cap B) &= (A \cup (A \cap B)) - (A \cap (A \cap B)) \\ &= A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)' = A \cap (A' \cup B') \\ &= (A \cap A') \cup (A \cap B') = \emptyset \cup (A \cap B') \\ &= A \cap B' = A - B. \end{aligned}$$

22.) $A \triangle B = \emptyset \iff A = B$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $(\implies)$ $A \triangle B = \emptyset \implies (A - B) \cup (B - A) = \emptyset \implies A - B = \emptyset$ ve $B - A = \emptyset \implies A \subseteq B$ ve $B \subseteq A \implies A = B$. (**Not:** $A - B = \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $A \subseteq B$ dir.)

$(\impliedby)$ $A = B \implies A \triangle B = A \triangle A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \emptyset$.

23.) $(A \triangle B)' = (A' \cup B) \cap (A \cup B')$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$\begin{aligned} (A \triangle B)' &= [(A - B) \cup (B - A)]' = [(A \cap B') \cup (B \cap A')]' \\ &= \overline{(A \cap B')} \cap \overline{(B \cap A')} = (A' \cup B) \cap (A \cup B') \end{aligned}$$

24.) $A \triangle (A \cup B) = B - (A \cap B)$ olduğunu gösterin.

Çözüm: Eşitliğin sol tarafı en sade şekle getirilirse:

$$\begin{aligned} A \triangle (A \cup B) &= (A \cup (A \cup B)) - (A \cap (A \cup B)) = (A \cup B) - A \\ &= (A \cup B) \cap A' = (A \cap A') \cup (B \cap A') = \emptyset \cup (B \cap A') \\ &= B \cap A' \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de eşitliğin sağ tarafını sadeleştirelim:

$$\begin{aligned} B - (A \cap B) &= B \cap (A \cap B)' = B \cap (A' \cup B') \\ &= (B \cap A') \cup (B \cap B') = (B \cap A') \cup \emptyset \\ &= B \cap A'. \end{aligned}$$

Eşitliğin her iki tarafı da $B \cap A'$ olduğundan çözüm tamamlanmıştır.

25.) $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ailesi verilsin. Her $i \in I$ için $A_i \subseteq B$ ise

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$$

olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \implies \exists i \in I \text{ için } x \in A_i \implies x \in B \text{ (Çünkü } A_i \subseteq B)$$

26.) $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ailesi verilsin. Her $i \in I$ için $B \subseteq A_i$ ise $B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $x \in B \implies \forall i \in I \text{ için } x \in A_i \text{ (Çünkü } B \subseteq A_i) \implies x \in \bigcap_{i \in I} A_i$

Çoktan Seçmeli Sorular

- 1.) $A \subseteq B$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?
☐ $A' = B$ ☒ $A \setminus B = \emptyset$ ☐ $A' \subseteq B$ ☐ $A \cap B \neq \emptyset$ ☐ Hiçbiri
- 2.) $A \setminus B = A$ olması için gerek ve yeter şart nedir?
☐ $A = B$ ☐ $A \subseteq B$ ☐ $B \subseteq A$ ☐ $B = \emptyset$ ☒ Hiçbiri
- 3.) $A = [0, 2]$ ve $B = [1, 7]$ aralıkları ise $A \triangle B$ ise aşağıdakilerden hangisidir?
☐ $(1, 2)$ ☒ $[0, 1) \cup (2, 7]$ ☐ $\emptyset$ ☐ $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ ☐ Hiçbiri
- 4.) $B = \{\{\emptyset\}, \emptyset, 0, \{0, \emptyset\}\}$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
☐ $\{\emptyset\} \subseteq B$ ☐ $\{\emptyset, 0\} \subseteq B$ ☐ $\emptyset \subseteq B$ ☐ $\{\{\emptyset\}\} \subseteq B$ ☒ Hiçbiri
- 5.) $A \triangle B$ kümesi ile B kümesinin tümleyeninin simetrik farkı hangisidir?
☐ $A \setminus B$ ☐ $B \cap A$ ☐ $E \setminus (A \cap B)$ ☒ $E \setminus A$ ☐ Hiçbiri
- 6.) $A \cap B = A$ ve $B \cap C = \emptyset$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?
☒ $A \cap C = \emptyset$ ☐ $A = B$ ☐ $B \cup C = E$ ☐ $A \cup B = A$ ☐ Hiçbiri
- 7.) $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ailesi verilsin. $\forall i \in I$ için $x \in A_i'$ olması için gerek ve yeter şart nedir?
☐ $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ☐ $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ ☒ $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ ☐ $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ ☐ Hiçbiri
- 8.) $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ailesi verilsin. $\exists i \in I$ için $B \subseteq A_i$ ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
☐ $B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$ ☒ $B \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ ☐ $\bigcap_{i \in I} A_i = B$ ☐ $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$ ☐ Hiçbiri
- 9.) Evrensel küme ile $A \cup B$ kümesinin simetrik farkı aşağıdakilerden hangisidir?
☐ $A \triangle B$ ☐ $A \cap B$ ☐ $A' \cup B'$ ☒ $A' \cap B'$ ☐ Hiçbiri
- 10.) A ve B kümeleri ayrık iki küme olsun. $s(A \cup B) = 8$, $s(A \cap B') = 5$ ise $s(B)$ kaçtır?
☐ 4 ☒ 3 ☐ 5 ☐ 2 ☐ Hiçbiri
- 11.) $[(A \cup B) \setminus B] \cap A$ aşağıdakilerden hangisidir?
☐ $A' \cap B'$ ☐ $A' \cap B$ ☒ $A \setminus B$ ☐ $A \cap B$ ☐ Hiçbiri
- 12.) Aşağıdakilerden hangisi doğru ise $A \cup B = E$ her zaman doğrudur?
☐ $B \subseteq A'$ ☒ $A' \subseteq B$ ☐ $A \subseteq A \setminus B$ ☐ $A \cap B \neq \emptyset$ ☐ Hiçbiri
- 13.) $A \cap B = A$ ise $A \cap B'$ aşağıdakilerden hangisidir?
☒ $\emptyset$ ☐ $A \cup B$ ☐ A ☐ $B \setminus A$ ☐ Hiçbiri
- 14.) $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ailesi verilsin. Her $k \in I$ için aşağıdakilerden hangisi doğrudur.
☐ $A_k \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$ ☐ $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq A_k$ ☒ $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_k$ ☐ $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' \subseteq A_k$ ☐ Hiçbiri
- 15.) $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ailesi verilsin. $\forall i \in I$ için $x \notin A_i$ olması için gerek ve yeter şart nedir?

- ☐ $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ ☐ $x \in \bigcup_{i \in I} A_i'$ ☐ $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ☒ $x \in \bigcap_{i \in I} A_i'$ ☐ Hiçbiri
- 16.) A ile B ayrık ise $(A \setminus B) \cup (E \triangle A)$ nedir? (E : Evrensel küme)
- ☐ $A \cup B$ ☐ A ☐ B ☒ E ☐ Hiçbiri
- 17.) $(A \setminus B) \triangle (B \setminus A)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
- ☐ A ☐ $B \setminus A$ ☐ $A \cap B$ ☐ B ☒ Hiçbiri
- 18.) $A \triangle B = A' \triangle B'$ eşitliği hangi şartlar altında doğrudur?
- ☐ $A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$ ☐ $A \cap B = \emptyset$ ☐ $A = B$ ☒ Her zaman doğru ☐ Hiçbiri
- 19.) A ve B kümeleri ayrık iseler aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?
- ☐ $A \triangle B = E$ ☐ $A \triangle B = \emptyset$ ☐ $A \setminus B = \emptyset$ ☐ $A' \subseteq B$ ☒ Hiçbiri
- 20.) $A \subseteq B$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?
- ☐ $A' = B$ ☐ $A' \subseteq B$ ☐ $A \cap B \neq \emptyset$ ☒ $A \setminus B = \emptyset$ ☐ Hiçbiri
- 21.) $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ailesi verilsin. $\exists i \in I$ için $x \in A_i'$ olması için gerek ve yeter şart nedir?
- ☐ $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ☒ $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ ☐ $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ ☐ $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ ☐ Hiçbiri
- 22.) $A \triangle B = A \cup B$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?
- ☒ A ile B ayrıktır ☐ $A \setminus B = \emptyset$ ☐ $B \setminus A = \emptyset$ ☐ $A = B$ ☐ Hiçbiri
- 23.) $A \setminus B = B \setminus A$ olması için gerek ve yeter şart nedir?
- ☐ $A = B = \emptyset$ ☒ $A = B$ ☐ $A \cup B = E$ ☐ $A \cap B = \emptyset$ ☐ Hiçbiri
- 24.) $A \cup B = E$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?
- ☐ $A \subseteq B'$ ☐ $A = B'$ ☐ $B' \cup A = B$ ☐ $A \cap B = \emptyset$ ☒ Hiçbiri
- 25.) $A \triangle (B \setminus A)$ aşağıdakilerden hangisidir?
- ☐ A ☐ $B \setminus A$ ☐ $A \cap B$ ☐ $A \setminus B$ ☒ Hiçbiri
- 26.) $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, a, \{a\}, \{1\}\}$ ise aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
- ☐ $\emptyset \subseteq B$ ☐ $\emptyset \in B$ ☐ $\{a\} \subseteq B$ ☐ $\{a, \emptyset\} \subseteq B$ ☒ Hiçbiri
- 27.) $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ailesi verilsin. $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- ☐ $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ ☐ $\exists i \in I, x \in A_i$ ☒ $\exists i \in I, x \in A_i'$ ☐ $x \in \bigcap_{i \in I} A_i'$ ☐ Hiçbiri
- 28.) $(E \setminus A) \cap (E \setminus B) = \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart nedir?
- ☐ $A = B$ ☒ $A \cup B = E$ ☐ $A = B = \emptyset$ ☐ $A \cap B = \emptyset$ ☐ Hiçbiri
- 29.) $A' \cap (A' \cup B)'$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?
- ☐ $A \cap B$ ☐ A' ☐ $A \cup B$ ☐ $A \setminus B$ ☒ Hiçbiri
- 30.) $X = (-1, 4]$ ve $Y = (-2, 2) \cup \{3\}$ ise $X \triangle Y$ hangisidir?
- ☐ $(-2, -1] \cup [2, 4]$ ☐ $(-2, -1) \cup [2, 4]$ ☐ $(-2, -1] \cup (2, 4]$ ☐ $(-2, -1) \cup (2, 4]$ ☒ Hiçbiri

Bölüm 3

Bağıntılar ve Özellikleri

Tanım 3.1 a ve b herhangi iki eleman olmak üzere (a, b) şeklindeki bir ifadeye bir **sıralı ikili** denir. Burada a ' ya **1. bileşen**; b 'ye de **2. bileşen** denir. İki sıralı ikilinin eşit olması şöyle tanımlanır:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ ve } b = d.$$

Dolayısıyla genelde $(a, b) \neq (b, a)$ dır. Benzer şekilde $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ şeklindeki bir ifadeye bir **sıralı n-li** denir.

Kartezyen Çarpım

Tanım 3.2 A ve B iki küme olsun. Birinci bileşenleri A dan; ikinci bileşenleri B den olan bütün sıralı ikililerin kümesine A ile B nin **kartezyen çarpımı** denir ve $A \times B$ ile gösterilir. Yani

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A \text{ ve } b \in B \}.$$

Özel olarak $B = A$ ise:

$$A \times A = \{ (a, b) : a \in A \text{ ve } b \in A \}$$

kümesi yazılabilir ve bu küme kısaca A^2 ile gösterilir. Genel olarak sıralı n -lilerin kümesi tanımlanabilir. O halde

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n\text{-tane}} = A^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in A \}$$

yazabiliriz.

Kartezyen Çarpımın Özellikleri

Teorem 3.3 A, B, C ve D dört tane küme olsun.

- 1.) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- 2.) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- 3.) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- 4.) $A \subseteq B \implies A \times C \subseteq B \times C$
- 5.) $A \subseteq B$ ve $C \subseteq D \implies A \times C \subseteq B \times D$

İspat 1.) $A \times \emptyset = \{ (x, y) : x \in A \text{ ve } y \in \emptyset \}$ kümesi boşkümedir; çünkü $y \in \emptyset$ önermesi her zaman yanlıştır. Dolayısıyla “ $a \in A$ ve $y \in \emptyset$ ” her zaman yanlıştır. Benzer şekilde $\emptyset \times A = \emptyset$ dir.

İspat 2.)

$$\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B \cup C) &\iff x \in A \text{ ve } y \in B \cup C \\
&\iff x \in A \text{ ve } (y \in B \text{ veya } y \in C) \\
&\iff (x \in A \text{ ve } y \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } y \in C) \\
&\iff (x, y) \in A \times B \text{ veya } (x, y) \in A \times C \\
&\iff (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

İspat 3.) $p \wedge q \wedge r \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$ denkliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B \cap C) &\iff x \in A \text{ ve } y \in B \cap C \\
&\iff x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } y \in C \\
&\iff (x \in A \text{ ve } y \in B) \text{ ve } (x \in A \text{ ve } y \in C) \\
&\iff (x, y) \in A \times B \text{ ve } (x, y) \in A \times C \\
&\iff (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

İspat 4.) $(x, y) \in A \times C \implies x \in A \text{ ve } y \in C \implies x \in B \text{ ve } y \in C \implies (x, y) \in B \times C$

olup ispat biter.

İspat 5.) $(x, y) \in A \times C \implies x \in A \text{ ve } y \in C \implies x \in B \text{ ve } y \in D \implies (x, y) \in B \times D$

olup ispat biter. □

Şimdi de kartezyen çarpımın birleşim ve kesişim üzerine dağılma özelliklerini genel olarak ispatlayalım:

Teorem 3.4 $\mathcal{A} = \{ A_i : i \in I \}$ ve $\mathcal{B} = \{ B_j : j \in J \}$ aileleri verilsin.

$$1.) \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j)$$

$$2.) \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j)$$

İspat 1.)

$$\begin{aligned} (x, y) \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) &\iff x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \text{ ve } y \in \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) \\ &\iff \exists i \in I, x \in A_i \text{ ve } \exists j \in J, y \in B_j \\ &\iff \exists i \in I \text{ ve } \exists j \in J, x \in A_i \text{ ve } y \in B_j \\ &\iff \exists (i, j) \in I \times J, (x, y) \in A_i \times B_j \\ &\iff (x, y) \in \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j) \end{aligned}$$

İspat 2.)

$$\begin{aligned} (x, y) \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) &\iff x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \text{ ve } y \in \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) \\ &\iff \forall i \in I, x \in A_i \text{ ve } \forall j \in J, y \in B_j \\ &\iff \forall i \in I \text{ ve } \forall j \in J, x \in A_i \text{ ve } y \in B_j \\ &\iff \forall (i, j) \in I \times J, (x, y) \in A_i \times B_j \\ &\iff (x, y) \in \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j) \end{aligned}$$

Örnek 3.5 A, B, C, D dört tane küme olmak üzere:

- 1.) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ eşitliğinin her zaman doğru olduğunu;
- 2.) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ eşitliğinin her zaman doğru olmadığını gösterin.

Çözüm 1.)

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\iff (x, y) \in A \times B \text{ ve } (x, y) \in C \times D \\ &\iff x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } x \in C \text{ ve } y \in D \\ &\iff (x \in A \text{ ve } x \in C) \text{ ve } (y \in B \text{ ve } y \in D) \\ &\iff x \in A \cap C \text{ ve } y \in B \cap D \\ &\iff (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D) \end{aligned}$$

Çözüm 2.) $A = \{a, b\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{b\}$ ve $D = \{2, 3, 4\}$ alınırsa eşitliğin doğru olmadığı görülür:

$$(A \times B) \cup (C \times D) = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\},$$

$$(A \cup C) \times (B \cup D) = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}.$$

Örnek 3.6 $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $y \notin C \implies (x, y) \notin A \times C$ olacağından;

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B \setminus C) &\implies x \in A \text{ ve } y \in B \setminus C \\ &\implies x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } y \notin C \\ &\implies (x, y) \in A \times B \text{ ve } (x, y) \notin A \times C \\ &\implies (x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C). \end{aligned}$$

Ayrıca;

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C) &\implies (x, y) \in A \times B \text{ ve } (x, y) \notin A \times C \\ &\implies x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } (x \notin A \text{ veya } y \notin C) \\ &\implies (x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } x \notin A) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } y \notin C) \\ &\implies x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } y \notin C \\ &\implies x \in A \text{ ve } y \in (B \setminus C) \\ &\implies (x, y) \in A \times (B \setminus C). \end{aligned}$$

olup iki kümenin eşitliği gösterilmiş olur.

ALİŞTIRMALAR

1.) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ önermesinin doğru olması için gerek ve yeter şart nedir?

☒ Her zaman doğru ☐ $A = \emptyset$ ☐ $A = B = C = \emptyset$ ☐ $A = \emptyset$ veya $B \cap C = \emptyset$ ☐ Hiçbiri

2.) “ $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ ” önermesi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

☐ Bazen doğru ☐ Sadece $A = \emptyset$ ise doğru ☒ Her zaman doğru ☐ Her zaman yanlış ☐ Hiçbiri

3.) $A \times (B \cup C) = \emptyset$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

☐ $A \cup B = \emptyset$ ☐ $B \cap C = \emptyset$ ☐ $B \times C = \emptyset$ ☒ $A \cap C = \emptyset$ ☐ Hiçbiri

4.) Her A, B, C kümesi için p : “ $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ ” ve q : “ $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ ” ise:

☐ p, q : Doğru ☐ p : Doğru, q : Yanlış ☒ p : Yanlış, q : Doğru ☐ p, q : Yanlış ☐ Hiçbiri

5.) A, B ve C kümelerinin eleman sayıları sırasıyla 12, 8 ve 10 dur. Ayrıca B ile C ayrık kümelerdir. Buna göre $(A \times B) \cap (A \times C)$ kaç elemanlıdır.?

- ☒ Sıfır ☐ 180 ☐ 24 ☐ 12 ☐ Hiçbiri

6.) $A \times B \neq \emptyset$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

- ☐ $A \cap B \neq \emptyset$ ☐ $A \Delta B \neq \emptyset$ ☐ $A \subseteq B$ ☐ $A \cap B = \emptyset$ ☒ Hiçbiri

(Doğru Cevap: $A \cup B \neq \emptyset$ olabilir.)

7.) Her A, B, C için $p : A' \times B' = (A \times B)'$ ve $q : A \times C \subseteq B \times C \implies A \subseteq B$ önermeleri için hangisi doğrudur?

- ☐ p, q :Doğru ☐ p : Doğru, q : Yanlış ☐ p : Yanlış, q : Doğru ☒ p, q : Yanlış ☐ Hiçbiri

8.) $A \times B = \emptyset$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

- ☐ $A = \emptyset$ ☐ $A = \emptyset$ ve $B = \emptyset$ ☒ $A \cap B = \emptyset$ ☐ $B' = E$ ☐ Hiçbiri

9.) $X \times Y = Y \times X$ olması için gerek ve yeter şart nedir?

- ☒ $X = \emptyset$ veya $Y = \emptyset$ veya $X = Y$ ☐ $X \subseteq Y$ veya $Y \subseteq X$ ☐ $X = Y$ ☐ $s(X) = s(Y)$ ☐ Hiçbiri

Bağıntı

Tanım 3.7 A ve B birer küme olsun. $A \times B$ nin bir alt kümesine (boş küme dahil) A 'dan B 'ye bir **bağıntı** denir. Eğer $A = B$ ise bu bağıntıya kısaca **A 'da bir bağıntı** denir.

Örnek 3.8 $A = \{a, b, c, d, e\}$ ve $B = \{1, 2, 4, 6\}$ olsun.

$$\beta_1 = \{(a, 2), (a, 4), (b, 1), (d, 1), (c, 6)\} \subseteq A \times B \text{ olup } A \text{ dan } B \text{'ye bir bağıntıdır}$$

$$\beta_2 = \{(a, b), (b, b), (c, e)\} \subseteq A \times A \text{ olup } A \text{'da bir bağıntıdır}$$

Tanım 3.9 β, A 'dan B 'ye bir bağıntı olsun. (Yani $\beta \subseteq A \times B$ olsun).

$$\beta^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \beta\}$$

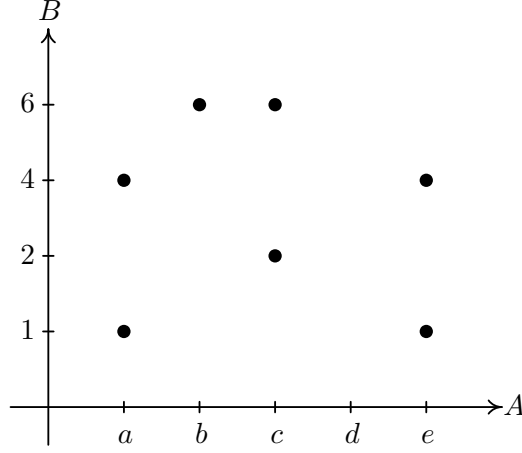
bağıntısına β 'nin **ters bağıntısı** veya kısaca **tersi** denir. Bu durumda $\beta^{-1} \subseteq B \times A$ olduğu açıktır.

Tanım 3.10 $\beta \subseteq A \times B$ olsun. Bir kartezyen düzlemde A 'nın elemanlarını yatay eksen; B 'nin elemanlarını da düşey eksen gösterelim. $(x, y) \in \beta$ ise $P(x, y)$ noktalarını işaretleyelim. Bu şekilde elde edilen noktalar kümesine β 'nin **grafiği** denir. Ayrıca; A ve B kümelerini Venn şeması ile yanyana gösterelim. $(x, y) \in \beta$ ise x 'den y 'ye tek yönlü oklar çizelim. Böylece elde edilen şekle β 'nin **şeması** denir.

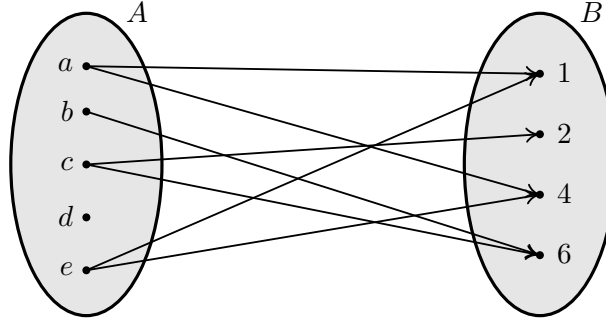
Örnek 3.11 $A = \{a, b, c, d, e\}$ ve $B = \{1, 2, 4, 6\}$ olsun.

$$\beta = \{(a, 1), (a, 4), (b, 6), (c, 6), (c, 2), (e, 1), (e, 4)\}$$

bağıntısını grafiğini ve şemasını çizelim.



Şekil 3.1: β 'nın grafiği.



Şekil 3.2: β 'nın şeması.

Tanım 3.12 A, B, C, D dört tane küme ve $B \cap C \neq \emptyset$ olsun. $\beta \subseteq A \times B$ ve $\gamma \subseteq C \times D$ olsun. β ile γ 'nın **bileşkesi** $\gamma \circ \beta$ ile gösterilir ve şöyle tanımlanır:

$$\gamma \circ \beta = \{ (x, z) : \exists y \in B \cap C \text{ için } (x, y) \in \beta \text{ ve } (y, z) \in \gamma \}.$$

Dikkat: β ile γ 'nın bileşkesi, söylendiği sırada değil de $\gamma \circ \beta$ şeklinde yazılmaktadır.

Örnek 3.13 $A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$, $B = \{ a, b, c, d, e \}$, $C = \{ c, d, e \}$, $D = \{ 1, 3, 5 \}$ olsun.

$$\beta = \{ (2, a), (2, c), (6, c), (8, d), (2, e) \} \subseteq A \times B,$$

$$\gamma = \{ (c, 1), (d, 3), (c, 5), (e, 1) \} \subseteq C \times D$$

$$\implies \gamma \circ \beta = \{ (2, 1), (2, 5), (6, 1), (6, 5), (8, 3) \}$$

Bağıntının Özellikleri

Bu kısımda özelliği incelenecek bağıntıların bir A kümesinde tanımlı olduğunu kabul edeceğiz. (Yani $\beta \subseteq A \times A$). Şimdi bu 4 özelliği tanımlayalım.

Tanım 3.14 $\beta \subseteq A \times A$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $(x, x) \in \beta$ ise β 'ya **yansıyan** bir bağıntı denir.

Örnek 3.15 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun.

$$\alpha_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 1)\}$$

Yansıyandır

$$\alpha_2 = \{(1, 4), (4, 2), (2, 2), (4, 4), (5, 5)\}$$

Yansıyan değildir

Not: $(x, y) \in \beta$ önermesi $x\beta y$ şeklinde daha kısa gösterilmektedir. (Bazı kaynaklarda $y\beta x$ yazılmaktadır.) Bu durumda

$$\boxed{\beta \text{ yansıyan} \iff \forall x \in A, x\beta x}$$

olduğu görülebilir.

Tanım 3.16 A bir küme ise $x \in A$ için (x, x) şeklindeki bütün sıralı ikililerin kümesine A 'nın **köşegeni** denir ve I_A ile gösterilir. O halde:

$$\boxed{I_A = \{(x, x) : x \in A\} \quad \text{dir.}}$$

Bu durumda da

$$\boxed{\beta \text{ yansıyan} \iff I_A \subseteq \beta}$$

olduğu kolaylıkla anlaşılır.

Tanım 3.17 $\beta \subseteq A \times A$ olsun. Eğer her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$ ise β 'ya **simetrik** bir bağıntı denir. Buradan

$$\boxed{\beta \text{ simetrik} \iff \beta = \beta^{-1}}$$

olduğu görülebilir.

Örnek 3.18 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun.

$$\beta_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

Simetriktir

$$\beta_2 = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$$

Simetriktir

$$\beta_3 = \{(1, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$$

Simetrik değildir

$$\beta_4 = \emptyset$$

Simetriktir

Tanım 3.19 $\beta \subseteq A \times A$ olsun. $x \neq y$ olmak üzere, eğer her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \notin \beta$ ise β 'ya **ters simetrik** bir bağıntı denir. Buna denk olarak

$$\forall (x, y) \in \beta, (y, x) \in \beta \implies x = y$$

önermesi doğruysa β ters simetrik diyebiliriz. Buradan

$$\boxed{\beta \text{ ters simetrik} \iff \beta \cap \beta^{-1} \subseteq I_A}$$

olduğu görülebilir.

Örnek 3.20 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun.

$\gamma_1 = \{(4, 4), (2, 2), (3, 3)\}$	Simetrik ve ters simetrik
$\gamma_2 = \{(1, 3), (3, 1), (4, 5)\}$	Simetrik değil, ters simetrik değil
$\gamma_3 = \{(1, 5), (5, 1)\}$	Simetrik, ters simetrik değil
$\gamma_4 = \{(1, 3), (4, 5)\}$	Simetrik değil, ters simetrik
$\gamma_5 = \emptyset$	Simetrik ve ters simetrik

Tanım 3.21 $\beta \subseteq A \times A$ olsun. Eğer her $(x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta$ için $(x, z) \in \beta$ ise β 'ya **geçişken** bir bağıntı denir. Buradan

$$\boxed{\beta \text{ geçişken} \iff \beta \circ \beta \subseteq \beta}$$

olduğu görülebilir.

Örnek 3.22 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun.

$\sigma_1 = \{(1, 1), (3, 4)\}$	Geçişken
$\sigma_2 = \{(1, 3), (3, 1), (1, 1)\}$	Geçişken değil, çünkü $(3, 3) \notin \sigma_2$
$\sigma_3 = \{(2, 3), (3, 5), (2, 5), (5, 3), (5, 5), (3, 3)\}$	Geçişken
$\sigma_4 = \{(1, 3), (4, 5), (5, 1)\}$	Geçişken değil, çünkü $(4, 1) \notin \sigma_4$
$\sigma_5 = \emptyset$	Simetrik, ters sim. ve geçişken

Örnek 3.23 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinde sırasıyla; sadece yansıyan, sadece simetrik, sadece ters simetrik, sadece geçişken olan birer bağıntı yazın. Daha sonra 4 özelliğe de sahip olan ve hiçbir özelliğe sahip olmayan bağıntıları yazın.

Sadece yansıyan: $\beta_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 5)\}$

Sadece simetrik: $\beta_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$

Sadece ters simetrik: $\beta_3 = \{(1, 2), (2, 3)\}$

Sadece geçişken: $\beta_4 = \{ (1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (4, 5) \}$

Bütün özellikler var: $\beta_5 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) \} = I_A$

Hiçbir özellik yok: $\beta_6 = \{ (1, 2), (2, 1), (1, 1), (3, 4) \}$

Not: β, A 'da bir bağıntı olsun. Buna göre

$$\boxed{\beta \text{ yansıyan değil} \iff \exists a \in A, (a, a) \notin \beta}$$

$$\boxed{\beta \text{ simetrik değil} \iff \exists a, b \in A, a \neq b, (a, b) \in \beta, (b, a) \notin \beta}$$

$$\boxed{\beta \text{ ters simetrik değil} \iff \exists a, b \in A, a \neq b, (a, b) \in \beta, (b, a) \in \beta}$$

$$\boxed{\beta \text{ geçişken değil} \iff \exists a, b, c \in A, (a, b) \in \beta, (b, c) \in \beta, (a, c) \notin \beta}$$

Örnek 3.24 Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ 'de " $a\beta b \iff 3 \mid (a+2b)$ " şekline tanımlanan bağıntının özelliklerini inceleyin.

Çözüm: (i) Her $a \in \mathbb{Z}$ için $3 \mid (a+2a)$ yani $3 \mid 3a$ olup $a\beta a$ dır. Yani bağıntı yansıyandır.

(ii) $(a, b) \in \beta \implies 3 \mid (a+2b) \implies \exists k \in \mathbb{Z}, a+2b = 3k \implies 2a+4b = 6k \implies 2a+b = 6k-3b = 3(2k-b)$ olup $2k-b \in \mathbb{Z}$ olduğundan $3 \mid (b+2a) \implies (b, a) \in \beta$. Yani β simetriktir.

(iii) $(1, 4) \in \beta$ ve $(4, 1) \in \beta$ olduğundan β ters simetrik değildir.

(iv)

$$(a, b) \in \beta \implies 3 \mid (a+2b) \implies \exists k \in \mathbb{Z}, a+2b = 3k$$

$$(b, c) \in \beta \implies 3 \mid (b+2c) \implies \exists m \in \mathbb{Z}, b+2c = 3m$$

Sağdaki eşitlikler taraf tarafa toplanıp gerekli düzenleme yapılırsa:

$$a+2c = 3(k+m-b) \implies k+m-b \in \mathbb{Z} \text{ olduğundan } 3 \mid (a+2c) \implies (a, c) \in \beta$$

olup β geçişkendir.

ALİŞTIRMALAR

1.) $\mathbb{Z}$ 'de tanımlanan " $a\beta b \iff b = a+1$ " bağıntısının özelliklerinin listesi aşağıdakilerden hangisidir?

☐ Ters simetri, geçişme ☒ Ters simetri ☐ Geçişme ☐ Hiçbir öz. yok ☐ Hiçbiri

2.) $\mathbb{N}$ 'de tanımlı $(x, y) \in \beta \iff "x \text{ asal veya } x \leq y"$ bağıntısının özelliklerinin listesi nedir?

☒ Yansıma ☐ Yansıma ve geçişme ☐ Hiçbir öz. yok ☐ Yansıma ve ters simetri ☐ Hiçbiri

- 3.) $\mathbb{N}^+$ kümesinde “ $(a, b) \in \beta \iff a \mid 2b$ ” bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
☐ Yansıyan değil ☐ Simetrik ☐ Ters simetrik ☒ Geçişken değil ☐ Hiçbiri
- 4.) $\mathbb{R}$ kümesinde “ $(a, b) \in \beta \iff |a - b| = 1$ ” bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
☐ Yansıyan değil ☐ Simetrik ☐ Ters simetrik değil ☐ Geçişken değil ☒ Hiçbiri
- 5.) $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde yansıyan olan kaç tane bağıntı yazılabilir?
☐ 32 tane ☐ 16 tane ☐ 512 tane ☒ 64 tane ☐ Hiçbiri
- 6.) $\alpha = \{(1, 2), (2, 5), (5, 3), (3, 4), (5, 1)\}$ ve $\beta = \{(2, 6), (1, 6), (3, 6), (4, 1), (5, 2)\}$ ise $s(\beta \circ \alpha) = ?$
☒ 4 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 1 ☐ Hiçbiri
- 7.) “Yansıyan olmadığı halde kendisi ile bileşkesi yansıyan olan bağıntılar vardır” önermesi için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?
☐ Yanlıştır ☒ Doğrudur ☐ Bir şey söylenemez ☐ Önerme değildir ☐ Hiçbiri
- 8.) $A = \{1, 2, 3\}$ 'nin kuvvet kümesi üzerinde $\beta = \{(X, Y) : X \neq Y, X \subseteq Y\}$ bağıntısı kaç elemanlıdır?
☐ 12 ☐ 17 ☐ 16 ☐ 13 ☒ Hiçbiri
- 9.) $\mathbb{N}$ de “ $(a, b) \in \beta \iff a$ asal veya b asal veya $a + b$ asal ” şeklinde tanımlanan bağıntının özelliklerinin listesi hangisidir?
☐ Geçişken ☒ Simetrik ☐ Geçişken ve simetrik ☐ Hiçbir özellik yok ☐ Hiçbiri
- 10.) $A = \{0, 1, \dots, 8\}$ kümesinde $a\beta b \iff |b^2 - a^2| < 64$ bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
☐ Yansıyan değil ☐ Simetrik değil ☐ Ters simetrik ☒ Geçişken değil ☐ Hiçbiri
- 11.) 2 elemanlı bir küme üzerinde simetrik olmayan kaç tane bağıntı yazılır?
☐ 4 tane ☐ 5 tane ☐ 6 tane ☐ 7 tane ☒ Hiçbiri
- 12.) Bir A kümesinde tanımlı bir β bağıntısının geçişken olması için gerek ve yeter şart nedir?
☒ $\beta \circ \beta \subseteq \beta$ ☐ $\beta \cup \beta^{-1} \subseteq I_A$ ☐ $\beta \cap \beta^{-1} \subseteq I_A$ ☐ $\beta \circ \beta^{-1} = I_A$ ☐ Hiçbiri
- 13.) $E = \{a, b, c\}$ evrensel küme olsun. $P(E)$ kuvvet kümesi üzerinde $\beta = \{(X, Y) : X = Y'\}$ bağıntısı kaç elemanlıdır?
☐ 5 elemanlı ☐ 6 elemanlı ☐ 9 elemanlı ☐ 10 elemanlı ☒ Hiçbiri
- 14.) $\alpha = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (1, 4), (2, 3)\}$ ve $\gamma = \{(4, 1), (3, 3), (1, 2)\}$ ise $\alpha \circ \gamma$ kaç elemanlıdır?
☐ 3 elemanlı ☐ 4 elemanlı ☒ 5 elemanlı ☐ 6 elemanlı ☐ Hiçbiri
- 15.) Pozitif doğal sayılar kümesi üzerinde $a\beta b \iff 3 \mid (a + 3)$ bağıntısı için hangisi doğrudur?
☐ Yansıyan ☐ Simetrik ☐ Ters simetrik ☒ Geçişken ☐ Hiçbiri
- 16.) $\mathbb{Z}$ 'de tanımlı $(x, y) \in \beta \iff “x + y$ çift veya x tek” bağıntısının özelliklerinin listesi nedir?
☒ Yansıyan, geçişken ☐ Yansıyan, simetrik ☐ Yansıyan ☐ Yansıyan, ters simetrik ☐ Hiçbiri
- 17.) β' 'da var iken $\beta \circ \beta'$ 'da da olması gereken özelliklerin listesi hangisidir?

- ☐ Yansıma ☐ Yansıma, simetri ☒ Yansıma, simetri, geçişme ☐ Yansıma, geçişme ☐ Hiçbiri
- 18.) $\mathbb{R}$ 'de tanımlı $(x, y) \in \beta \iff "x \text{ tamsayı veya } y < 0"$ bağıntısının özelliklerinin listesi nedir?
- ☐ Geçişken ☐ Simetrik, geçişken ☒ Hiçbir öz. yok ☐ Ters simetrik ☐ Hiçbiri
- 19.) $\mathbb{N}^+$ kümesinde " $(a, b) \in \beta \iff a \leq 2b$ " bağıntı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- ☐ Yansıyan değil ☐ Simetrik ☐ Ters simetrik ☒ Geçişken değil ☐ Hiçbiri
- 20.) $\mathbb{N}^+$ kümesinde " $(a, b) \in \beta \iff a < b \text{ veya } b|a$ " bağıntı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- ☐ Yansıyan değil ☐ Simetrik ☐ Ters simetrik ☒ Geçişken değil ☐ Hiçbiri
- 21.) Bir bağıntı simetrik ise bu bağıntının tersi için aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?
- ☐ Yansıyandır ☐ Ters simetriktir ☒ Simetriktir ☐ Geçişkendir ☐ Hiçbiri
- 22.) $A = \{a, b\}$ kümesi üzerinde simetrik olup ters simetrik olmayan kaç tane bağıntı yazılabilir?
- ☐ Yazılamaz ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ Hiçbiri
- 23.) $\alpha = \{(2, 4), (7, 1), (6, 6), (6, 4), (7, 4), (4, 1)\}$ ve $\beta = \{(1, 2), (2, 6), (3, 4), (1, 7), (2, 7)\}$ ise $\alpha \circ \beta$ kaç elemanlıdır?
- ☐ 4 elemanlı ☐ 5 elemanlı ☒ 6 elemanlı ☐ 7 elemanlı ☐ Hiçbiri
- 24.) $\alpha = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x + y = 1\}$ ve $\beta = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x - y = 3\}$ ise $\beta \circ \alpha = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, \dots\}$ kümesindeki boşluğa ne yazılmalıdır?
- ☐ $x - y = 1$ ☐ $x + y = 4$ ☐ $x + y = 0$ ☒ $x + y = -2$ ☐ Hiçbiri
- 25.) A en az iki elemanlı bir küme ve $\alpha = A \times A$ ise α için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
- ☐ Yansıyandır ☒ Ters simetriktir ☐ Simetriktir ☐ Geçişkendir ☐ Hiçbiri
- 26.) $\mathbb{N}$ kümesinde $(a, b) \in \beta \iff "a + b \text{ çift veya } a \text{ asal}"$ bağıntısı için hangisi doğrudur?
- ☐ Yansıyan değil ☐ Simetrik ☐ Ters simetrik ☐ Geçişken ☒ Hiçbiri
- 27.) $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ 'da $x\beta y \iff x | (x + y)$ bağıntısının sahip olduğu özelliklerin listesi hangisidir?
- ☐ Yansıma ve geçişme ☐ Yansıma ve ters sim. ☐ Yansıma ve simetri ☐ Yansıma ☒ Hiçbiri
- 28.) Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ 'de $x\beta y \iff |x - y| \leq 1$ bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- ☒ Geçişken değil ☐ Ters simetrik ☐ Simetrik değil ☐ Yansıyan değil ☐ Hiçbiri
- 29.) $\mathbb{Z}$ 'de $(x, y) \in \beta \iff 3 | y^2$ bağıntısının sahip olduğu özelliklerin listesi hangisidir?
- ☐ Ters simetrik ☐ Ters simetrik ve geçişken ☒ Geçişken ☐ Simetrik ve geçişken ☐ Hiçbiri
- 30.) $\mathbb{R}$ 'de $a\beta b \iff |a^3 - b^3| \leq 8$ bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
- ☐ Yansıyan değil ☐ Simetrik değil ☐ Ters simetrik ☐ Geçişken ☒ Hiçbiri

MT107 SOYUT MATEMATİK I DERSİ ÖRNEK ARASINAVI

- 1.) $(p \implies q') \implies r'$ önermesinin tablosunda bu önermenin bulunduğu sütunda kaç tane 1 vardır?
☐ 4 tane ☐ 3 tane ☐ 6 tane ☒ 5 tane ☐ Hiçbiri
- 2.) $(p \wedge q) \implies p'$ önermesinin olumsuzu aşağıdakilerden hangisidir?
☐ $p' \wedge q$ ☒ $p \wedge q$ ☐ $p' \vee q'$ ☐ $q' \vee p$ ☐ Hiçbiri
- 3.) Aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?
☐ $\exists x \in \mathbb{R}, x(x+6) = 3x^2 + 5$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \notin \mathbb{Z}$ ☐ $\exists a \in \mathbb{Q}, \sqrt{a} < -1$ ☒ $\forall x \in \mathbb{Z}, \sqrt{2x^2} \in \mathbb{R}$ ☐ Hiçbiri
- 4.) Aşağıdaki önermelerden hangisi bir teoremdir?
☒ $p \implies (p \vee q)$ ☐ $p \implies (p \wedge q)$ ☐ $p \implies (p \wedge q')$ ☐ $p \implies (p' \vee q)$ ☐ Hiçbiri
- 5.) $A' \subseteq B$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?
☐ $B' = A$ ☐ $A \setminus B = \emptyset$ ☒ $(A \cup B)' = \emptyset$ ☐ $A \cap B = \emptyset$ ☐ Hiçbiri
- 6.) $A \triangle B = A$ olması için gerek ve yeter şart nedir?
☐ $A = B = \emptyset$ ☐ $A = B$ ☐ $A \subseteq B$ ☐ $A = \emptyset$ ☒ Hiçbiri
- 7.) $s(A) = 6$ ve $s(B) = 11$ ise $A \triangle B$ kümesi en az kaç elemanlıdır?
☒ 5 ☐ sıfır ☐ 6 ☐ 9 ☐ Hiçbiri
- 8.) A ile B kümeleri ayrık ise $A \setminus (A' \cup B)$ ifadesinin en sade şekli nedir?
☐ B ☐ $A \cup B$ ☒ A ☐ $B \setminus A$ ☐ Hiçbiri
- 9.) $A \cup B = E$ olduğuna göre $A \setminus B$ kümesinin tümleyeni aşağıdakilerden hangisidir?
☐ A' ☐ B' ☐ E ☐ $B \setminus A$ ☒ Hiçbiri
- 10.) $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ailesi verilsin. $\exists i \in I$ için $x \notin A_i'$ olması için gerek ve yeter şart nedir?
☐ $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ ☒ $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i'$ ☐ $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ ☐ $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i'$ ☐ Hiçbiri

Diğer Sayfaya Geçiniz

Adı, Soyadı:

Numarası: MT

11.) $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ ve her $n \in I$ için $A_n = \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ kapalı aralığı ise hangisi doğrudur?

- ☒ $\bigcap_{i \in I} A_i = [0, 1]$ ☐ $\bigcup_{i \in I} A_i = [-1, 1]$ ☐ $\bigcap_{i \in I} A_i = [0, 2]$ ☐ $\bigcup_{i \in I} A_i = [-1, 0]$ ☐ Hiçbiri

12.) $A \times B = B$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

- ☐ $A = \emptyset$ ☐ $A = B$ ☒ $B = \emptyset$ ☐ $A \neq B$ ☐ Hiçbiri

13.) $(A \cap B) \times C = \emptyset$ ise aşağıdakilerin hangisi her zaman doğrudur?

- ☐ $C \subseteq A \cup B$ ☐ $A \times C = \emptyset$ ☐ $(A \cap B) \cup C \neq \emptyset$ ☐ $A \cup C \neq \emptyset$ ☒ Hiçbiri

14.) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi üzerinde hiç bir özelliği olmayan bir bağıntı en az kaç elemanlı olmalıdır?

- ☐ 5 ☐ 4 ☒ 3 ☐ 2 ☐ Hiçbiri

15.) p : “3 elemanlı bir bağıntının kendisi ile bileşkesi boş küme olabilir”, q : “ters simetrik bir bağıntının tersi de ters simetriktir” olduğuna göre:

- ☐ p, q : Yanlış ☒ p, q : Doğru ☐ p : Doğru, q : Yanlış ☐ p : Yanlış, q : Doğru ☐ Hiçbiri

16.) Doğal sayılarda tanımlı “ $(a, b) \in \beta \iff 7 \mid (a + 2b)$ ” bağıntısı için hangisi doğrudur?

- ☐ Yansıyan ☐ Simetrik ☐ Ters simetrik ☐ Geçişken ☒ Hiçbiri

17.) 3 elemanlı bir küme üzerinde yansıyan olmayan kaç tane bağıntı yazılabilir?

- ☒ 448 tane ☐ 192 tane ☐ 960 tane ☐ 64 tane ☐ Hiçbiri

18.) Tamsayılar kümesinde $(a, b) \in \beta \iff$ “ a çift ve b tek” bağıntısının özellik listesi hangisidir?

- ☐ simetri ☐ ters simetri ☐ geçişme ☒ ters simetri ve geçişme ☐ Hiçbiri

19.) $\mathbb{N}^+$ kümesinde $(x, y) \in \alpha \iff x \mid (y+1)$ ve $(x, y) \in \beta \iff x \mid y$ şeklinde iki bağıntı tanımlanıyor. Buna göre aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

- ☐ $(4, 22) \notin \beta_o \alpha$ ☒ $(5, 6) \notin \beta_o \alpha$ ☐ $(6, 15) \notin \beta_o \alpha$ ☐ $(8, 78) \notin \beta_o \alpha$ ☐ Hiçbiri

20.) “Simetrik olduğu halde kendisi ile bileşkesi simetrik olmayan bağıntılar vardır” ifadesi:

- ☐ Doğrudur ☐ Önerme değildir ☐ Bir şey söylenemez ☒ Yanlıştır ☐ Hiçbiri

NOT: Net puanınız doğru cevap sayısından yanlış cevap sayınızın dörtte biri çıkarılarak hesaplanacaktır. Süre 75 dakikadır. ☒ şeklinde işaretleyiniz.

BAŞARILAR Yrd.Doç.Dr.Hüseyin BİLGİÇ

Bölüm 4

Denklik Bağlılıları

Tanım 4.1 β bir $\emptyset \neq A$ kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer β yansıyan, simetrik ve geçişken ise β 'ya bir **denklik bağıntısı** denir.

Örnek 4.2 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde

$$\beta = \{ (x, y) : x - y \text{ çift tamsayıdır} \}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Çünkü

- (i) Her $x \in \mathbb{Z}$ için $x - x = 0$ çift olup $x\beta x$ dir. Yani β yansıyandır.
- (ii) $(x, y) \in \beta \implies x - y \text{ çift} \implies y - x = -(x - y) \text{ çift olup } (y, x) \in \beta$. Yani β simetriktir.
- (iii) $(x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta \implies x - y = 2k_1, y - z = 2k_2$ olacak şekilde k_1, k_2 tamsayısı var $\implies x - z = 2(k_1 + k_2)$ çift olup $(x, z) \in \beta \implies \beta$ geçişkendir.

Tanım 4.3 β bir A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $(x, y) \in \beta$ ise y elemanı x elemanına (β bağıntısına göre) **denktir** denir. x elemanına denk olan bütün elemanların kümesine x 'in **denklik sınıfı** denir ve $\bar{x}$ ile gösterilir. O halde

$$\bar{x} = \{ y \in A : (x, y) \in \beta \} = \{ y \in A : x\beta y \}.$$

Örnek 4.4 Tamsayılar kümesinde

$$\beta = \{ (x, y) : 3 \mid (x - y) \}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Buna göre

$$\begin{aligned}\bar{4} &= \{y \in \mathbb{Z} : 3 \mid (4 - y)\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}, \\ \bar{0} &= \{y \in \mathbb{Z} : 3 \mid (0 - y)\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}, \\ \bar{1} &= \{y \in \mathbb{Z} : 3 \mid (1 - y)\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}, \\ \bar{2} &= \{y \in \mathbb{Z} : 3 \mid (2 - y)\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}, \\ -\bar{1} &= \{y \in \mathbb{Z} : 3 \mid (1 + y)\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\},\end{aligned}$$

yazabiliriz. İki denklik sınıfının ya birbirine eşit ya da ayrık olduğu görülür. Ayrıca farklı denklik sınıfları $\bar{0}$, $\bar{1}$ ve $\bar{2}$ dir. Bu denklik sınıflarının birleşimi de $\mathbb{Z}$ ye eşittir.

Teorem 4.5 β bir A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.

- (i) Her $a \in A$ için $\bar{a} \neq \emptyset$,
- (ii) Her $a, b \in A$ için ya $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ veya $\bar{a} = \bar{b}$,
- (iii) A daki elemanların denklik sınıflarının birleşimi A yı verir. Yani $A = \bigcup_{a \in A} \bar{a}$.

İspat (i) Bağıntı yansıyan olduğundan her $a \in A$ için $a \in \bar{a}$ olup $\bar{a} \neq \emptyset$ dir.

İspat (ii) $a, b \in A$ olsun. $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ ise ispat biter. $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\bar{a} = \bar{b}$ olduğunu göstereceğiz. $c \in \bar{a} \cap \bar{b}$ alalım. O halde $c \in \bar{a}$ ve $c \in \bar{b}$ dir. Şimdi

$$x \in \bar{a} \implies (x, a) \in \beta \implies (x, c) \in \beta, \text{ çünkü } (a, c) \in \beta \text{ ve } \beta \text{ geçişken.}$$

Ayrıca $(c, b) \in \beta$ olduğundan $(x, b) \in \beta$ elde edilir. O halde $x \in \bar{b}$ elde edilir. Benzer şekilde $x \in \bar{a} \implies x \in \bar{a}$ ispatlanabilir. O halde $\bar{a} = \bar{b}$ dir.

İspat (iii) A daki her eleman bir denklik sınıfına ait olacağından ispat açıktır. □

Tanım 4.6 β bir A kümesinde bir denklik bağıntısı olsun. β nın A da belirlediği (ayırıldığı) denklik sınıflarının kümesine A nın β ya göre **bölüm kümesi** denir ve A/β ile gösterilir. Yani

$$A/\beta = \{\bar{a} : a \in A\}.$$

Örnek 4.7 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinde $\beta = \{(x, y) : 3 \mid (x - y)\}$ denklik bağıntısı verilsin. Buna göre

$$\mathbb{Z}/\beta = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}.$$

Tanım 4.8 A boş olmayan bir küme olsun. $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ailesi verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mathcal{A}$ ailesine A kümesinin bir **parçalanışı (ayırımı)** denir.

- (i) Her $i \in I$ için $A_i \neq \emptyset$,
- (ii) Her $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$, (Yani A_i ler ikişer ikişer ayrık)
- (iii) $\mathcal{A}$ ailesinin birleşimi A ya eşit; yani

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A.$$

Örnek 4.9 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin iki ayrımı:

$$\mathcal{A} = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{6, 8\}, \{7\}\}, \quad \mathcal{B} = \{\{1\}, \{2\}, \{6\}, \{3, 4, 5, 7, 8\}\}.$$

Ayrıca $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\} = \{A\}$ ailesi de A nın bir ayrımıdır.

Teorem 4.10 β bir A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. β nın A da ayırdığı denklik sınıfları (yani A/β) A nın bir ayrımını oluşturur. Tersine A nın her bir ayrımı, verilen ayrımındaki her küme bir denklik sınıfı olacak şekilde bir (ve sadece bir) denklik bağıntısı belirler.

İspat: A/β nın A nın bir ayrımını oluşturduğu Teorem 4.5 de ispatlanmıştır. Şimdi A nın bir $\mathcal{A}$ ayrımı verilsin.

$$\beta = \{(x, y) : "x \text{ ile } y, \mathcal{A} \text{ ayrımındaki aynı kümeye aittir"}\}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve $A/\beta = \mathcal{A}$ dir. □

Örnek 4.11 $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesinin bir ayrımı $\mathcal{A} = \{\{a, e\}, \{b, c, d, f\}, \{g\}\}$ olarak verilsin. Bu ayrımın belirlediği denklik bağıntısı:

$$\begin{aligned} \beta = \{ & (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (g, g), (a, e), (e, a), (b, c), (c, b), \\ & (b, d), (d, b), (b, f), (f, b), (c, d), (d, c), (c, f), (f, c), (d, f), (f, d) \}. \end{aligned}$$

Gerçekten de β nın bir denklik bağıntısı olduğu ve $A/\beta = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{g}\} = \mathcal{A}$ olduğu görülür.

Not 4.12 Denklik bağıntıları için genelde $\sim, \simeq, \approx, \cong, \equiv$ gibi semboller kullanılır. Eğer böyle bir sembol kullanılmışsa $(x, y) \in \sim$ yerine $x \sim y$ kullanmak daha kullanışlıdır. Bağıntı simetrik olduğu için $y \sim x$ ile $x \sim y$ aynıdır.

ALİŞTIRMALAR

1.) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinde $\beta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (3, 1)\}$ bağıntısı veriliyor. β denklik bağıntısı ise belirlediği ayrımı bulunuz.

Çözüm: β 'nın yansıyan, simetrik ve geçişken olduğu görülmektedir. 1 ve 3 aynı denklik sınıfındadır. 2 ile 4 tek başına birer denklik sınıfı oluşturur. O halde, β 'nın belirlediği ayrım:

$$\{ \{ 1, 3 \}, \{ 2 \}, \{ 4 \} \}.$$

2.) $\mathbb{Z}$ 'de $x\beta y \iff x^2 - 2y = y^2 - 2x$ ile tanımlanan bağıntı denklik bağıntısı mıdır? Denklik bağıntısı ise $\bar{6}, \bar{-3}$ ve $\bar{-8}$ denklik sınıflarını bulunuz. Hangi $a \in \mathbb{Z}$ için $\bar{a}$ sadece bir elemanlıdır?

Çözüm: (i) $x = y$ alınırsa $x^2 - 2x = x^2 - 2x$ eşitliği her zaman doğrudur. Yani β yansıyandır.

(ii) $x\beta y \implies x^2 - 2y = y^2 - 2x \implies y^2 - 2x = x^2 - 2y \implies y\beta x$ olup β simetriktir.

(iii) $x\beta y, y\beta z \implies x^2 - 2y = y^2 - 2x$ ve $y^2 - 2z = z^2 - 2y$ olup bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa

$$x^2 - 2y + y^2 - 2z = y^2 - 2x + z^2 - 2y \implies x^2 - 2z = -2x + z^2 \implies x\beta z$$

olup β geçişkendir. Yani, β bir denklik bağıntısıdır.

$$\begin{aligned} \bar{6} &= \{ y \in \mathbb{Z} : (6, y) \in \beta \} = \{ y \in \mathbb{Z} : 36 - 2y = y^2 - 12 \} \\ &= \{ y \in \mathbb{Z} : y^2 + 2y - 48 = 0 \} = \{ 6, -8 \}, \\ \bar{-3} &= \{ y \in \mathbb{Z} : (-3, y) \in \beta \} = \{ y \in \mathbb{Z} : 9 - 2y = y^2 + 6 \} \\ &= \{ y \in \mathbb{Z} : y^2 + 2y - 3 = 0 \} = \{ -3, 1 \}, \\ \bar{-8} &= \{ 6, -8 \}. \quad (\text{Çünkü } -8, 6\text{'nın denklik sınıfındadır}) \end{aligned}$$

Şimdi $a \in \mathbb{Z}$ sabit bir sayı ise:

$$\bar{a} = \{ y \in \mathbb{Z} : (a, y) \in \beta \} = \{ a \in \mathbb{Z} : a^2 - 2y = y^2 - 2a \} = \{ a \in \mathbb{Z} : y^2 + 2y - a^2 - 2a = 0 \}$$

elde edilir. Bu kümenin bir elemanlı olması için, y cinsinden verilen 2. derece denklemin tek köklü olması, yani diskriminantının sıfır olması gerekir. O halde

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-a^2 - 2a) = 4a^2 + 8a + 4 = (2a + 2)^2 = 0$$

denklemini çözülürse $a = -1$ bulunur. -1 bir tamsayı olduğundan aranan sayı -1 dir.

3.) $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ kümesinde $(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2) \iff x_1 y_2 = y_1 x_2$ şeklinde bir bağıntı tanımlanıyor. $\equiv$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterip $(1, 2)$ ve $(2, 3)$ 'ün denklik sınıflarını bulunuz.

Çözüm: $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ olsun.

(i) $(a, b) \equiv (a, b)$ dir, çünkü $ab = ba$ dir.

(ii) $(a, b) \equiv (c, d) \implies ad = bc \implies cb = da \implies (c, d) \equiv (a, b).$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad & (a, b) \equiv (c, d) \implies ad = bc \\
& (c, d) \equiv (e, f) \implies cf = de \\
& \implies adcf = bcde \quad (\text{Taraf tarafa çarpılırsa}) \\
& \implies af = be \quad (\text{Çünkü } c \neq 0, d \neq 0) \\
& \implies (a, b) \equiv (e, f).
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $\equiv$ bir denklik bağıntısıdır. Denklik sınıflarını hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\overline{(1, 2)} &= \{ (c, d) : (1, 2) \equiv (c, d) \} = \{ (c, d) : d = 2c \} \\
&= \{ (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots \}, \\
\overline{(2, 3)} &= \{ (c, d) : (2, 3) \equiv (c, d) \} = \{ (c, d) : 2d = 3c \} \\
&= \{ (2, 3), (4, 6), (6, 9), (8, 12), \dots \}.
\end{aligned}$$

4.) $\mathbb{Z}$ kümesinde $x \equiv y \pmod{5}$ bağıntısı veriliyor. Bu bağıntının denklik bağıntısı olduğunu gösterip $\mathbb{Z}/\equiv$ bölüm kümesini yazınız.

Çözüm: Her $x \in \mathbb{Z}$ için $x \equiv x \pmod{5}$ dir. $x \equiv y \pmod{5} \implies y \equiv x \pmod{5}$ olduğu açıktır. $x \equiv y \pmod{5}$ ve $y \equiv z \pmod{5}$ ise $x \equiv z \pmod{5}$ olur. Yani “ $\equiv \pmod{5}$ ” bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Farklı denklik sınıfları 5 tanedir. Bunlar:

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= \{ y \in \mathbb{Z} : 0 \equiv y \pmod{5} \} = \{ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots \}, \\
\bar{1} &= \{ y \in \mathbb{Z} : 1 \equiv y \pmod{5} \} = \{ \dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots \}, \\
\bar{2} &= \{ y \in \mathbb{Z} : 2 \equiv y \pmod{5} \} = \{ \dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots \}, \\
\bar{3} &= \{ y \in \mathbb{Z} : 3 \equiv y \pmod{5} \} = \{ \dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots \}, \\
\bar{4} &= \{ y \in \mathbb{Z} : 4 \equiv y \pmod{5} \} = \{ \dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots \}.
\end{aligned}$$

O halde

$$\mathbb{Z}/\equiv = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \}.$$

5.) $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ kümesinin $\mathcal{A} = \{ \{ 1, 3, 6 \}, \{ 2, 4 \}, \{ 5 \} \}$ ayrımının belirlediği denklik bağıntısını yazınız.

Çözüm: Bu denklik bağıntısına göre 1,3 ve 6 bir denklik sınıfında; 2 ve 4 diğer bir denklik sınıfında olmalıdır. Buna göre bu ayrımının belirlediği denklik bağıntısı:

$$\beta = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 3), (3, 1), (1, 6), (6, 1), (3, 6), (6, 3), (2, 4), (4, 2) \}.$$

6.) A kümesinde tanımlı β_1 ve β_2 denklik bağıntıları verilsin. (a) $\beta_1 \cap \beta_2$ her zaman bir denklik bağıntısı mıdır? (b) $\beta_1 \cup \beta_2$ her zaman bir denklik bağıntısı mıdır? Gösterin.

Çözüm (a): β_1 ve β_2 yansıyan olduğundan, her $a \in A$ için $(a, a) \in \beta_1$ ve $(a, a) \in \beta_2$ olup $(a, a) \in \beta_1 \cap \beta_2$ dir. Yani $\beta_1 \cap \beta_2$ yansıyandır.

$(a, b) \in \beta_1 \cap \beta_2 \implies (a, b) \in \beta_1$ ve $(a, b) \in \beta_2 \implies \beta_1$ ve β_2 simetrik olduğundan $(b, a) \in \beta_1$ ve $(b, a) \in \beta_2 \implies (b, a) \in \beta_1 \cap \beta_2$ olup $\beta_1 \cap \beta_2$ simetriktir.

$(a, b), (b, c) \in \beta_1 \cap \beta_2 \implies (a, b), (b, c) \in \beta_1$ ve $(a, b), (b, c) \in \beta_2 \implies \beta_1$ ve β_2 geçişken olduğundan $(a, c) \in \beta_1$ ve $(a, c) \in \beta_2 \implies (a, c) \in \beta_1 \cap \beta_2$ olup $\beta_1 \cap \beta_2$ geçişkendir.

Sonuç olarak; aynı küme üzerinde tanımlı iki denklik bağıntısının kesişimi her zaman bir denklik bağıntısıdır.

Çözüm (b): $\beta_1 \cup \beta_2$ her zaman bir denklik bağıntısı olmak zorunda değildir. Mesela: $A = \{1, 2, 3\}$ ve $\beta_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ ve $\beta_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$ alalım. $\beta_1 \cup \beta_2$ geçişken olmaz, çünkü $(2, 1), (1, 3) \in \beta_1 \cup \beta_2$ fakat $(2, 3) \notin \beta_1 \cup \beta_2$.

7.) $\mathbb{R}$ de $x\beta y \iff x^3 + y = y^3 + x$ ile tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısı mıdır? Eğer denklik bağıntısı ise $\bar{0}$ ve $\bar{2}$ denklik sınıflarını bulunuz.

Çözüm: (i) $x = y$ alınırsa $x^3 + x = x^3 + x$ eşitliği her zaman doğrudur. Yani β yansıyandır.

(ii) $x\beta y \implies x^3 + y = y^3 + x \implies y^3 + x = x^3 + y \implies y\beta x$ olup β simetriktir.

(iii) $x\beta y, y\beta z \implies x^3 + y = y^3 + x$ ve $y^3 + z = z^3 + y$ olup bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa

$$x^3 + y + y^3 + z = y^3 + x + z^3 + y \implies x^3 + z = z^3 + x \implies x\beta z$$

olup β geçişkendir. Yani, β bir denklik bağıntısıdır.

$$\bar{0} = \{y \in \mathbb{R} : (0, y) \in \beta\} = \{y \in \mathbb{R} : y = y^3\} = \{0, 1, -1\}.$$

$$\bar{2} = \{y \in \mathbb{R} : (2, y) \in \beta\} = \{y \in \mathbb{R} : 8 + y = y^3 + 2\} = \{y \in \mathbb{R} : y^3 - y - 6 = 0\}$$

Şimdi $2 \in \bar{2}$ olacağından 2 sayısı $y^3 - y - 6 = 0$ denklemini sağlamalıdır. Yani $y^3 - y - 6$ polinomu $y - 2$ polinomuna kalansız bölünür. Bu bölme yapıldığında $y^2 + 2y + 3$ bulunur. Bu polinomun reel kökü yoktur, çünkü $\Delta = 4 - 12 < 0$ dir. O halde:

$$\bar{2} = \{y \in \mathbb{R} : y^3 - y - 6 = 0\} = \{y \in \mathbb{R} : (y - 2)(y^2 + 2y + 3) = 0\} = \{2\}.$$

8.) Bir P kümesinin bir ayrımı $\{A_1, A_2, A_3\}$ olduğuna göre $\{A_1 \times Q, A_2 \times Q, A_3 \times Q\}$ kümesinin $P \times Q$ kümesinin bir ayrımı olduğunu gösteriniz. ($Q \neq \emptyset$ dir.)

Çözüm: $i, j \in \{1, 2, 3\}$ olsun. $\{A_1, A_2, A_3\}$ kümesi P nin bir ayrımı olduğundan

- (i) her i için $A_i \neq \emptyset$ dir.
- (ii) $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$
- (iii) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = P$

önergeleri doğrudur. Şimdi

- (a) her i için $A_i \times Q \neq \emptyset$ dir, çünkü $A_i \neq \emptyset, Q \neq \emptyset$
- (b) $i \neq j \implies (A_i \times Q) \cap (A_j \times Q) = \underbrace{(A_i \cap A_j)}_{\emptyset} \times Q = \emptyset$
- (c) $(A_1 \times Q) \cup (A_2 \times Q) \cup (A_3 \times Q) = \underbrace{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}_P \times Q = P \times Q$

olup ispat tamamlanır.

9.) $\mathbb{Z}$ 'de $a\beta b \iff 3 \mid (5a + b)$ ile tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısı mıdır? Denklik bağıntısı ise $\bar{0}$ ve $\bar{1}$ denklik sınıflarını bulunuz.

Çözüm: (i) $a = b$ alınırsa $3 \mid (5a + a)$ yani $3 \mid 6a$ her zaman doğrudur, çünkü $6a = 3(2a)$.

(ii) $(a, b) \in \beta \implies 3 \mid (5a + b) \implies 5a + b = 3k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Her iki tarafı 5 ile çarparsak:

$$25a + 5b = 15k \implies 5b + a = 15k - 24a = 3(5k - 8a) \implies 3 \mid (5b + a), \quad \text{çünkü } 5k - 8a \in \mathbb{Z}.$$

Yani $(b, a) \in \beta$ olup β simetriktir.

- (iii) $(a, b) \in \beta \implies 3 \mid (5a + b) \implies \exists k \in \mathbb{Z}, 5a + b = 3k$
 $(b, c) \in \beta \implies 3 \mid (5b + c) \implies \exists m \in \mathbb{Z}, 5b + c = 3m$

Sağdaki eşitlikler taraf tarafa toplanıp gerekli düzenleme yapılırsa:

$$5a + c = 3(k + m - 2b) \implies k + m - 2b \in \mathbb{Z} \text{ olduğundan } 3 \mid (5a + c) \implies (a, c) \in \beta$$

olup β geçişkendir. Sonuç olarak; β bir denklik bağıntısıdır.

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{b \in \mathbb{Z} : (0, b) \in \beta\} = \{b \in \mathbb{Z} : 3 \mid (0 + b)\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}. \\ \bar{1} &= \{b \in \mathbb{Z} : (1, b) \in \beta\} = \{b \in \mathbb{Z} : 3 \mid (5 + b)\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}. \end{aligned}$$

10.) $\mathbb{R}$ de $x\beta y \iff |x - y| \leq 1$ ile tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısı mıdır? Denklik bağıntısı ise $\bar{0}$ ve $\overline{-2}$ denklik sınıflarını bulunuz?

Çözüm: Bu bağıntı bir denklik bağıntısı değildir, çünkü $(1, 2) \in \beta, (2, 3) \in \beta$ fakat $(1, 3) \notin \beta$ dır. Yani bağıntı geçişken değildir.

11.) $\mathbb{Z}$ de $x\beta y \iff |x^2 - y^2| \leq 5$ ile tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısı mıdır? Denklik bağıntısı ise $\bar{2}$ ve $\overline{-3}$ denklik sınıflarını bulunuz?

Çözüm: Bu bağıntı bir denklik bağıntısı değildir, çünkü $(0, 2) \in \beta, (2, 3) \in \beta$ fakat $(0, 3) \notin \beta$ dır. Yani bağıntı geçişken değildir.

12.) 3 elemanlı bir A kümesi üzerinde kaç tane farklı denklik bağıntısı yazılabilir?

- ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 18 ☒ Hiçbiri

13.) $\{\{1, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{6\}, \{7\}\}$ ayrımının belirlediği denklik bağıntısı kaç elemanlıdır?

- ☐ 12 ☐ 13 ☐ 14 ☒ 15 ☐ Hiçbiri

14.) 4 elemanlı bir A kümesi üzerinde 6 elemanlı kaç tane denklik bağıntısı yazılabilir?

- ☐ 3 ☐ 4 ☒ 6 ☐ 8 ☐ Hiçbiri

15.) $\beta = \{(1, 1), \dots, (8, 8), (1, 2), (2, 1), (1, 7), (7, 1), (2, 7), (7, 2)\}$ bağıntısında kaç tane farklı denklik sınıfı vardır?

- ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐ Hiçbiri

16.) $\mathbb{R}$ 'de $x\beta y \iff x^2 + 7y = y^2 + 7x$ denklik bağıntısı ise $\sqrt{2}$ nin denklik sınıfı nedir?

- ☐ $\{\sqrt{2}\}$ ☐ $\{\sqrt{2}, \sqrt{2} - 7\}$ ☐ $\{\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$ ☒ $\{\sqrt{2}, 7 - \sqrt{2}\}$ ☐ Hiçbiri

17.) $\mathbb{R}$ de $x\beta y \iff x^2 = y^2$ denklik bağıntısına göre hangi sayının (sayıların) denklik sınıfı bir elemanlıdır?

- ☐ $\mp\sqrt{2}$ ☐ -1 ☐ 1 ☐ 2 ☒ Hiçbiri

18.) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinde $x\beta y \iff "x = y \text{ veya } x + y = 6"$ denklik bağ. tanımlansın. Buna göre A/β kaç elemanlıdır?

- ☐ 3 ☒ 4 ☐ 2 ☐ 5 ☐ Hiçbiri

19.) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlı bir denklik bağıntısının eleman sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- ☐ 16 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 8 ☒ Hiçbiri

20.) $\mathbb{R}$ de $(x, y) \in \beta \iff x^3 - y^3 = x - y$ şeklinde tanımlanan β bir denklik bağıntısı ise $\bar{0}$ kaç elemanlıdır?

- ☐ β denklik bağıntısı değil ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ Hiçbiri

21.) β, A' da bir denklik bağıntısı ve $a, b \in A$ olsun. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- ☐ $\bar{a} = \bar{b} \implies a \in \bar{b}$ ☐ $(a, b) \in \beta \implies \bar{a} = \bar{b}$ ☐ $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset \implies (a, b) \notin \beta$ ☐ $\bar{a} \neq \emptyset$ ☒ Hepsi

Bölüm 5

Sıralama Bağlılıları

Tanım 5.1 β bir $\emptyset \neq A$ kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer β yansıyan, ters simetrik ve geçişken ise β 'ya bir **parçalı sıralama bağıntısı** veya kısaca **sıralama bağıntısı** denir. A kümesine de **(parçalı) sıralanmış küme** denir. Sıralama bağıntıları genelde $\leq, \lesssim, \approx, \preceq, \preccurlyeq$ gibi sembollerle gösterilir. Ayrıca $(x, y) \in \preccurlyeq$ ise bunu kısaca $x \preccurlyeq y$ şeklinde yazar ve “ $\preccurlyeq$ bağıntısına göre x, y den önce gelir” veya kısaca “ x, y den önce gelir” şeklinde okuruz. Ayrıca “ y, x den sonra gelir” ifadesi de kullanılabilir. Bu gösterim şeklinin, daha önce $(x, y) \in \beta$ yerine $x\beta y$ yazılan gösterim şekliyle uyumlu olduğuna dikkat ediniz.

Tanım 5.2 $\preccurlyeq$ bağıntısı bir A kümesinde bir sıralama bağıntısı olsun. Eğer $x, y \in A$ için $x \preccurlyeq y$ veya $y \preccurlyeq x$ ise x ile y elemanlarına **karşılaştırılabilir elemanlar** denir. Eğer A nın bütün elemanları $\preccurlyeq$ bağıntısına göre karşılaştırılabilir elemanlar ise; yani

$$\forall x, y \in A, x \preccurlyeq y \text{ veya } y \preccurlyeq x$$

önermesi doğruysa, $\preccurlyeq$ bağıntısına bir **tam sıralama bağıntısı**, A kümesine de **tam sıralanmış küme** denir.

Örnek 5.3 Doğal sayılar kümesinde bilinen $\leq$ bağıntısını düşünelim. Bu bağıntı bir sıralama bağıntısıdır. Çünkü, her $x \in \mathbb{N}$ için $x \leq x$ olup $\leq$ yansıyandır. Ayrıca, $x \leq y, y \leq x$ ise $x = y$ olup bağıntı ters simetriktir. $x \leq y, y \leq z$ iken $x \leq z$ olup bağıntı geçişkendir. Ayrıca her $x, y \in \mathbb{N}$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ olup bağıntı tam sıralama bağıntısıdır ve $\mathbb{N}$ tam sıralıdır.

Örnek 5.4 $A = \{a, b, c\}$ kümesinin kuvvet kümesi

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$$

üzerinde tanımlanan “ $\subseteq$ ” bağıntısını düşünelim. Bağıntı sıralama bağıntısıdır, çünkü:

- (i) Her $X \in P(A)$ için $X \subseteq X$ olup bağıntı yansıyandır.

(ii) $X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq X$ ise $X = Y$ olup bağıntı ters simetrik.

(iii) $X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq Z$ ise $X \subseteq Z$ olup bağıntı geçişkendir.

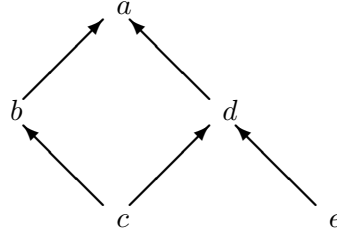
Bu bağıntı bir tam sıralama bağıntısı değildir, çünkü, örneğin, $\{a, b\}$ kümesi ile $\{b, c\}$ kümesi karşılaştırılmaz.

Tanım 5.5 Bir $\preceq$ sıralama bağıntısının şeması $x \preceq y$ ve $x \neq y$ için x den y ye yukarı yönde bir ok çizilerek elde edilen şekildir. Ayrıca $x \preceq y$ ve $y \preceq z$ ise x den z ye ok çizilmez. Yani $x \preceq y$ olması “ x den y ye yukarı yönde okları takip ederek gidilebilir” anlamına gelmektedir.

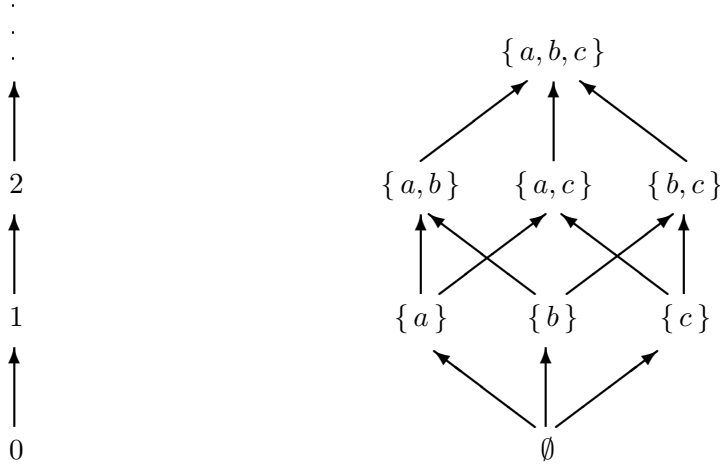
Örnek 5.6 $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde tanımlanan

$$\beta = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (c, d), (d, a), (c, a), (c, b), (b, a), (e, d), (e, a)\}$$

sıralama bağıntısının şeması:



Örnek 5.7 Daha önce verilen $\mathbb{N}$ deki bilinen $\leq$ sıralama bağıntısı ile $A = \{a, b, c\}$ kümesinin kuvvet kümesi üzerinde verilen $\subseteq$ sıralama bağıntılarının şemaları şöyledir:



Tanım 5.8 $\lesssim$ bağıntısı bir A kümesinde bir sıralama bağıntısı olsun. $a \in A$ olsun. Her $x \in A$ için

$$x \lesssim a \implies x = a$$

önermesi doğru ise a elemanına **bir küçük eleman** (*minimal eleman*) denir. Yani A kümesinde a 'dan önce gelen eleman sadece a ise a elemanına bir küçük eleman denir. Benzer şekilde bir $b \in A$ elemanından sonra gelen elemanlar sadece b 'nin kendisi ise b 'ye **bir büyük eleman** (*maksimal eleman*) denir. Yani, her $x \in A$ için

$$b \lesssim x \implies x = b$$

önermesi doğru ise b 'ye bir büyük eleman denir. Tanımdan da anlaşılacağı gibi bir sıralı kümede küçük ve büyük elemanlar birden fazla olabilir.

Tanım 5.9 $\lesssim$ bağıntısı bir A kümesinde bir sıralama bağıntısı olsun. $B \subseteq A$ olsun. Eğer her $x \in B$ için $b \lesssim x$ olacak şekilde bir $b \in B$ varsa b 'ye B kümesinin **en küçük elemanı** (*minimumu*) denir. Benzer şekilde, eğer her $x \in B$ için $x \lesssim c$ olacak şekilde bir $c \in B$ varsa c 'ye B kümesinin **en büyük elemanı** (*maksimumu*) denir. Yani bir kümenin en küçük (büyük) elemanı kümedeki bütün elemanlarla karşılaştırılan ve kümedeki her elemandan önce (sonra) gelen elemandır. Bu elemanlar sırasıyla $\min B$ ve $\max B$ ile gösterilir. Tanımdan da anlaşılacağı gibi bir kümenin en küçük ve en büyük elemanı (varsa) o kümeye ait olmak zorundadır.

Teorem 5.10 Bir $B \subseteq A$ kümesinin minimumu ve maksimumu varsa bir tanedir.

İspat: b_1 ve b_2 , B kümesinin iki minimumu olsun. b_1 bir minimum olduğundan $b_1 \lesssim b_2$ dir. Ayrıca b_2 de bir minimum olduğundan $b_2 \lesssim b_1$ dir. $\lesssim$ bağıntısı ters simetrik olduğundan $b_1 = b_2$ elde edilir. Maksimumun (varsa) tek olduğu benzer şekilde ispatlanır. $\square$

Örnek 5.11 $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümesinde $x \lesssim y \iff x|y$ sıralama bağıntısına göre A kümesindeki küçük elemanların kümesi $\{2, 3, 5, 7\}$ ve büyük elemanların kümesi $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ dur. A kümesinin en küçük ve en büyük elemanı yoktur. $\min\{2, 4, 8\} = 2$, $\max\{2, 4, 8\} = 8$ dir. $\min\{2, 4, 8, 10\} = 2$ olup en büyük elemanı yoktur. $\{2, 5, 10\}$ kümesinin en küçük elemanı yoktur, ama $\max\{2, 5, 10\} = 10$ dur. Ne en küçük, ne de en büyük elemana sahip bir küme ise $\{3, 5, 6, 10\}$ dur. Tek elemanlı bir $\{a\}$ kümesinin en küçük elemanı da en büyük elemanı da a dir.

Tanım 5.12 $\lesssim$ bağıntısı bir A kümesinde bir sıralama bağıntısı ve $B \subseteq A$ olsun. Bir $a_0 \in A$ ve her $x \in B$ için $a_0 \lesssim x$ oluyorsa a_0 elemanına B için bir **alt sınır** denir. Benzer şekilde, bir $a_1 \in A$ ve her $x \in B$ için $x \lesssim a_1$ oluyorsa a_1 elemanına B için bir **üst sınır** denir. Alt sınıra sahip kümeler **alttan sınırlı küme**, üst sınıra sahip kümeler de **üstten sınırlı küme** denir. Eğer B alttan sınırlı bir küme ise, B nin bütün alt sınırlarının oluşturduğu kümenin en büyük elemanına (varsa) B nin **en büyük alt sınırı** (*infimumu*) denir ve $\inf B$ veya $\text{ebas } B$ ile gösterilir. Benzer şekilde, eğer B üstten sınırlı bir küme ise, B nin bütün üst sınırlarının oluşturduğu kümenin en küçük elemanına (varsa) B nin **en küçük üst sınırı** (*supremumu*) denir ve $\sup B$ veya $\text{eküs } B$ ile gösterilir. Tanımdan da anlaşılacağı gibi bir B kümesinin üst sınırı, alt sınırı, infimumu ve supremumu kümeye ait olmak zorunda değildir.

$$\sup B = \text{eküs } B = \min \{ B' \text{'nin bütün üst sınırları} \}$$

$$\inf B = \text{ebas } B = \max \{ B' \text{'nin bütün alt sınırları} \}$$

Teorem 5.13 Bir $B \subseteq A$ kümesinin infimumu ve supremumu varsa bir tanedir.

İspat: B kümesinin infimumu (supremumu) B nin alt (üst) sınırlarının maksimumu (minimumu) olduğundan ve bir kümenin maksimumu (minimumu) eğer varsa tek olduğundan (bkz. Teorem 5.10), B kümesinin infimumu (supremumu) varsa tektir.

Örnek 5.14 $A = \mathbb{R}$ alalım ve bilinen $\leq$ sıralamasını düşünelim. $B_1 = [0, \sqrt{3})$ olsun. Sıfır veya negatif bir sayı bu küme için bir alt sınırdır. Yani B_1 in alt sınırlarının kümesi $(-\infty, 0]$ olup bu kümenin maksimumu 0 olduğundan $\text{ebas } B_1 = 0$ dır. Benzer şekilde $\text{eküs } B_1 = \min[\sqrt{3}, \infty) = \sqrt{3}$ dür. Şimdi de B_2 kümesi olarak 0 dan büyük bütün rasyonel sayıları alalım. B_2 nin alt sınırlarının kümesi $(-\infty, 0]$ olup $\text{ebas } B_1 = 0$ dır. B_2 nin üst sınırlarının kümesi boşküme olup bu küme üstten sınırlı değildir, o halde supremumu yoktur.

Tanım 5.15 A kümesi bir sıralı küme olsun. Eğer A nın boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük elemanı varsa A ya *iyi sıralanmış bir küme*, buradaki sıralama bağlantısına da bir *iyi sıralama bağlantısı* denir.

Örnek 5.16 $\mathbb{N}$ kümesi bilinen $\leq$ sıralama bağlantısına göre iyi sıralı bir kümedir, çünkü her alt kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ iyi sıralı değildir çünkü, örneğin, $\mathbb{Z}^-$ kümesinin bir en küçük elemanı yoktur. $\mathbb{R}$ de iyi sıralı değildir, çünkü $(0, 1)$ açık aralığının bir en küçük elemanı yoktur.

Teorem 5.17 İyi sıralı her A kümesi tam sıralıdır.

İspat: $x, y \in A$ olsun. A kümesi iyi sıralı olduğundan $\{x, y\}$ alt kümesinin en küçük elemanı vardır. Bu eleman x ise $x \lesssim y$ olup x ile y karşılaştırılabilir. Aksi halde $y \lesssim x$ olup y ile x karşılaştırılabilir. Her iki halde de bu iki eleman karşılaştırılır. O halde A tam sıralıdır. $\square$

ALIŞTIRMALAR

1.) A kümesi 30 sayısının pozitif bölenleri olsun. A üzerinde " $x \lesssim y \iff x|y$ " sıralama bağlantısı verilsin. A kümesi bu bağlantıya göre tam sıralı mıdır? İyi sıralı mıdır? $B = A \setminus \{1, 30\}$ kümesinin en küçük ve en büyük elemanı var mıdır? $\text{eküs } \{3, 5\} = ?$, $\text{ebas } \{3, 5\} = ?$

Çözüm: $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ elde edilir. A kümesi bu bağıntıya göre tam sıralı değildir, çünkü 2 ile 3 karşılaştırılmaz. ($2 \nmid 3$ ve $3 \nmid 2$ önermeleri yanlıştır.) A kümesi bu bağıntıya göre iyi sıralı değildir, çünkü $\{2, 3, 5\}$ altkümesinin ($\preceq$ bağıntısına göre) en küçük elemanı yoktur. $B = \{2, 3, 5, 6, 10, 15\}$ olduğu açıktır. B kümesinin en küçük elemanı 2 olamaz, çünkü 3 ile karşılaştırılmaz. Benzer şekilde diğer elemanlar da en küçük eleman olamaz. B kümesinin en büyük elemanı 15 olamaz, çünkü 6 ile karşılaştırılmaz. Benzer şekilde diğer elemanlar da en büyük eleman olamaz.

$\{3, 5\}$ kümesinin alt sınırlar kümesi $\{1\}$ dir. $\{3, 5\}$ kümesinin üst sınırlar kümesi $\{15, 30\}$ dur. O halde:

$$\text{eküs} \{3, 4\} = \min \{15, 30\} = 15,$$

$$\text{ebas} \{3, 4\} = \max \{1\} = 1.$$

2.) a) İyi sıralı bir kümenin her alt kümesinin iyi sıralı olduğunu gösterin.

b) Tam sıralı bir kümenin her alt kümesinin tam sıralı olduğunu gösterin.

c) Tam sıralı olan fakat iyi sıralı olmayan bir kümeye örnek veriniz.

İspat: a) $\emptyset \neq A$ kümesinde bir sıralama bağıntısı verilsin. A kümesi (verilen bağıntıya göre) iyi sıralı olsun. $B \subseteq A$ olsun. $B = \emptyset$ ise B nin iyi sıralı olduğu açıktır. $B \neq \emptyset$ olsun. $X \subseteq B$ ve $X \neq \emptyset$ olsun. X kümesinin en küçük elemanı vardır; çünkü $X \subseteq A$ dır ve A iyi sıralıdır. Seçilen X keyfi olduğundan B nin boş olmayan her alt kümesinin en küçük elemanı vardır. Yani B iyi sıralıdır.

İspat: b) $\emptyset \neq A$ kümesinde $\preceq$ sıralama bağıntısı verilsin. A kümesi (bu bağıntıya göre) tam sıralı olsun. $B \subseteq A$ olsun. $B = \emptyset$ ise B nin tam sıralı olduğu açıktır. $B \neq \emptyset$ olsun. $x, y \in B$ olsun. $x \preceq y$ ve $y \preceq x$ önermelerinden en az biri doğrudur; çünkü x ile y , A 'nın da elemanlarıdır ve A tam sıralıdır. O halde x ile y karşılaştırılabilir elemanlardır. Seçilen x ve y keyfi olduğundan B nin her elemanı karşılaştırılabilir. Yani B tam sıralıdır.

Çözüm: c) $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinde bilinen $\leq$ sıralama bağıntısı verilsin. Bu bağıntı bir tam sıralama bağıntısıdır; çünkü her $a, b \in \mathbb{Z}$ için ya $a \leq b$ ya da $b \leq a$ dır. Yani, $\mathbb{Z}$ tam sıralıdır. Bu küme $\leq$ bağıntısına göre iyi sıralı değildir; çünkü mesela $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$ negatif tamsayılar kümesinin bir en küçük elemanı yoktur.

3.) A en az 2 elemanlı bir küme olsun. $P(A)$ kuvvet kümesi üzerinde tanımlanan “ $X \leq Y \iff X \subseteq Y$ ” bağıntısının bir sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz. $P(A)$ kümesi bu bağıntıya göre tam sıralı mıdır? Neden? A bir elemanlı bir küme olsaydı $P(A)$ kümesi tam sıralı olur muydu? Neden?

Çözüm: Bu bağıntı bir sıralama bağıntısıdır; çünkü

(i) Her $X \in P(A)$ için $X \subseteq X$ olup bağıntı yansıyandır.

(ii) $X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq X$ ise $X = Y$ olup bağıntı ters simetriktir.

(iii) $X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq Z$ ise $X \subseteq Z$ olup bağıntı geçişkendir.

$P(A)$ kümesi bu bağıntıya göre tam sıralı değildir; mesela $A = \{a, b\}$ alınırsa $X = \{a\}$ ile $Y = \{b\}$ karşılaştırılmaz.

A bir elemanlı olsaydı (mesela $A = \{a\}$ gibi), o zaman $P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$ olurdu. Bu durumda $P(A)$ nın tüm elemanları (toplam 2 eleman) birbiriyle karşılaştırılırdı. Yani $P(A)$ tam sıralı olurdu.

4.) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 'de aşağıdaki gibi tanımlanan bağıntı bir sıralama bağıntısı mıdır? Tam sıralama bağıntısı mıdır?

$$(x, y) \preceq (a, b) \iff x \leq a \text{ ve } y \leq b$$

Çözüm: (i) Her $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için “ $x \leq x$ ve $y \leq y$ ” önermesi doğrudur; çünkü $x = x$ ve $y = y$ dir. O halde $(x, y) \preceq (x, y)$ dir. Yani bağıntı yansıyandır.

(ii) $(x, y) \preceq (a, b)$ ve $(a, b) \preceq (x, y)$ önermeleri doğru olsun. Buradan:

$$x \leq a \text{ ve } y \leq b \text{ ve } a \leq x \text{ ve } b \leq y$$

elde edilir. $x \leq a$ ve $a \leq x$ ifadelerinden $x = a$ bulunur. Benzer şekilde; $y \leq b$ ve $b \leq y$ ifadelerinden $b = y$ bulunur. Yani $(x, y) = (a, b)$ dir. O halde bağıntı ters simetriktir.

(iii) $(x, y) \preceq (a, b)$ ve $(a, b) \preceq (c, d)$ önermeleri doğru olsun. Buradan:

$$x \leq a \text{ ve } y \leq b \text{ ve } a \leq c \text{ ve } b \leq d$$

elde edilir. $x \leq a$ ve $a \leq c$ ifadelerinden $x \leq c$ bulunur. Benzer şekilde; $y \leq b$ ve $b \leq d$ ifadelerinden $y \leq d$ bulunur. Yani $(x, y) \preceq (c, d)$ dir. O halde bağıntı geçişkendir.

Sonuç olarak; $\preceq$ bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır. Bu bağıntı bir tam sıralama bağıntısı değildir, çünkü $(1, 5)$ ile $(2, 3)$ karşılaştırılmaz.

5.) A ve B tam sıralanmış iki küme olsun (bu kümedeki bağıntıları $\leq$ ile gösterelim). $A \times B$ üzerinde aşağıdaki tanımlanan bağıntı bir sıralama bağıntısı mıdır? $A \times B$ bu bağıntıya göre tam sıralı mıdır?

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \iff a_1 < a_2 \text{ ise veya } a_1 = a_2 \text{ iken } b_1 \leq b_2 \text{ ise}$$

(Not: $a_1 < a_2$ ifadesi “ $a_1 \leq a_2$ ve $a_1 \neq a_2$ ” anlamındadır.)

Çözüm: Bir örnekle $\preceq$ bağıntısını anlamaya çalışalım. $A = \{a, b, c\}$ kümesinde $a \leq b \leq c$ sıralaması verilsin. $B = \{1, 2, 3\}$ kümesinde de $1 \leq 2 \leq 3$ sıralaması verilsin. Buna göre $A \times B$ kümesindeki sıralama bağıntısı şöyle yazılabilir:

$$(a, 1) \preceq (a, 2) \preceq (a, 3) \preceq (b, 1) \preceq (b, 2) \preceq (b, 3) \preceq (c, 1) \preceq (c, 2) \preceq (c, 3).$$

$A \times B$ kümesindeki iki elemanın hangisinin önce geldiğine bakılırken önce birinci bileşenlere bakılmakta; birinci bileşenler eşit ise ikinci bileşenlere bakılmaktadır. Bu ise sanki Türkçe'deki iki harfli iki kelimenin hangisinin sözlükte daha önce geldiğine bakmaya benzemektedir. Bu yüzden bu tür sıralamalara “sözlük sıralaması” denmektedir. Şimdi, genel halde, yukarıda tanımlanan bağıntının özelliklerini inceleyelim.

(i) Her $(a_1, b_1) \in A \times B$ için $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ olur; çünkü tanımda (a_2, b_2) yerine (a_1, b_1) yazılırsa

$$a_1 < a_1 \text{ ise veya } a_1 = a_1 \text{ iken } b_1 \leq b_1 \text{ ise}$$

önermesi elde edilir. Bu önerme her zaman doğrudur; çünkü “veya”nın sağ tarafı her zaman doğrudur. (B tam sıralı olduğundan $b_1 \leq b_1$ dir). Yani bağıntı yansıyandır.

(ii) $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ olsun. Ayrıca $(a_2, b_2) \preceq (a_1, b_1)$ olsun. Şimdi $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ olması için 3 durum vardır.

Durum 1: $a_1 < a_2$: Bu durumda $a_1 \neq a_2$ dir ve a_1, a_2 den önce gelir. Ancak bu durum, $(a_2, b_2) \preceq (a_1, b_1)$ olması ile çelişir.

Durum 2: $a_1 = a_2$ ve $b_1 < b_2$: Bu durumda $b_1 \neq b_2$ dir ve b_1, b_2 den önce gelir. Ancak bu durum, $(a_2, b_2) \preceq (a_1, b_1)$ olması ile çelişir.

Durum 3: $a_1 = a_2$ ve $b_1 = b_2$: Bu durumda $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ dir.

Sonuç olarak, sadece 3. durum mümkün olduğundan bağıntı ters simetriktir.

(iii) $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ ve $(a_2, b_2) \preceq (a_3, b_3)$ olsun. Öncelikle, aşağıdaki 3 durumu inceleyelim:

$$a_1 = a_2 < a_3, \quad a_1 < a_2 = a_3, \quad a_1 < a_2 < a_3.$$

Bu 3 durumda da $a_1 < a_3$ olur; çünkü A daki sıralama bağıntısı geçişkendir. O zaman $(a_1, b_1) \preceq (a_3, b_3)$ olduğu açıktır. O halde $a_1 = a_2 = a_3$ durumunu inceleyelim. Bu durumda $b_1 \leq b_2$ ve $b_2 \leq b_3$ olduğu açıktır. B daki sıralama bağıntısı geçişken olduğundan $b_1 \leq b_3$ olur. Fakat bu durumda yine $(a_1, b_1) \preceq (a_3, b_3)$ elde edilir. Yani bağıntı geçişkendir.

Sonuç olarak $\preceq$ bir sıralama bağıntısıdır. Şimdi diğer soruyu cevaplandıralım. $X = (a_1, b_1) \in A \times B$ ve $Y = (a_2, b_2) \in A \times B$ verilsin.

Durum A: $a_1 \neq a_2$ iken: $a_1 < a_2$ ve $a_2 < a_1$ önermelerinden birisi mutlaka doğrudur, çünkü A tam sıralıdır. O halde $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ veya $(a_2, b_2) \preceq (a_1, b_1)$ dir. Yani X ile Y karşılaştırılabilir.

Durum B: $a_1 = a_2$ iken: B tam sıralı olduğundan, ya $b_1 \leq b_2$ ya da $b_2 \leq b_1$ dir. O halde $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2)$ veya $(a_2, b_2) \preceq (a_1, b_1)$ dir. Yani X ile Y karşılaştırılabilir.

Sonuç olarak her iki durumda da $A \times B$ tam sıralıdır.

6.) A kümesinde tanımlı β_1 ve β_2 sıralama bağıntıları verilsin. **(a)** $\beta_1 \cap \beta_2$ her zaman bir sıralama bağıntısı mıdır? **(b)** $\beta_1 \cup \beta_2$ her zaman bir sıralama bağıntısı mıdır? Açıklayın.

Çözüm (a): β_1 ve β_2 yansıyan olduğundan, her $a \in A$ için $(a, a) \in \beta_1$ ve $(a, a) \in \beta_2$ olup $(a, a) \in \beta_1 \cap \beta_2$ dir. Yani $\beta_1 \cap \beta_2$ yansıyandır.

$(a, b), (b, a) \in \beta_1 \cap \beta_2 \implies (a, b), (b, a) \in \beta_1$ ve $(a, b), (b, a) \in \beta_2 \implies \beta_1$ ve β_2 ters simetrik olduğundan $a = b$ olup $\beta_1 \cap \beta_2$ ters simetriktir.

$(a, b), (b, c) \in \beta_1 \cap \beta_2 \implies (a, b), (b, c) \in \beta_1$ ve $(a, b), (b, c) \in \beta_2 \implies \beta_1$ ve β_2 geçişken olduğundan $(a, c) \in \beta_1$ ve $(a, c) \in \beta_2 \implies (a, c) \in \beta_1 \cap \beta_2$ olup $\beta_1 \cap \beta_2$ geçişkendir.

Sonuç olarak; aynı küme üzerinde tanımlı iki sıralama bağıntısının kesişimi her zaman bir sıralama bağıntısıdır.

Çözüm (b): $\beta_1 \cup \beta_2$ her zaman bir sıralama bağıntısı olmak zorunda değildir. Mesela, $A = \{1, 2, 3\}$ ve $\beta_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\}$ ve $\beta_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3)\}$ alalım. $\beta_1 \cup \beta_2$ geçişken olmaz, çünkü $(1, 2), (2, 3) \in \beta_1 \cup \beta_2$ fakat $(1, 3) \notin \beta_1 \cup \beta_2$.

7.) $A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$ kümesinde $x \preceq y \iff y \mid x$ bağıntısına göre küçük elemanların kümesi hangisidir?

- ☐ $\{2, 3, 7\}$ ☒ $\{4, 6, 7\}$ ☐ $\{2, 3\}$ ☐ $\{4, 6\}$ ☐ Hiçbiri

8.) $A = \{2, 4, 8, 14\}$ kümesi üzerinde " $x \preceq y \iff x \mid y$ " sıralama bağıntısına göre p : " A tam sıralıdır", q : " A iyi sıralıdır" önermelerinin doğruluk değerleri nedir?

- ☐ p, q : Doğru ☒ p, q : Yanlış ☐ p : Doğru, q : Yanlış ☐ p : Yanlış, q : Doğru ☐ Hiçbiri

9.) $\mathbb{R}'$ de bilinen $\leq$ sıralama bağıntısına göre $(-1, 1) \cup \{3\}$ kümesi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- ☒ eküs, ebas var ☐ eküs, ebas yok ☐ eküs var, ebas yok ☐ eküs yok, ebas var ☐ Hiçbiri

10.) 4 elemanlı bir A kümesi üzerinde tanımlanan bir sıralama bağıntısı en fazla kaç elemanlı olabilir?

- ☒ 10 ☐ 9 ☐ 7 ☐ 8 ☐ Hiçbiri

11.) $A = \mathbb{R}$ kümesinde bilinen $\leq$ sıralaması verilsin. $B = \left\{x \in \mathbb{Q} : -\frac{1}{3} < x \leq 4\right\}$ olsun. Buna göre $\text{ebas}(B)$ ve $\text{eküs}(B)$ sırasıyla nedir?

- ☒ $-\frac{1}{3}$ ve 4 ☐ Yok ve 4 ☐ $-\frac{1}{3}$ ve yok ☐ 4 ve $-\frac{1}{3}$ ☐ Hiçbiri

12.) $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 14, 18, 21\}$ kümesi üzerinde " $x \preceq y \iff x \mid y$ " sıralama bağıntısına göre aşağıdaki kümelerden hangisinin eküs'ü vardır?

- ☐ $\{3, 4\}$ ☐ $\{4, 5\}$ ☐ $\{5, 6\}$ ☐ $\{6, 8\}$ ☒ Hiçbiri

13.) $\mathbb{R}'$ de bildiğimiz $\leq$ sıralama bağıntısı verilsin. Buna göre p : " $\mathbb{R}$ tam sıralıdır", q : " $\mathbb{R}$ iyi sıralıdır" önermelerini doğruluk değerleri nedir?

- ☐ p, q : Doğru ☐ p, q : Yanlış ☒ p : Doğru, q : Yanlış ☐ p : Yanlış, q : Doğru ☐ Hiçbiri

14.) $A = \{1, 4, 5, 6, 8, 10, 16\}$ kümesinde " $x \preceq y \iff x \mid y$ " bağıntısına göre küçük elemanlar nedir?

- ☐ $\{1, 4, 5, 6\}$
☒ $\{1\}$
☐ $\{4, 5\}$
☐ $\{1, 5\}$
☐ Hiçbiri
- 15.) 6 elemanlı bir A kümesi üzerindeki bir sıralama bağıntısı en az kaç elemanlı olmalıdır?
- ☒ 6
 ☐ 7
 ☐ 8
 ☐ 9
 ☐ Hiçbiri
- 16.) Doğal sayılar kümesinde bildiğimiz $\leq$ sıralama bağıntısı verilsin? $A = \{x \in \mathbb{N} : x > 7\}$ kümesi için ebas A ve eküs A için hangisi doğrudur?
- ☐ yok, 7
 ☐ yok, yok
 ☐ 0, 7
 ☐ 7, yok
 ☒ Hiçbiri
- 17.) $A = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 13\}$ kümesinde " $x \preceq y \iff x|y$ " bağıntısına göre büyük elemanlar nedir?
- ☐ $\{6, 10\}$
☐ $\{6, 8, 10\}$
☒ $\{6, 8, 10, 13\}$
☐ $\{5, 8, 10, 13\}$
☐ Hiçbiri
- 18.) 3 elemanlı bir A kümesi üzerindeki bir sıralama bağıntısı en fazla kaç elemanlı olur?
- ☐ 4
 ☐ 5
 ☒ 6
 ☐ 7
 ☐ Hiçbiri
- 19.) Rasyonel sayılar kümesinde bildiğimiz $\leq$ sıralama bağıntısı verilsin? $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0, 2 < x^2 < 49\}$ kümesin ebas'ı ve eküs'ü için hangisi doğrudur?
- ☒ yok, 7
 ☐ yok, yok
 ☐ 0, 7
 ☐ 7, yok
 ☐ Hiçbiri

MT107 SOYUT MATEMATİK I DERSİ ÖRNEK YARIYILSONU SINAVI

- 1.) $p \implies (p \wedge q')$ önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?
☒ $p' \vee q'$ ☐ $p \wedge q$ ☐ $p' \vee q$ ☐ $q' \vee p$ ☐ Hiçbiri
- 2.) Evrensel küme ile $A \cap B$ kümesinin simetrik farkı nedir?
☐ $A \cap B$ ☐ $A' \cap B'$ ☐ $A \cup B$ ☐ $A \Delta B$ ☒ Hiçbiri
- 3.) A ve B kümeleri ayrık değilse aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?
☐ $A \setminus B \neq \emptyset$ ☐ $s(A \cup B) \geq 2$ ☒ $A \Delta B \neq A \cup B$ ☐ $s(A \times B) \geq 2$ ☐ Hiçbiri
- 4.) $(A \setminus B) \setminus C$ kümesinin tümleyeni hangisidir?
☐ $B' \cup C' \cup A$ ☒ $B \cup C \cup A'$ ☐ $A \cup C \cup B'$ ☐ $C' \cup A \cup B$ ☐ Hiçbiri
- 5.) $A = \{0, \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ ise aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
☐ $\{\{\emptyset\}\} \in A$ ☐ $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$ ☐ $\{0, \emptyset\} \subseteq A$ ☒ $\{0, \emptyset\} \in A$ ☐ Hiçbiri
- 6.) $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ailesi verilsin. Eğer $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
☐ $\forall i \in I, x \in A'_i$ ☒ $\exists i \in I, x \in A'_i$ ☐ $\exists i \in I, x \in A_i$ ☐ $\exists i \in I, x \notin A'_i$ ☐ Hiçbiri
- 7.) $A \times B$ kümesi en az bir elemanlı ise aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?
☐ $s(A \cup B) \geq 2$ ☐ $A \cap B \neq \emptyset$ ☒ $s(A \cup B) \geq 1$ ☐ $A \setminus B = \emptyset$ ☐ Hiçbiri
- 8.) $\beta = \{(2, 6), (5, 3), (1, 4)\}$ olsun. $(5, 6) \in \beta \circ \alpha$ ise aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?
☐ $(5, 1) \in \alpha$ ☐ $(5, 3) \in \alpha$ ☐ $(3, 6) \in \alpha$ ☐ $(5, 4) \in \alpha$ ☒ Hiçbiri
- 9.) $\mathbb{N}^+$ kümesinde “ $(a, b) \in \beta \iff 3 \mid a$ ” şeklinde tanımlanan bağıntı için hangisi doğrudur?
☐ Yansıyandır ☐ Simetriktir ☐ Ters simetriktir ☒ Geçişkendir ☐ Hiçbiri
- 10.) $\mathbb{Z}'$ de $(a, b) \in \beta \iff “a = b + 1 \text{ veya } b = a + 1”$ bağıntısının özelliklerinin listesi hangisidir?
☒ Simetri ☐ Ters simetri ☐ Simetri, geçişme ☐ Ters simetri, geçişme ☐ Hiçbiri

Diğer Sayfaya Geçiniz

Adı, Soyadı:

Numarası: MT

11.) $\mathbb{Q}$ da tanımlı $(x, y) \in \beta \iff 9x^3 + x = 9y^3 + y$ bağıntısına göre 1'in denklik sınıfı nedir?

- ☐ $\{1, 0, -1\}$ ☐ $\{1, -3, 3\}$ ☒ $\{1\}$ ☐ β denklik bağ. değil ☐ Hiçbiri

12.) $\mathbb{R}$ de tanımlı $x\beta y \iff 2x^2 + 3y = 2y^2 + 3x$ denklik bağıntısı ise hangi $a \in \mathbb{R}$ için $\bar{a}$ bir elemanlıdır?

- ☐ $a = 0$ ☐ $a = 4/3$ ☐ $a = -3/4$ ☐ $a = -4/3$ ☒ Hiçbiri

13.) $\mathcal{A} = \{\{a, c, h\}, \{b, d, e, f\}, \{g, m\}, \{k\}\}$ ayrımının belirlediği denklik bağıntısı kaç elemanlıdır?

- ☒ 30 ☐ 31 ☐ 29 ☐ 27 ☐ Hiçbiri

14.) β, A' da bir denklik bağıntısı ve $a, b \in A$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

- ☐ $a \neq b \implies \bar{a} \neq \bar{b}$ ☐ $s(\bar{a}) \geq 2$ ☐ $a \in \bar{b} \implies a = b$ ☒ $(a, b) \notin \beta \iff \bar{a} \neq \bar{b}$ ☐ Hiçbiri

15.) $\mathbb{R}$ de aşağıdaki eşitliklerle verilen bağıntılardan hangisi bir denklik bağıntısı tanımlar?

- ☐ $\frac{x}{y} = y$ ☒ $x(x+1) = y(y+1)$ ☐ $xy = x^2$ ☐ $x = |y|$ ☐ Hiçbiri

16.) $A = \{2, 3, 4, 6\}$ 'da $x|y$ bağıntısına göre iki elemanlı altkümelerden kaç tanesinin ebas'ı vardır?

- ☒ 4 tanesinin ☐ 3 tanesinin ☐ 5 tanesinin ☐ 2 tanesinin ☐ Hiçbiri

17.) p : "Hem tam sıralı hem iyi sıralı küme yoktur", q : "Sonlu her küme iyi sıralıdır" olsun. Buna göre

- ☐ p, q : Doğru ☒ p, q : Yanlış ☐ p : Doğru, q : Yanlış ☐ p : Yanlış, q : Doğru ☐ Hiçbiri

18.) Reel sayılar kümesinde bilinen $\leq$ sıralama bağıntısına göre hangi kümenin minimumu vardır?

- ☐ $\left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ☐ $\mathbb{Q}^+$ ☐ $\left\{-\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ☒ $\left\{\sqrt{2} + \frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ☐ Hiçbiri

19.) $\mathbb{Q}$ 'da bilinen $\leq$ sıralama bağıntısına göre $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ ve } 12 < x^2\}$ kümesinin ebas ve eküs'ü nedir?

- ☐ 12 ve yok ☐ 0 ve yok ☐ $\sqrt{12}$ ve yok ☐ 0 ve $\sqrt{12}$ ☒ Hiçbiri

20.) $A = \{4, 5, 6, \dots, 99\}$ kümesinde $x|y$ sıralama bağıntısına göre hangi küme üstten sınırlıdır?

- ☐ $\{20, 35\}$ ☐ $\{11, 34\}$ ☒ $\{4, 21\}$ ☐ $\{21, 49\}$ ☐ Hiçbiri

NOT: Net puanınız doğru cevap sayısından yanlış cevap sayınızın 1/4'ü çıkarılarak hesaplanacaktır. Süre 75 dakikadır. ☒ şeklinde işaretleyiniz.

BAŞARILAR Yrd.Doç.Dr.Hüseyin BİLGİÇ

Bölüm 6

Fonksiyonlar

Tanım 6.1 A ve B boş olmayan iki küme ve $f \subseteq A \times B$ olsun, yani f , A 'dan B 'ye bir bağıntı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar gerçekleşiyorsa f ye A 'dan B 'ye bir **fonksiyon** (*dönüşüm, tasvir*) denir.

- (i) Her $x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde bir $y \in B$ olmalı; yani A 'da f bağıntısına göre eşlenmemiş eleman olmamalı,
- (ii) Her $x \in A$ için $(x, y_1) \in f$ ve $(x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2$ olmalı; yani A kümesinde bir eleman iki farklı elemanla eşlenmemeli.

Başka bir ifadeyle, A dan B ye bir f fonksiyonu; A nın her elemanını B nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen bir kuraldır. Eğer f bağıntısı A 'dan B 'ye bir fonksiyon ise bunu $f : A \longrightarrow B$ şekline gösteririz. Burada, A kümesine f nin **tanım kümesi**, B 'ye de **değer kümesi** denir.

Örnek 6.2 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ olsun. Aşağıdaki bağıntıları inceleyelim.

$$f_1 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 7)\}$$

$$f_2 = \{(a, 1), (b, 5), (c, 6), (d, 3), (c, 5)\}$$

$$f_3 = \{(a, 6), (b, 6), (c, 6), (d, 6)\}$$

$$f_4 = \{(a, 3), (b, 1), (c, 4), (d, 7)\}$$

Burada f_1 fonksiyon değildir, çünkü d elemanı eşlenmemiştir. f_2 de bir fonksiyon değildir, çünkü c elemanı iki farklı elemanla (6 ve 5 ile) eşlenmiştir. f_3 ve f_4 , A 'dan B 'ye birer fonksiyon olup $f_3 : A \longrightarrow B$ ve $f_4 : A \longrightarrow B$ yazarız.

Tanım 6.3 $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun. $(x, y) \in f$ ise y elemanına x elemanının f altındaki **görüntüsü** denir ve $y = f(x)$ yazılır. Yani;

$$f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

yazılabilir. A daki bütün elemanların f altındaki görüntülerinden oluşan kümeye f nin ***görüntü kümesi*** denir ve $G(f)$ ile gösterilir. Yani

$$G(f) = \{ f(x) : x \in A \} = \{ y \in B : \exists x \in A, f(x) = y \}.$$

Buna göre önceki örnekte $G(f_3) = \{ 6 \}$ ve $G(f_4) = \{ 1, 3, 4, 7 \}$ yazılabilir.

Tanım 6.4 $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon ve $M \subseteq A, M \neq A$ olsun. Eğer $g : M \rightarrow B$ fonksiyonu her $x \in M$ için $f(x) = g(x)$ şartını sağlıyorsa g fonksiyonuna f fonksiyonunun M alt kümesine ***kısıtlanmış*** denir ve $g = f|_M$ yazılır. Benzer şekilde, $A \subseteq D, A \neq D$ olsun. Eğer $h : D \rightarrow B$ fonksiyonu her $x \in A$ için $f(x) = h(x)$ şartını sağlıyorsa h fonksiyonuna f fonksiyonunun D kümesine ***genişletilmiş*** denir. Bu durumda $h|_A = f$ olduğu açıktır.

Örnek 6.5 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \frac{x + |x|}{2}$ kuralı ile verilsin. $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(x) = x$ kuralı ile verilmişse g fonksiyonu f nin $\mathbb{R}^+$ kümesine kısıtlanmışdır çünkü her $x \in \mathbb{R}^+$ için

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} = \frac{x + x}{2} = x = g(x).$$

Bu durumda $g = f|_{\mathbb{R}^+}$ yazılır.

Tanım 6.6 $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Bir $y \in B$ için $f(x) = y$ ise $x \in A$ elemanına y nin ***bir ters görüntüsü*** denir. y nin bütün ters görüntülerinin kümesi $f^{-1}(y)$ ile gösterilir, yani

$$f^{-1}(y) = \{ x \in A : f(x) = y \}$$

kümesidir. Bazı y 'ler için $f^{-1}(y)$ kümesi boş küme olabilir. Ayrıca $Y \subseteq B$ ise Y 'deki bütün elemanların ters görüntülerinden oluşan kümeye Y kümesinin ***ters görüntü kümesi*** denir ve $f^{-1}(Y)$ ile gösterilir. O halde

$$f^{-1}(Y) = \{ x \in A : f(x) \in Y \} = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)$$

yazılabilir. $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{ y \})$ olduğu açıktır. Ayrıca $f^{-1}(B) = A$ yazılabilir.

Tanım 6.7 $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon ve $X \subseteq A$ olsun.

$$f(X) = \{ f(x) : x \in X \} = \{ y \in B : \exists x \in X, f(x) = y \}$$

kümesine X kümesinin ***görüntü kümesi*** denir. $G(f) = f(A)$ olduğu açıktır.

Örnek 6.8 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{2}$ ve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 1$ olsun. $f([0, \pi]) = [0, \frac{1}{2}]$ ve $g((-2, \infty)) = [-1, \infty)$ yazılır.

Ayrıca $f^{-1}((1, \infty)) = \emptyset$ ve $g^{-1}([0, 10]) = [-\sqrt{11}, -1] \cup [1, \sqrt{11}]$ dir.

Tanım 6.9 f ve g tanım kümeleri A olan (yani aynı olan) iki fonksiyon ve her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ ise f ile g ye **eşit fonksiyonlar** denir ve $f = g$ yazılır.

Örnek 6.10 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = (-1)^n$ ve $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, g(m) = \cos(m\pi)$ fonksiyonları eşittir. Fakat

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x - 2 \text{ ve } t : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}, t(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$$

fonksiyonları eşit değildir, çünkü tanım kümeleri farklıdır.

Tanım 6.11 $f : A \rightarrow A$, her $x \in A$ için $f(x) = x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona A nın **birim (özdeşlik) fonksiyonu** denir ve I_A ile gösterilir. A kümesinin köşegeni olan $I_A = \{(x, x) : x \in A\}$ kümesi ile I_A fonksiyonunun aynı olduğu görülür.

Tanım 6.12 $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu bir $b \in B$ ve her $x \in A$ için $f(x) = b$ şeklinde ise f fonksiyonu bir **sabit fonksiyon** denir.

Tanım 6.13 $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Eğer A daki farklı iki elemanın görüntüsü her zaman farklı ise; yani

$$\text{her } x_1, x_2 \in A \text{ için } x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

önermesi doğruysa f fonksiyonuna **birebirdir (1-1)** denir. Buna denk olarak, f nin 1-1 olması için gerek ve yeter şart

$$\boxed{\text{her } x_1, x_2 \in A \text{ için } f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2}$$

olmasıdır diyebiliriz.

Örnek 6.14 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 + 5}{3}$ fonksiyonu 1-1 dir, çünkü

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies \frac{x_1^3 + 5}{3} = \frac{x_2^3 + 5}{3} \\ &\implies x_1^3 + 5 = x_2^3 + 5 \\ &\implies x_1^3 = x_2^3 \\ &\implies x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Fakat $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \cos(2x)$ fonksiyonu 1-1 değildir, çünkü $f(0) = f(\pi)$ olup farklı iki reel sayının görüntüsü aynıdır.

Tanım 6.15 $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $y \in B$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ mevcutsa, yani B kümesinde f bağıntısına göre eşlenmemiş eleman yoksa, f fonksiyonuna bir **örten (üzerine)** fonksiyon denir. f örten $\iff f(A) = B$ olduğu görülür.

Örnek 6.16 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 7x^5 - 11$ fonksiyonu örtendir. Bunu göstermek için verilen her $y \in \mathbb{R}$ için $f(x) = y$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$ bulmalıyız. $y \in \mathbb{R}$ verilsin. Bu durumda

$$x = \sqrt[5]{\frac{y+11}{7}}$$

seçilirse $f(x) = y$ olduğu görülür. (Verilen her y için x bulunabileceği açıktır.)

Şimdi $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^{x+1}$ fonksiyonunu inceleyelim. $y \in \mathbb{R}$ verildiğinde $x = \ln y - 1$ seçildiğinde $f(x) = y$ olmaktadır, ancak $y \leq 0$ ise bu durumda x bulunamamaktadır. Bu durumda, mesela $y = -1$ için, $g(x) = -1$ olacak şekilde x olmadığından g örten değildir.

Tanım 6.17 $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{-1} \subseteq B \times A$ bağıntısı da bir fonksiyon ise f^{-1} bağıntısına f fonksiyonunun **ters fonksiyonu** (kısaca tersi) denir ve $f^{-1} : B \rightarrow A$ yazılabilir.

Teorem 6.18 $f : A \rightarrow B$ fonksiyonunun ters bağıntısının da bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart f nin 1-1 ve örten olmasıdır.

İspat: ($\implies$) $f : A \rightarrow B$ fonksiyonunun tersi de bir fonksiyon olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ için $f(x_1) = f(x_2) = y$ olsun.

$$\begin{aligned} (x_1, y), (x_2, y) \in f &\implies (y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1} \\ &\implies f^{-1} \text{ bir fonksiyon olduğundan } x_1 = x_2 \end{aligned}$$

olup f nin 1-1 olduğu gösterilmiş olur. Şimdi $y \in B$ verilsin. $f^{-1} : B \rightarrow A$ bir fonksiyon olduğundan $(y, x) \in f^{-1}$ olacak şekilde sadece bir tane $x \in A$ vardır. Bu durumda $f(x) = y$ olup y nin f altındaki ters görüntüsü x dir. O halde f örtendir.

($\impliedby$) Şimdi de f nin 1-1 ve örten olduğunu kabul edelim. f örten olduğundan f^{-1} bağıntısına göre B kümesinde eşlenmemiş eleman yoktur. Ayrıca

$$\begin{aligned} (y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1} &\implies (x_1, y), (x_2, y) \in f \\ &\implies f \text{ 1-1 olduğundan, } x_1 = x_2 \end{aligned}$$

olup f^{-1} bağıntısına göre bir eleman birden fazla elemanla eşlenmiş olamaz. O halde $f^{-1} \subseteq B \times A$ bir fonksiyondur. $\square$

Not 6.19 Eğer $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu 1-1 ve örten ise (yani f^{-1} de bir fonksiyon ise) her $y \in B$ için $f^{-1}(y)$ kümesi tek elemanlı olduğu için, yani y nin ters görüntüsü tek türlü belirlendiği için, $f^{-1}(y)$ ifadesi “ y nin ters görüntüler kümesi” değil de “ y nin ters görüntüsü” olarak anlaşılır. O halde f fonksiyonu 1-1 ve örtense, $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$ yazılabilir.

Teorem 6.20 $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu 1-1 ve örten ise $f^{-1} : B \rightarrow A$ fonksiyonu da 1-1 ve örtendir.

İspat: f nin 1-1 ve örten olduğunu kabul edelim ve f^{-1} in 1-1 ve örten olduğunu gösterelim. Her $y_1, y_2 \in B$ için

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) &\implies f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2)) \\ &\implies y_1 = y_2 \end{aligned}$$

olup f^{-1} fonksiyonu 1-1 dir. Şimdi de $x \in A$ verilsin. $f(x) = y \in B$ dersek $f^{-1}(y) = x$ olup x in f^{-1} altındaki ters görüntüsünün y olduğu görülür. O halde f^{-1} örtendir. $\square$

Tanım 6.21 $f : A \longrightarrow B$ ve $g : B \longrightarrow C$ iki fonksiyon ise f ile g nin (bağıntı olarak) bileşkesi de A dan C ye bir fonksiyondur. Bu fonksiyona f ile g fonksiyonlarının **bileşkesi** denir ve $g \circ f$ ile gösterilir.

$$g \circ f = \{ (x, z) : \exists y \in B, (x, y) \in f, (y, z) \in g \}$$

olup $y = f(x)$ yazılırsa $z = g(y) = g(f(x))$ olacağından

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

kuralıyla verilir.

Teorem 6.22 $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C, h : C \longrightarrow D$ üç fonksiyon ise $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ dir.

İspat: Her $a \in A$ için

$$[h \circ (g \circ f)](a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))) = (h \circ g)(f(a)) = [(h \circ g) \circ f](a)$$

olup $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ eşitliği elde edilir. $\square$

Teorem 6.23 Birebir fonksiyonların bileşkesi birebir; örten fonksiyonların bileşkesi örtendir.

İspat: $f : A \longrightarrow B$ ve $g : B \longrightarrow C$ birebir fonksiyonlar olsun.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) &\implies g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \\ &\implies g \text{ birebir olduğundan } f(a_1) = f(a_2) \\ &\implies f \text{ birebir olduğundan } a_1 = a_2 \end{aligned}$$

olup $g \circ f$ fonksiyonu 1-1 dir. Şimdi de f ve g nin örten olduğunu kabul edelim. $g \circ f : A \longrightarrow C$ olduğunu hatırlayalım.

$$\begin{aligned} c \in C &\implies g : B \longrightarrow C \text{ örten olduğundan } \exists b \in B, g(b) = c \\ &\implies f : A \longrightarrow B \text{ örten olduğundan } \exists a \in A, f(a) = b \end{aligned}$$

olup $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$ olduğundan c nin ters görüntüsü a dır. O halde $g \circ f$ örtendir. $\square$

Sonuç 6.24 (i) $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ birebir ve örtense $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ dir.

(ii) $f : A \longrightarrow B$ birebir ve örtense $f \circ f^{-1} = I_B$ ve $f^{-1} \circ f = I_A$ dır.

Teorem 6.25 $f : A \longrightarrow B$ ve $g : B \longrightarrow C$ iki fonksiyon olmak üzere

- (a) $g \circ f$ örten ise g örtendir,
- (b) $g \circ f$ birebir ise f birebirdir.

ALİŞTIRMALAR

1.) $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon, $A \subseteq X$ ve $B \subseteq X$ olsun. Aşağıdakilerin doğru olduğunu gösterin:

- i) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
- ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- iii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$
- iv) $A \subseteq B \implies f(A) \subseteq f(B)$

İspat i.) $y \in f(A \cap B) \implies \exists x \in A \cap B$ için $f(x) = y$
 $\implies x \in A$ ve $x \in B$ olup $f(x) \in f(A)$ ve $f(x) \in f(B)$
 $\implies y \in f(A)$ ve $y \in f(B)$
 $\implies y \in f(A) \cap f(B)$.

İspat ii.) $y \in f(A \cup B) \implies \exists x \in A \cup B$ için $f(x) = y$
 $\implies x \in A$ veya $x \in B$ old. $f(x) \in f(A)$ veya $f(x) \in f(B)$
 $\implies y \in f(A)$ veya $y \in f(B)$
 $\implies y \in f(A) \cup f(B)$.

Ayrıca,

$y \in f(A) \cup f(B) \implies y \in f(A)$ veya $y \in f(B)$
 $\implies \exists x_1 \in A$ için $f(x_1) = y$ veya $\exists x_2 \in B$ için $f(x_2) = y$
 $\implies x_1 \in A \cup B$ olup $f(x_1) \in f(A \cup B)$ veya $x_2 \in A \cup B$ olup $f(x_2) \in f(A \cup B)$
 $\implies f(x_1) = f(x_2) = y \in f(A \cup B)$.

İspat iii.) $y \in f(A) \setminus f(B) \implies y \in f(A)$ ve $y \notin f(B)$
 $\implies \exists x_1 \in A$ için $f(x_1) = y$ ve $\forall x \in B$ için $f(x) \neq y$
 $\implies x_1 \notin B$ olmalı
 $\implies x_1 \in A \setminus B$ olup $f(x_1) \in f(A \setminus B)$
 $\implies y \in f(A \setminus B)$

İspat iv.) $A \subseteq B$ olsun.

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\implies \exists x \in A \text{ için } f(x) = y \\ &\implies x \in B \text{ olup } f(x) \in f(B) \\ &\implies y \in f(B) \end{aligned}$$

2.) $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon, $X \subseteq B, Y \subseteq B$ olsun. Aşağıdakilerin doğru olduğunu gösterin.

$$\begin{array}{ll} \text{i) } f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) & \text{ii) } f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\ \text{iii) } f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y & \text{iv) } f^{-1}(B \setminus X) = A \setminus f^{-1}(X) \end{array}$$

İspat i.)

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(X \cup Y) &\iff f(a) \in X \cup Y \\ &\iff f(a) \in X \text{ veya } f(a) \in Y \\ &\iff a \in f^{-1}(X) \text{ veya } a \in f^{-1}(Y) \\ &\iff a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \end{aligned}$$

İspat ii.)

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(X \cap Y) &\iff f(a) \in X \cap Y \\ &\iff f(a) \in X \text{ ve } f(a) \in Y \\ &\iff a \in f^{-1}(X) \text{ ve } a \in f^{-1}(Y) \\ &\iff a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \end{aligned}$$

İspat iii.)

$$\begin{aligned} b \in f(f^{-1}(Y)) &\implies \exists a \in f^{-1}(Y) \text{ için } f(a) = b \\ &\implies a \in f^{-1}(Y) \text{ olduğundan } f(a) \in Y \\ &\implies b \in Y \end{aligned}$$

İspat iv.) Burada $f^{-1}(B) = A$ olduğu hatırlanırsa:

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(B \setminus X) &\iff f(a) \in B \setminus X \\ &\iff f(a) \in B \text{ ve } f(a) \notin X \\ &\iff a \in f^{-1}(B) \text{ ve } a \notin f^{-1}(X) \\ &\iff a \in f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(X) \\ &\iff a \in A \setminus f^{-1}(X) \end{aligned}$$

3.) $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ve $X \subseteq A$ olsun. $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ olduğunu gösterin. Eşitliğin her zaman sağlanması için gerek ve yeter şartın f nin 1-1 olması olduğunu gösterin.

Çözüm: $x \in X \implies f(x) \in f(X) \implies x \in f^{-1}(f(X))$ olduğundan kapsama doğrudur.

Şimdi de her $X \subseteq A$ için $X = f^{-1}(f(X))$ olduğunu kabul edip f nin 1-1 olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} a_1, a_2 \in A \text{ için } f(a_1) = f(a_2) = b &\implies X = \{a_1\} \text{ seçelim} \\ &\implies f(X) = \{b\} \text{ ve } f^{-1}(f(X)) = \{a_1, a_2, \dots\} \text{ olur} \\ &\implies X = f^{-1}(f(X)) \text{ olacağından } a_1 = a_2 \text{ olmalıdır.} \end{aligned}$$

Yani f 1-1 dir. Şimdi de f nin 1-1 olduğunu kabul edelim. Şimdi

$$a \in f^{-1}(f(X)) \implies f(a) \in f(X) \implies a \in X \text{ (çünkü } f \text{ 1-1)}$$

olduğundan eşitlik gösterilmiş olur. (**Dikkat:** Genelde “ $f(a) \in f(X) \implies a \in X$ ” önermesi doğru değildir.)

4.) $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ve $X \subseteq B$ olsun. $f(f^{-1}(X)) \subseteq X$ olduğunu gösterin. Eşitliğin her zaman sağlanması için gerek ve yeter şartın f nin örten olması olduğunu gösterin.

Çözüm: $x \in f(f^{-1}(X)) \implies \exists y \in f^{-1}(X)$ için $f(y) = x \implies y \in f^{-1}(X)$ olduğundan $f(y) \in X$ dir. O halde $x \in X$ olup kapsama doğrudur.

Şimdi de her $X \subseteq B$ için $X = f(f^{-1}(X))$ olduğunu kabul edip f nin örten olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} X = B \text{ seçelim } &\implies f^{-1}(X) = f^{-1}(B) = A \\ &\implies X = f(f^{-1}(X)) \text{ olacağından } B = f(A) \text{ olmalıdır.} \\ &\implies f \text{ örtendir.} \end{aligned}$$

Şimdi de f nin örten olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} x \in X &\implies f \text{ örten olduğundan } \exists y \in f^{-1}(X), f(y) = x \\ &\implies f(y) \in f(f^{-1}(X)) \\ &\implies x \in f(f^{-1}(X)) \end{aligned}$$

olup $X \subseteq f(f^{-1}(X))$ olur. (**Dikkat:** Genelde “ $x \in X \implies \exists y \in f^{-1}(X), f(y) = x$ ” önermesi doğru değildir.) Kapsamanın diğer yönü her zaman doğru olduğundan ispat tamamlanır.

5.) $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ iki fonksiyon ve $g \circ f$ birebir olsun. Bu durumda f birebir olmak zorunda mıdır? g birebir olmak zorunda mıdır? İspatlayınız.

Çözüm: f 1-1 olmalıdır, ispatlayalım: $\forall a_1, a_2 \in A$ için

$$\begin{aligned} f(a_1) = f(a_2) &\implies g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \\ &\implies (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \\ &\implies g \circ f \text{ 1-1 olduğundan } a_1 = a_2 \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır. g nin 1-1 olması gerekmez, mesela $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ ve

$$f = \{(a, c), (b, d)\}, \quad g = \{(c, 1), (d, 2), (e, 2)\}, \quad g \circ f = \{(a, 1), (b, 2)\}$$

örneğinde $g \circ f$ 1-1 dir fakat g 1-1 değildir.

6.) Aşağıda $\mathbb{N}$ den $\mathbb{Z}$ ye tanımlı f fonksiyonunun 1-1 ve örten olduğunu gösterin.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ çift ise;} \\ -\frac{n+1}{2}, & n \text{ tek ise.} \end{cases}$$

Çözüm: Eşlemenin aşağıdaki gibi yapıldığı görülür:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & -5 & \dots \end{array}$$

Önce f 'nin 1-1 olduğunu gösterelim. $n, m \in \mathbb{N}$ için $f(n) = f(m)$ olsun.

Durum 1. n, m çift: Bu durumda $n/2 = m/2$ den $n = m$ bulunur.

Durum 2. n, m tek: Bu durumda $-(n+1)/2 = -(m+1)/2$ den $n = m$ bulunur.

Durum 3. n tek, m çift: Bu durumda $m/2 = -(n+1)/2$ den $m + n = -1$ elde edilir ki, $m, n \in \mathbb{N}$ olduğundan böyle bir durum olamaz.

Durum 4. m tek, n çift: Bu durumda $n/2 = -(m+1)/2$ den $m + n = -1$ elde edilir ki, $m, n \in \mathbb{N}$ olduğundan böyle bir durum olamaz.

Sonuç olarak, f 1-1 dir. Şimdi de f nin örten olduğunu gösterelim. $y \in \mathbb{Z}$ verilsin.

Durum 1. $y \geq 0$: Bu durumda $x = 2y$ seçilirse, x çift bir doğal sayı olup

$$f(x) = f(2y) = \frac{2y}{2} = y \quad \text{olup } f \text{ örtendir.}$$

Durum 2. $y < 0$: Bu durumda $x = -2y - 1$ seçilirse, x tek bir doğal sayı olup

$$f(x) = f(-2y - 1) = -\frac{(-2y - 1) + 1}{2} = y \quad \text{olup } f \text{ örtendir.}$$

7.) $f : A \rightarrow B$ birebir ve $g : B \rightarrow C$ örten ise $g \circ f$ birebir olmak zorunda mıdır? Örten olmak zorunda mıdır? Açıklayın.

Çözüm: $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{1, 2\}$ ve

$$f = \{(a, c), (b, d)\}, \quad g = \{(c, 2), (d, 2), (e, 1)\}, \quad g \circ f = \{(a, 2), (b, 2)\}$$

örneği incelendiğinde iki cevabın da “hayır” olduğu görülür.

8.) 4 elemanlı bir kümeden 4 elemanlı bir kümeye kaç tane örten fonksiyon yazılabilir?

- ☐ 256 ☐ 16 ☒ 24 ☐ 64 ☐ Hiçbiri

9.) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x - |x|}{2}$ olsun. Buna göre aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi f nin $\mathbb{R}^-$ ye bir kısıtlanmışdır?

- ☒ $g(x) = x$ ☐ $g(x) = 2x$ ☐ $g(x) = 0$ ☐ $g(x) = x/2$ ☐ Hiçbiri

10.) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ise $f^{-1}([4, 9])$ aşağıdakilerden hangisidir?

- ☐ $[-2, 4]$ ☐ $[2, 3]$ ☐ $[-3, 3]$ ☐ $[-3, 2] \cup \{3\}$ ☒ Hiçbiri

11.) Tanım kümesinden $\mathbb{R}$ ye aşağıda verilen fonksiyonlardan hangisinin tersi de bir fonksiyondur?

- ☐ $f(x) = x^3 - 7x$ ☒ $f(x) = x^3/4$ ☐ $f(x) = \tan x$ ☐ $f(x) = e^{\sin x}$ ☐ Hiçbiri

12.) Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin tersi de $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyondur?

- ☐ $h(x) = 3^x$ ☒ $g(x) = 2x^3 - 3$ ☐ $t(x) = x^3 - 9x$ ☐ $f(x) = \tan x$ ☐ Hiçbiri

13.) 4 elemanlı bir A kümesinden 5 elemanlı bir B kümesine kaç tane 1-1 fonksiyon yazılabilir?

- ☐ 20 ☒ 120 ☐ 720 ☐ 3125 ☐ Hiçbiri

14.) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 1$ ise $f^{-1}([-1, 9]) = ?$

- ☐ $[0, 4]$ ☐ $[-1, 4]$ ☐ $(-\infty, 4]$ ☐ $[1, 4]$ ☒ Hiçbiri

15.) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1, g(x) = \frac{x+1}{4}$ olduğuna göre $(f \circ g^{-1})(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

- ☒ $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ ☐ $\left\{0, \frac{3}{2}\right\}$ ☐ $\{0, 2\}$ ☐ $\{0\}$ ☐ Hiçbiri

16.) Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin tersi de $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyondur?

- ☐ $h(x) = \cos(1/x)$ ☐ $t(x) = x^5 - x$ ☐ $f(x) = e^x$ ☒ $g(x) = x^3 - \frac{1}{2}$ ☐ Hiçbiri

17.) 5 elemanlı bir A kümesinden 6 elemanlı bir B kümesine kaç tane 1-1 fonksiyon yazılabilir?

- ☐ $6^5 = 7776$ ☒ 720 ☐ 120 ☐ 3125 ☐ Hiçbiri

18.) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 1$ ise $f^{-1}([-1, 4]) = ?$

- ☐ $[0, 1]$ ☐ $[-1, 1]$ ☐ $(-\infty, 0]$ ☐ $[1, \sqrt{3}]$ ☒ Hiçbiri

19.) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1, g(x) = \frac{x+1}{3}$ olduğuna göre $(f \circ g^{-1})(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

- ☐ $\{0, 1\}$ ☐ $\{0, -1\}$ ☒ $\left\{0, \frac{2}{3}\right\}$ ☐ $\emptyset$ ☐ Hiçbiri

20.) $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. $p : “\forall X, Y \subseteq B, f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)”$ ve $q : “\exists X \subseteq B, f^{-1}(B \setminus X) \neq A \setminus f^{-1}(X)”$ önermeleri veriliyor. Aş. hangisi doğrudur?

- ☒ p :Doğru, q :Yanlış ☐ p, q :Doğru ☐ p, q :Yanlış ☐ p :Yanlış, q :Doğru ☐ Hiçbiri

21.) Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi tanım kümesinden $\mathbb{R}$ ye 1-1 dir fakat örten değildir?

- ☐ $f(x) = \sqrt{x}$ ☐ $f(x) = e^x$ ☐ $f(x) = \sqrt{\ln x}$ ☐ $f(x) = \frac{1}{x}$ ☒ Hepsi
- 22.)** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2$ ise $f([-4, 1]) = ?$
☐ $[1, 16]$ ☒ $[-16, 0]$ ☐ $[-4, -1]$ ☐ $[-1, 0]$ ☐ Hiçbiri
- 23.)** $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ olsun. Aşağıdaki reel fonksiyonlardan hangisi f nin bir genişletilmiştir?
☐ $g(x) = |x|$ ☐ $h(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$ ☒ $t(x) = \llbracket x \rrbracket$ ☐ $r(x) = x \cdot \tan x \cdot \cot x$ ☐ Hepsi
- 24.)** $f : A \rightarrow B$ olsun. Her $X, Y \subseteq A$ için $p : “ f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) ”$ ve $q : “ f(X) \setminus f(Y) \subseteq f(X \setminus Y) ”$ önermeleri veriliyor. Buna göre:
☐ $p : \text{Doğru}, q : \text{Yanlış}$ ☐ $p, q : \text{Doğru}$ ☐ $p, q : \text{Yanlış}$ ☒ $p : \text{Yanlış}, q : \text{Doğru}$ ☐ Hiçbiri
- 25.)** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3$ ise $f^{-1}([-4, 1]) = ?$
☐ $[-3, 1]$ ☒ $[-2, 2]$ ☐ $[-2, 13]$ ☐ $[3, +\infty)$ ☐ Hiçbiri

Bölüm 7

İşlem ve Özellikleri

Tanım 7.1 A boş olmayan bir küme ve $f : A \rightarrow A$ bir fonksiyon ise f ye A da bir **birli işlem** denir. Eğer $f : A \times A \rightarrow A$ bir fonksiyon ise f ye A da bir **ikili işlem** denir. Benzer şekilde $f : \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{-tane}} \rightarrow A$ bir fonksiyon ise f 'ye A 'da bir **n -li işlem** denir.

Örnek 7.2 $A = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olsun. $f : A \rightarrow A$ fonksiyonu her $x \in A$ için $f(x) = \sqrt{x}$ kuralıyla verilsin. f , A 'da bir birli işlemdir. $g : A \times A \rightarrow A$ fonksiyonu her $(x, y) \in A \times A$ için $g(x, y) = x + y$ şeklinde verilen fonksiyon bir ikili işlemdir. Fakat $x \div y$ veya $x - y$ şeklindeki bir kural $A \times A$ kümesinden A 'ya bir fonksiyon tanımlamadığı için A 'da bir ikili işlem değildir.

Not 7.3 $A \times A$ 'dan A 'ya bir fonksiyon aslında A nın iki elemanının yine A nın bir elemanına eşleyen bir kuraldır. Bu nedenle A 'da bir ikili işlemin tanımı “ A nın iki elemanının yine A nın bir elemanına eşleyen bir kural” olarak verilebilir.

Örnek 7.4 $A = \{1, 2, 3\}$ olsun. $f : A \times A \rightarrow A$ fonksiyonu şöyle verilsin:

$$\begin{aligned} (1, 1) &\rightarrow 3, & (2, 1) &\rightarrow 1, & (3, 1) &\rightarrow 3 \\ f : (1, 2) &\rightarrow 2, & (2, 2) &\rightarrow 1, & (3, 2) &\rightarrow 1 \\ (1, 3) &\rightarrow 2, & (2, 3) &\rightarrow 2, & (3, 3) &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

Bu durumda f , A da bir ikili işlemdir.

Not 7.5 Bu bölümde sadece ikili işlemlerin özelliklerini inceleyeceğiz. Bu nedenle “ikili işlem” yerine kısaca “işlem” diyeceğiz. İkili işlemleri f, g harfi yerine genelde $*, \otimes, \star, \oplus, \odot, \circ, \square$ gibi sembollerle göstereceğiz. Ayrıca ikili işlemleri elemanların ortasına yazacağız, yani mesela bir önceki örnekte $f(3, 2) = 1$ yerine kısaca $3f2 = 1$ yazacağız. Eğer f harfi yerine $*$ sembolü kullanırsak bu ifadeyi $3*2 = 1$ şeklinde yazabiliriz. Şimdiye kadar kullandığımız toplama, çarpma, bölme, kesişim, birleşim ve simetrik fark gibi işlemlerin elemanların arasına yazıldığına dikkat ediniz.

Örnek 7.6 Bir A kümesinin kuvvet kümesi $P(A)$ üzerinde tanımlanan kesişim ($\cap$) ve birleşim ($\cup$) işlemleri birer ikili işlemdir.

$$\cap : P(A) \times P(A) \longrightarrow P(A)$$

$$\cup : P(A) \times P(A) \longrightarrow P(A)$$

İşlemin Özellikleri

f, A 'da bir ikili işlem olsun. f 'yi $*$ sembolü ile gösterelim.

Tanım 7.7 (Kapalılık Özelliği) Her $a, b \in A$ için $a * b \in A$ oluyorsa $*$ işlemine **kapalıdır** denir. İşlemin tanımından anlaşılacağı gibi aslında bir işlem kapalı olmalıdır.

Tanım 7.8 (Birleşme Özelliği) Her $a, b, c \in A$ için

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

önermesi doğruysa $*$ işleminin **birleşme özelliği** vardır veya kısaca $*$ işlemi **birleşmelidir** denir.

Tanım 7.9 (Değişme Özelliği) Her $a, b \in A$ için

$$a * b = b * a$$

önermesi doğruysa $*$ işleminin **değişme özelliği** vardır veya kısaca $*$ işlemi **değişmelidir** denir.

Tanım 7.10 (Birim (Etkisiz) Eleman Özelliği) Her $a \in A$ için

$$a * e = a \quad \text{ve} \quad e * a = a$$

şartını sağlayan bir $e \in A$ varsa bu elemana $*$ işleminin **birim (etkisiz) elemanı** denir.

Tanım 7.11 (Ters Eleman Özelliği) $*$ işlemi birim elemanı e olan bir işlem olsun. Eğer, bir $a \in A$ için

$$a * b = e \quad \text{ve} \quad b * a = e$$

şartını sağlayan bir $b \in A$ varsa bu b elemanına a elemanının $*$ işlemine göre **tersi** (kısaca tersi) denir ve genelde a^{-1} ile gösterilir.

Not 7.12 Ters eleman özelliğinden bahsetmek için birim elemanın olması gerekir. Ayrıca her elemanın tersi olmayabileceği gibi bazı elemanların birden fazla tersi olabilir. Bir a elemanının tersi için a^{-1} gösterimi standart değildir. Mesela bir sayının toplama işlemine göre tersi için $-a$ kullanılmaktadır. Bazen a 'nın tersi için a^{-1} kullanılması $1/a$ ile karışmaktadır. Bu durumda a nın tersi için $\tilde{a}$ veya a' sembolü kullanılabilir.

Tanım 7.13 (Dağılma Özelliği) $*$ ve $\triangle$ işlemleri A 'da tanımlanmış iki ikili işlem olsun. Eğer her $a, b, c \in A$ için

$$a * (b \triangle c) = (a * b) \triangle (a * c)$$

önermesi doğru ise $*$ işleminin $\triangle$ işlemi üzerine **soldan dağılma özelliği vardır** denir. Eğer her $a, b, c \in A$ için

$$(a \triangle b) * c = (a * c) \triangle (b * c)$$

önermesi doğru ise $*$ işleminin $\triangle$ işlemi üzerine **sağdan dağılma özelliği vardır** denir. $*$ işleminin $\triangle$ işlemi üzerine hem sağdan hem de soldan dağılma özelliği varsa kısaca **dağılma özelliği vardır** diyeceğiz.

Örnek 7.14 Reel sayılarda tanımlanan çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır, çünkü her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \text{ve} \quad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

önermesi doğrudur. Ancak toplama işleminin çarpma üzerine dağılma özelliği yoktur. Ayrıca kümeler üzerinde tanımlanan $\cap$ ve $\cup$ işlemlerinin birbiri üzerine dağılma özellikleri vardır, çünkü her A, B, C kümesi için

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{ve} \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

önermeleri ile birlikte

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{ve} \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

önermeleri de doğrudur.

Teorem 7.15 Bir $*$ işleminde birim eleman (varsa) tektir.

İspat: $*$ işleminin e ve f gibi iki tane birim elemanı olsun. e bir birim eleman olduğundan $e * f = f$ dir. Ayrıca f bir birim eleman olduğundan $e * f = e$ olmalıdır. O halde $e = f$ dir. $\square$

Teorem 7.16 Birleşme özelliği olan bir $*$ işleminde bir elemanın tersi (varsa) tektir.

İspat: $*$ işleminin birim elemanı e olsun. a elemanının b ve c gibi iki tane tersi olsun. O halde

$$a * b = b * a = a * c = c * a = e$$

yazabiliriz. Şimdi;

$$b = b * e = b * (a * c) = (b * a) * c = e * c = c$$

olup $b = c$ olduğu gösterilmiş olur. $\square$

Örnek 7.17 $*$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ her $x, y \in \mathbb{N}$ için $x * y = x + 2y$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyelim.

i) Her $a, b \in \mathbb{N}$ için $a * b = a + 2b \in \mathbb{N}$ olduğundan işlem kapalılık özelliğine sahiptir.

ii) Her $a, b, c \in \mathbb{N}$ için

$$(a * b) * c = (a + 2b) * c = a + 2b + 2c \quad \text{ve} \quad a * (b * c) = a * (b + 2c) = a + 2b + 4c$$

ifadeleri genelde eşit olmadığından (mesela $c \neq 0$ iken) birleşme özelliği yoktur.

iii) $2 * 7 = 16$ ve $7 * 2 = 11$ olup $16 \neq 11$ olduğundan değişme özelliği yoktur.

iv) Her $a \in \mathbb{N}$ için

$$a * e = a \implies a + 2e = a \implies 2e = 0 \implies e = 0 \text{ olabilir.}$$

Ancak $0 * a = 2a$ olup birim eleman 0 olamaz. O halde birim eleman yoktur. (Ya da, her $a \in \mathbb{N}$ için $e * a = a$ denkleminin sağlayan bir $e \in \mathbb{N}$ bulunamaz, çünkü $e = -a$ bulunur ve birim eleman a 'ya bağlı olamaz.)

v) Birim eleman olmadığından ters elemandan söz edilemez.

Örnek 7.18 Bir A kümesinin kuvvet kümesi $P(A)$ üzerinde tanımlanan $\cap$ işleminin özelliklerini inceleyelim. $\cap : P(A) \times P(A) \longrightarrow P(A)$ işleminin özellikleri:

i) Her $X, Y \in P(A)$ için $X \cap Y \in P(A)$ dır, çünkü $X \subseteq A, Y \subseteq A \implies X \cap Y \subseteq A$ dır. O halde işlem kapalıdır.

ii) Her $X, Y, Z \in P(A)$ için $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$ olup işlem birleşme özelliğine sahiptir.

iii) Her $X, Y \in P(A)$ için $X \cap Y = Y \cap X$ olduğundan işlem değişme özelliğine sahiptir.

iv) Her $X \in P(A)$ için $X \cap A = X$ olduğundan ve işlem değişme özelliğine sahip olduğundan birim eleman $e = A$ dır.

v) A 'nın tersi A dır, çünkü $A \cap A = A = e$ dir. Eğer $X \neq A$ ise

$$X \cap Y = Y \cap X = A$$

olacak şekilde bir $Y \in P(A)$ bulunamayacağından X 'in tersi yoktur. Yani sadece A 'nın tersi vardır.

Not 7.19 Bir $*$ işleminin değişme özelliği varsa, birim eleman bulunurken $a * e = a$ ve $e * a = a$ denklemlerinden sadece birisini kullanmak yeterlidir. Benzer şekilde ters eleman bulunurken de $a * b = e$ ve $b * a = e$ denklemlerinden sadece birisini çözmek yeterlidir.

Örnek 7.20 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinde $a * b = a + b - 1$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyelim.

i) Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a * b = a + b - 1 \in \mathbb{Z}$ olduğundan işlem kapalıdır.

ii) Her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için

$$a * (b * c) = a * (b + c - 1) = a + b + c - 2 = (a + b - 1) * c = (a * b) * c$$

olduğundan işlem birleşme özelliğine sahiptir.

iii) Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a * b = a + b - 1 = b + a - 1 = b * a$ olduğundan işlem değişmelidir.

iv) Her $a \in \mathbb{Z}$ için

$$a * e = a \implies a + e - 1 = a \implies e = 1$$

elde edilir, çünkü işlem değişmelidir.

v) $a * b = 1 \implies a + b - 1 = 1 \implies b = 2 - a$ olur. İşlem değişmeli olduğundan $b * a = 1$ denklemini çözmeye gerek yoktur. Her $a \in \mathbb{Z}$ için $a^{-1} = 2 - a \in \mathbb{Z}$ olup her tamsayının tersi mevcuttur.

Tanım 7.21 A ve B boş olmayan iki küme olsun. $\odot : B \times A \longrightarrow A$ şeklindeki bir fonksiyona A da bir *dış işlem* denir.

ALİŞTIRMALAR

1.) Bir A kümesinde tanımlanan $\triangle$ işleminin değişme ve birleşme özelliği varsa, $a, b, c, d \in A$ için aşağıdaki eşitliği gösterin:

$$(a \triangle b) \triangle (c \triangle d) = [(d \triangle c) \triangle a] \triangle b$$

$$\begin{aligned} \text{Çözüm:} \quad \underbrace{[(d \triangle c) \triangle a]}_x \triangle b &= \underbrace{(d \triangle c) \triangle (a \triangle b)}_x && \text{(Birleşme özelliği olduğundan)} \\ &= (a \triangle b) \triangle (d \triangle c) && \text{(Değişme özelliği olduğundan)} \\ &= (a \triangle b) \triangle (c \triangle d) && \text{(Değişme özelliği olduğundan)} \end{aligned}$$

2.) $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_3(x) = \frac{x-1}{x}, \quad f_4(x) = \frac{1}{x}, \quad f_5(x) = \frac{x}{x-1}, \quad f_6(x) = 1-x.$$

Buna göre $\{f_1, f_2\}, \{f_1, f_3\}, \{f_1, f_4\}, \{f_1, f_5\}, \{f_1, f_2, f_3\}$ kümelerinden hangileri fonksiyonlardaki bileşke işlemine göre kapalıdır?

Çözüm: Bu 6 fonksiyonun işlem tablosu aşağıdaki gibi oluşur:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_5	f_6	f_4
f_3	f_3	f_1	f_2	f_6	f_4	f_5
f_4	f_4	f_6	f_5	f_1	f_3	f_2
f_5	f_5	f_4	f_6	f_2	f_1	f_3
f_6	f_6	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1

Tablodan anlaşılacağı gibi kapalı olan kümeler: $\{f_1, f_4\}, \{f_1, f_5\}, \{f_1, f_2, f_3\}$.

3.) $\mathbb{Z}$ 'de $a \triangle b = |a| + |b|$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

Çözüm: (i) Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $|a| + |b| \in \mathbb{Z}$ olup işlem kapalıdır.

(ii) Her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için

$$(a \triangle b) \triangle c = (|a| + |b|) \triangle c = \left| |a| + |b| \right| + |c| = |a| + |b| + |c|,$$

$$a \triangle (b \triangle c) = a \triangle (|b| + |c|) = |a| + \left| |b| + |c| \right| = |a| + |b| + |c|$$

olup eşitlik doğrulanır. Yani birleşme özelliği vardır.

(iii) Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a \triangle b = |a| + |b| = |b| + |a| = b \triangle a$ olup değişme özelliği vardır.

(iv) -2 tamsayısı için

$$(-2) \triangle e = 2 + |e| = -2$$

eşitliği çözülemez, çünkü $2 + |e| \geq 0$ dır. O halde birim eleman yoktur.

(v) Birim eleman olmadığından ters eleman yoktur.

4.) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesinde $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

Çözüm: (i) Her $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ için $ac \in \mathbb{Q}$ ve $ad + b \in \mathbb{Q}$ olup $(ac, ad + b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dir. Yani işlem kapalıdır.

(ii) Birleşme özelliği vardır, çünkü:

$$[(a, b) * (c, d)] * (e, f) = (ac, ad + b) * (e, f) = (ace, acf + ad + b),$$

$$(a, b) * [(c, d) * (e, f)] = (a, b) * (ce, cf + d) = (ace, acf + ad + b)$$

eşitliklerin sağ tarafı eşittir.

(iii) Değişme özelliği yoktur, çünkü, örneğin

$$(2, 3) * (4, 5) = (8, 13) \quad \text{fakat} \quad (4, 5) * (2, 3) = (8, 17).$$

(iv) Birim elemanı (x, y) ile gösterirsek her $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ için

$$(a, b) * (x, y) = (a, b) \implies (ax, ay + b) = (a, b) \implies ax = a, ay + b = b \implies x = 1, y = 0.$$

Ayrıca

$$(1, 0) * (a, b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b + 0) = (a, b)$$

olur. O halde birim eleman $(1, 0)$ dır.

(v) (a, b) nin tersini (x, y) ile gösterirsek:

$$(a, b) * (x, y) = (1, 0) \implies ax = 1, ay + b = 0 \implies x = \frac{1}{a}, y = \frac{-b}{a} \quad (a \neq 0).$$

Ayrıca

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right) * (a, b) = \left(\frac{1}{a} \cdot a, \frac{b}{a} - \frac{b}{a}\right) = (1, 0).$$

Şimdi, her elemanın tersi olmayıp, $a \neq 0$ ise:

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right).$$

5.) $\mathbb{Z}$ 'de $x \odot y = xy + 2(x + y) + 2$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

Çözüm: (i) Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $xy + 2(x + y) + 2 \in \mathbb{Z}$ olduğundan işlem kapalıdır.

(ii) Birleşme özelliği vardır, çünkü:

$$\begin{aligned} (x \odot y) \odot z &= (xy + 2x + 2y + 2) \odot z = xyz + 2xz + 2yz + 2z + 2xy + 4x + 4y + 4 + 2z + 2 \\ &= xyz + 2(xy + xz + yz) + 4(x + y + z) + 6, \\ x \odot (y \odot z) &= x \odot (yz + 2y + 2z + 2) = xyz + 2xy + 2xz + 2x + 2x + 2yz + 4y + 4z + 4 + 2 \\ &= xyz + 2(xy + xz + yz) + 4(x + y + z) + 6 \end{aligned}$$

eşitliklerin sağ tarafı eşittir.

(iii) Değişme özelliği vardır, çünkü:

$$x \odot y = xy + 2(x + y) + 2 = yx + 2(y + x) + 2 = y \odot x.$$

(iv) Her $x \in \mathbb{Z}$ için

$$x \odot e = xe + 2x + 2e + 2 = x \implies e(x + 2) + (x + 2) = 0 \implies (x + 2)(e + 1) = 0$$

denkleminin çözümü $e = -1$ dir. Değişme özelliği olduğundan birim eleman $e = -1$ dir.

(v) x in tersini y ile gösterirsek:

$$x \odot y = -1 \implies xy + 2x + 2y + 2 = -1 \implies y(x + 2) = -3 - 2x \implies y = \frac{-3 - 2x}{x + 2}$$

elde edilir. Değişme özelliği olduğunda $y \odot x = -1$ denklemi de aynı sonucu verir. Her tamsayının tersi yoktur, çünkü $y \in \mathbb{Z}$ olmalıdır. Şimdi:

$$y = \frac{-3 - 2x}{x + 2} = -2 + \frac{1}{x + 2}$$

olup $y \in \mathbb{Z}$ olması için gerek ve yeter şart $x + 2 = \mp 1$ olmasıdır. O halde sadece $x = -1$ ve $x = -3$ 'ün tersi vardır ve $(-1)^{-1} = -1$ ve $(-3)^{-1} = -3$ dür.

6.) $\mathbb{R}$ 'de $a \odot b = \sqrt{a^2 b^2}$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

Çözüm: (i) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a^2 b^2 \geq 0$ olduğundan $\sqrt{a^2 b^2} \in \mathbb{R}$ dir. O halde işlem kapalıdır.

(ii) Aşağıdaki eşitliklerin sağ tarafları eşit olduğundan birleşme özelliği vardır:

$$\begin{aligned} (a \odot b) \odot c &= \sqrt{a^2 b^2} \odot c = \sqrt{(a^2 b^2) c^2} = \sqrt{a^2 b^2 c^2} \\ a \odot (b \odot c) &= a \odot \sqrt{b^2 c^2} = \sqrt{a^2 (b^2 c^2)} = \sqrt{a^2 b^2 c^2} \end{aligned}$$

(iii) Değişme özelliği vardır, çünkü:

$$a \odot b = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{b^2 a^2} = b \odot a.$$

(iv) Birim elemanı e ile gösterelim. O halde -3 reel sayısı için

$$(-3) \odot e = -3 \implies \sqrt{9e^2} = -3 \implies 3|e| = -3$$

denklemi çözülemez, çünkü $3|e| \geq 0$ dır. O halde birim eleman yoktur.

(v) Birim eleman olmadığından ters eleman yoktur.

7.) $\mathbb{Z}$ 'de $a \star b = b$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

Çözüm: (i) $a, b \in \mathbb{Z}$ ise $a \star b = b \in \mathbb{Z}$ olduğu açıktır. Yani işlem kapalıdır.

(ii) Birleşme özelliği vardır, çünkü

$$(a \star b) \star c = b \star c = c = a \star c = a \star (b \star c).$$

(iii) Değişme özelliği yoktur, çünkü

$$2 \star 7 = 7 \quad \text{fakat} \quad 7 \star 2 = 2.$$

(iv) Birim elemanın olduğunu kabul edelim ve e ile gösterelim. $a = e + 1$ dersek $a \in \mathbb{Z}$ ve $a \neq e$ olduğu açıktır. Şimdi e birim eleman olduğundan $a \star e = a$ olmalıdır. Fakat $a \star e = e$ dir. Bu bir çelişkidir, o halde birim eleman yoktur.

(v) Birim eleman olmadığından ters eleman yoktur.

8.) $\mathbb{Z}$ 'de

$$a * b = \begin{cases} a + b - 2, & a + b \text{ çift ise} \\ \frac{ab}{2}, & a + b \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

Çözüm: (i) $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. $a + b$ çift ise $a + b - 2 \in \mathbb{Z}$ olduğu açıktır. $a + b$ tek ise, bu sayılardan birisi tek, diğeri çifttir. Yani çarpımları ab çifttir. O halde $(ab)/2$ bir tamsayıdır. Sonuç olarak, işlem kapalıdır.

(ii) Birleşme özelliği yoktur, çünkü

$$(4 * 6) * 1 = 8 * 1 = 4 \quad \text{fakat} \quad 4 * (6 * 1) = 4 * 3 = 6$$

(iii) $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. $a + b$ çift ise, $b + a$ da çift olup:

$$a * b = a + b - 2 = b + a - 2 = b * a.$$

Benzer şekilde, $a + b$ tek ise, $b + a$ da tek olacağından

$$a * b = \frac{ab}{2} = \frac{ba}{2} = b * a$$

Yani, değişme özelliği vardır.

(iv) Birim eleman 2 dir, çünkü $a \in \mathbb{Z}$ verildiğinde

$$a \text{ tek} \implies a * 2 = \frac{2a}{2} = a$$

$$a \text{ çift} \implies a * 2 = a + 2 - 2 = a.$$

Ayrıca değişme özelliği olduğundan $2 * a = a$ dır.

(v) $a \in \mathbb{Z}$ verilsin. a nın tersine b diyelim. Burada 4 durum vardır: (Değişme özelliği olduğundan sadece $a * b = 2$ denklemini çözelim.)

$$\textbf{Durum 1: } a \text{ tek, } b \text{ tek} \implies a * b = 2 \implies a + b - 2 = 2 \implies b = 4 - a$$

$$\textbf{Durum 2: } a \text{ çift, } b \text{ çift} \implies a * b = 2 \implies a + b - 2 = 2 \implies b = 4 - a$$

$$\textbf{Durum 3: } a \text{ tek, } b \text{ çift} \implies a * b = 2 \implies (ab)/2 = 2 \implies b = 4/a \implies a = \mp 1$$

$$\textbf{Durum 4: } a \text{ çift, } b \text{ tek} \implies a * b = 2 \implies (ab)/2 = 2 \implies b = 4/a \implies a = \mp 4$$

Yani a nın tersi $a^{-1} = 4 - a$ formülüyle bulunur. Ancak burada 1, -1, 4, -4 sayılarının tersleri ayrıca $4/a$ formülüyle de hesaplanır. Yani bu dört sayının ikiyeşer tane tersi vardır.

9.) $\mathbb{Q}$ 'da $a * b = ab + 1$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

Çözüm: (i) Her $a, b \in \mathbb{Q}$ için $ab + 1 \in \mathbb{Q}$ olup işlem kapalıdır.

(ii) Birleşme özelliği yoktur, çünkü:

$$(a * b) * c = (ab + 1) * c = abc + c + 1, \quad \text{ve} \quad a * (b * c) = a * (bc + 1) = abc + a + 1$$

ifadeleri genelde eşit değildir. ($a \neq c$ için eşit değildir.)

(iii) Değişme özelliği vardır, çünkü:

$$a * b = ab + 1 = ba + 1 = b * a.$$

(iv) $a * e = a$ dan $ae + 1 = a$ ve buradan $e = (a - 1)/a$ elde edilir. Birim eleman a 'ya bağlı olamayacağından, birim eleman yoktur.

(v) Birim eleman olmadığından ters eleman yoktur.

10.) $\mathbb{Z}$ 'de $a * b = a + b - ab$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

Çözüm: (i) Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a + b - ab \in \mathbb{Z}$ olup işlem kapalıdır.

(ii) Birleşme özelliği vardır, çünkü aşağıdaki eşitliklerin sağ tarafları eşittir:

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a + b - ab) * c = a + b - ab + c - ac - bc + abc = a + b + c - ab - ac - bc + abc, \\ a * (b * c) &= a * (b + c - bc) = a + b + c - bc - ab - ac + abc = a + b + c - ab - ac - bc + abc \end{aligned}$$

(iii) Değişme özelliği vardır, çünkü:

$$a * b = a + b - ab = b + a - ba = b * a.$$

(iv) Birim elemana e dersek:

$$a * e = a \implies a + e - ae = a \implies e(1 - a) = 0 \implies e = 0$$

bulunur. Ayrıca değişme özelliği olduğundan birim eleman $e = 0$ dır.

(v) a nın tersini b ile gösterisek ve değişme özelliğini de kullanırsak:

$$a * b = e \implies a + b - ab = 0 \implies b = \frac{a}{a - 1} = 1 + \frac{1}{a - 1}$$

bulunur. Ancak $b \in \mathbb{Z}$ olmalıdır. O halde $a = 0$ veya $a = 2$ olabilir. O zaman sadece 0 ve 2 nin tersi vardır ve $0^{-1} = 0$ ve $2^{-1} = 2$ bulunur.

11.) $\mathbb{R}$ 'de aşağıdaki şekilde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

$$a * b = \begin{cases} a + b, & a \geq b \text{ ise} \\ ab, & a < b \text{ ise} \end{cases}$$

Çözüm: (i) $a, b \in \mathbb{R}$ verilsin. $a \geq b$ olsa da $a < b$ olsa da $a + b \in \mathbb{R}$ ve $ab \in \mathbb{R}$ olup işlem kapalıdır.

(ii) Birleşme özelliği yoktur, çünkü:

$$(2 * 3) * 5 = 6 * 5 = 11 \quad \text{fakat} \quad 2 * (3 * 5) = 2 * 15 = 30$$

(iii) Değişme özelliği yoktur, çünkü:

$$2 * 3 = 6 \quad \text{fakat} \quad 3 * 2 = 5$$

(iv) Birim elemana e diyelim. O zaman $a = e + 1$ dersek $e < a$ olduğu açıktır. Şimdi:

$$e * a = ea = a$$

olmalıdır. Buradan $e = 1$ bulunur. O halde $3 * 1 = 3$ olmalıdır. Fakat $3 * 1 = 4$ dür. Bu bir çelişkidir, yani birim eleman yoktur.

(v) Birim eleman olmadığından ters eleman yoktur.

12.) İki elemanlı bir A kümesinde kaç tane farklı işlem tanımlanabilir?

- ☐ 256 ☐ 4 ☒ 16 ☐ 8 ☐ Hiçbiri

13.) $\mathbb{R}^+$ kümesinde tanımlanan $a * b = a^b$ şeklindeki işlem için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- ☐ Kapalı değil ☐ Birleşme öz. var ☐ Değişme öz. var ☐ Birim eleman var ☒ Hiçbiri

14.) Rasyonel sayılar kümesinde her $a, b \in \mathbb{Q}$ için aşağıda tanımlanan kurallardan hangisi bir işlem tanımlar?

- ☐ $(a + 1)^b$ ☒ $\frac{1}{a^2 + b^4 + 1}$ ☐ $\sqrt{a^2 + b^2}$ ☐ $\frac{a^2 - b^2}{a}$ ☐ Hiçbiri

15.) $\mathbb{Z}$ 'de $a * b = a + b + 9ab$ işlemi tanımlanıyor. Buna göre tersi olan elemanların kümesi nedir?

- ☒ $\{0\}$ ☐ $\{0, -1\}$ ☐ $\emptyset$ ☐ $\left\{-\frac{1}{9}\right\}$ ☐ Hiçbiri

16.) Reel sayılar kümesinde tanımlanan $a * b = a + b - ab$ şeklinde işlem için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- ☒ Her elemanın tersi var ☐ Birleşme öz. var ☐ Değişme öz. var ☐ Birim eleman var ☐ Hiçbiri

17.) $\mathbb{R}$ 'de aşağıda kuralı verilen işlemlerin hangisinin birim elemanı vardır?

- ☐ $a * b = \sin(a \cdot b)$ ☐ $a * b = 4^{a+b}$ ☐ $a * b = a \cdot |b|$ ☐ $a * b = a + 2b - 1$ ☒ Hiçbiri

18.) Bir $\emptyset \neq A$ kümesinin kuvvet kümesi $P(A)$ üzerinde $X * Y = X \setminus Y$ işlemi tanımlanıyor. Buna göre:

- ☐ Her elemanın tersi var ☒ Birleşme öz. yok ☐ Değişme öz. var ☐ Birim el. var ☐ Hiçbiri

19.) $\mathbb{Z}$ 'de $a \star b = b$ şeklinde tanımlanan işlemle ilgili hangisi doğrudur?

☐ En az iki elemanın tersi var ☐ Birleşme öz. yok ☐ Değişme öz. var ☐ Birim el. var ☒ Hiçbiri

20.) A kümesinde bir $*$ işlemi tanımlansın. Bazı elemanların birden fazla tersinin olduğu bilindiğine göre $*$ ile ilgili aş. hangisi söylenebilir?

☐ Değişme öz. yok ☒ Birleşme öz. yok ☐ Birden fazla birim el. var ☐ Kapalı değil ☐ Hiçbiri

21.) Bütün kümeler üzerinde tanımlanan $A * B = \overline{A \cup B}$ işlemi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

☐ Kapalı değil ☐ Birleşme öz. var ☐ Değişme öz. yok ☐ Birim el. var ☒ Hiçbiri

Bölüm 8

Cebirsel Yapılar

Tanım 8.1 Üzerinde en az bir işlem tanımlı olan ve bu işleme göre bazı şartları sağlayan kümeye bir **cebirsel yapı** denir. Eğer A kümesi üzerinde bir $*$ işlemi tanımlanmışsa $(A, *)$ ikilisine tek işlemli bir cebirsel yapıdır. Benzer şekilde, $\triangle$ başka bir işlem ise $(A, *, \triangle)$ yapısı iki işlemli bir cebirsel yapıdır. Eğer $*$ ve $\triangle$ işlemleri A ve B kümeleri üzerinde birer n -li işlem iseler o zaman $(A, *)$ ve $(B, \triangle)$ sistemlerine **aynı türden sistemler** denir.

Örnek 8.2 $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ve $\cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ birer ikili işlemdir. O halde $(\mathbb{Z}, +)$ ve $(\mathbb{N}, \cdot)$ aynı türden sistemlerdir.

Tanım 8.3 Boş olmayan bir S kümesi üzerinde tanımlanan $*$ işleminin birleşme özelliği varsa $(S, *)$ sistemine bir **yarıgrup** denir. Birim elemanı olan yarıgruplara da **monoid** denir.

Örnek 8.4 $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^+, \cdot)$ sistemleri birer yarıgruptur.

Tanım 8.5 G boş olmayan bir küme ve $*, G$ 'de bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki dört şart sağlanıyorsa $(G, *)$ sistemine bir **grup** denir.

- (i) Her $a, b \in G$ için $a * b \in G$. (Kapalılık)
- (ii) Her $a, b, c \in G$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$. (Birleşme)
- (iii) Her $a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $e \in G$ vardır. (Birim eleman)
- (iv) Her $a \in G$ için $a * b = b * a = e$ olacak şekilde $b \in G$ vardır. (Ters eleman)

Bunlara ilaveten eğer

- (v) Her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ (Değişme)

özellği varsa $(G, *)$ sistemine bir **abelyen (değişmeli) grup** denir.

Not 8.6 Burada (iv) özelliğindeki b elemanına a nın $*$ işlemine göre **tersi** denir ve genelde $b = a^{-1}$ şeklinde gösterilir. Grup işlemi toplama ise (veya toplamsal bir gösterim şekli kullanılıyor ise) $b = -a$ ile gösterilir.

Örnek 8.7 $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sistemleri birer abelyen gruptur. Ayrıca $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sistemleri de birer abelyen gruptur. Her elemanın tersi olmadığından $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$ ve $(\mathbb{Z}, \cdot)$ sistemleri bir grup değildir.

Örnek 8.8 $A \neq \emptyset$ olmak üzere $(P(A), \cup)$ sistemini düşünelim. Kapalılık ve birleşme özelliği kolaylıkla gösterilebilir. Birim eleman da $\emptyset$ dir. Ancak bu işlemde sadece birim elemanın tersi mevcuttur, çünkü X en az bir elemanlı bir küme ise

$$X \cup Y = Y \cup X = \emptyset$$

şartını sağlayan bir $Y \in P(A)$ bulunamaz. O halde $(P(A), \cup)$ sistemi bir grup değildir.

Örnek 8.9 $G = \{3^x : x \in \mathbb{Z}\}$ kümesinde $3^x \star 3^y = 3^{x+y}$ şeklinde bir $\star$ işlemi tanımlanıyor. $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a + b \in \mathbb{Z}$ olduğundan $3^a \star 3^b = 3^{a+b} \in G$ olur. Ayrıca

$$3^a \star (3^b \star 3^c) = 3^a \star 3^{b+c} = 3^{a+b+c} = 3^{a+b} \star 3^c = (3^a \star 3^b) \star 3^c$$

olup $\star$ işleminin birleşme özelliği vardır. Birim elemanın $3^0 = 1$ olduğu kolayca görülür. Her $3^a \in G$ elemanın tersi $3^{-a} \in G$ elemanıdır, çünkü

$$3^a \star 3^{-a} = 3^{-a} \star 3^a = 3^0 = 1.$$

Sonuç olarak $(G, \star)$ sisteminin bir grup olduğu görülür.

Teorem 8.10 $(G, *)$ bir grup olsun.

- a) G 'nin birim elemanı yegânedir.
- b) Her elemanın sadece bir tane tersi vardır.
- c) Her $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1}$ dir.
- d) Her $a, b \in G$ için $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ dir.

İspat a) Bir işlemde birim elemanın tekliği gösterilmiştir. (Teorem 7.15)

İspat b) $*$ işleminin birleşme özelliği olduğundan her elemanın tersi tektir. (Teorem 7.16)

İspat c) $x * y = e$ ve $y * x = e$ ise $x^{-1} = y$ olduğunu biliyoruz. Şimdi

$$a^{-1} * a = e \quad \text{ve} \quad a * a^{-1} = e$$

olup $x = a^{-1}$ ve $y = a$ dersek $(a^{-1})^{-1} = a$ olduğu görülür.

İspat d) Şimdi

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * \underbrace{(b * b^{-1})}_e * a^{-1} = a * a^{-1} = e$$

$$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * \underbrace{(a^{-1} * a)}_e * b = b^{-1} * b = e$$

eşitliklerinden ispat tamamlanır. □

Tanım 8.11 $(G, *)$ birim elemanı e olan bir grup ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Her $a \in G$ için:

- a) $a^1 = a$,
- b) $a^2 = a * a, a^3 = a * a * a, \dots, a^n = a^{n-1} * a \quad (n \geq 2)$
- c) $a^0 = e$
- d) $a^{-n} = (a^n)^{-1} \quad (n \geq 1)$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımlar çarpımsal gösterim şekli içindir. Toplamsal gösterim şeklinde grup işlemi $+$ ile ve bir a elemanının tersi $-a$ ile gösterilir. Bu durumda yukardaki tanımlar

$$1 \cdot a = a, \quad na = (n-1)a + a, \quad 0 \cdot a = e, \quad (-n)a = -(na)$$

şeklinde verilir.

Teorem 8.12 $(G, *)$ bir grup ve $m, n \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda her $x \in G$ için $(x^m)^n = x^{mn}$ ve $x^m * x^n = x^{m+n}$ dir.

Tanım 8.13 $(G, *)$ bir grup ve $\emptyset \neq S \subseteq G$ olsun. Eğer $(S, *)$ yapısı bir grup ise (yani S kümesi de aynı $*$ işlemine göre grup oluyorsa) S 'ye G 'nin bir **altgrubu** denir.

Not 8.14 Eğer S kümesi bir altgrup değilse ya kapalı değildir, ya birim eleman yoktur ya da S 'deki bazı elemanların tersleri S ye ait değildir. Ancak $S \subseteq G$ olduğundan birleşme özelliği S 'de vardır.

Örnek 8.15 $(\mathbb{Z}, +)$ grubu $(\mathbb{Q}, +)$ grubun altgrubudur. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ grubu $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ grubunun altgrubudur.

Teorem 8.16 $(G, *)$ bir grup ve S de G 'nin boş olmayan bir altkümesi olsun. S nin bir altgrup olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in S$ için $a * b^{-1} \in S$ olmasıdır.

Örnek 8.17 $G = (\mathbb{Z}, +)$ grubu olsun. $m \in \mathbb{Z}$ sabit bir tamsayı olmak üzere $m\mathbb{Z} = \{mk : k \in \mathbb{Z}\}$ alt kümesini düşünelim. $a, b \in m\mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda bir $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ için $a = mk_1, b = mk_2$ şeklindedir. Biz $a * b^{-1} \in m\mathbb{Z}$ olduğunu; yani $a - b \in m\mathbb{Z}$ olduğunu göstereceğiz. Şimdi, $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$ olduğundan

$$a - b = mk_1 - mk_2 = m(k_1 - k_2) \in m\mathbb{Z}$$

olup Teorem 8.16 den dolayı $m\mathbb{Z}$ bir altgrup olur.

Örnek 8.18 $(G, *)$ bir grup ve $a \in G$ olsun. $H = \{x \in G : a * x = x * a\}$ kümesinin bir altgrup olduğunu gösterelim. $x, y \in H$ alalım. O halde $a * x = x * a$ ve $a * y = y * a$ dır. Şimdi

$$\begin{aligned} a * y = y * a &\implies \text{sağdan } y^{-1} \text{ ile, } a = y * a * y^{-1} \\ &\implies \text{soldan } y^{-1} \text{ ile, } y^{-1} * a = a * y^{-1} \end{aligned}$$

olup $y^{-1} \in H$ olduğu görülür. Daha sonra,

$$(x * y^{-1}) * a = x * (y^{-1} * a) = x * (a * y^{-1}) = (x * a) * y^{-1} = (a * x) * y^{-1} = a * (x * y^{-1})$$

olduğundan $x * y^{-1} \in H$ olduğu görülür. Teorem 8.16'den dolayı H bir altgruptur. Aslında bu altgrup a elemanı ile değişmeli olan elemanların kümesidir.

Tanım 8.19 Boş olmayan bir H kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ ikili işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(H, \oplus, \odot)$ iki işlemli cebirsel yapısına bir **halka** denir.

- a) $(H, \oplus)$ bir abelyen gruptur.
- b) $(H, \odot)$ bir yarı gruptur.
- c) $\odot$ işleminin $\oplus$ üzerine dağılma özelliği vardır.

Örnek 8.20 Bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümeleri birer halkadır. Yine, bilinen matris toplaması ve matris çarpması işlemlerine göre 2×2 tipindeki reel matrislerin kümesi bir halkadır.

Tanım 8.21 Boş olmayan bir H kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ ikili işlemleri tanımlansın. $\oplus$ işleminin birim elemanını 0_H ile gösterelim. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(H, \oplus, \odot)$ iki işlemli cebirsel yapısına bir **cisim** denir.

- a) $(H, \oplus)$ bir abelyen gruptur.
- b) $(H \setminus \{0_H\}, \odot)$ bir abelyen gruptur.
- c) $\odot$ işleminin $\oplus$ üzerine dağılma özelliği vardır.

Örnek 8.22 Bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümeleri birer cisimdir. Modulo 7 toplama ve çarpma işlemlerine göre $\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ denklik sınıfları kümesi bir cisimdir.

ALİŞTIRMALAR

1.) Aşağıdaki kümelerin yanlarında verilen işlemlerle birlikte birer abelyen grup oluşturup oluşturmadıklarını araştırınız.

a) $\mathbb{N}, a * b = a - b$

b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}, a * b = a/b$

c) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, a * b = \frac{ab}{2}$

d) $\mathbb{R}^+, a * b = \frac{ab}{3}$

e) $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} : 0 \neq a \in \mathbb{R} \right\}$, matris çarpması.

Çözüm a) Bu sorudaki $*$ kuralı doğal sayılar kümesinde bir işlem tanımlamaz. Çünkü, örneğin $2 * 5 = -3 \notin \mathbb{N}$.

Çözüm b) $*$ işlemi birleşme özelliğine sahip değildir, çünkü:

$$(2 * 3) * 5 = \frac{2}{3} * 5 = \frac{2}{15} \quad \text{fakat} \quad 2 * (3 * 5) = 2 * \frac{3}{5} = \frac{10}{3}.$$

Çözüm c) Her $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ için $\frac{ab}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ olup işlem kapalıdır. İşlemin birleşme özelliği vardır, çünkü

$$(a * b) * c = \frac{ab}{2} * c = \frac{abc}{4} = a * \frac{bc}{2} = a * (b * c).$$

İşlemin değişme özelliği vardır, çünkü

$$a * b = \frac{ab}{2} = \frac{ba}{2} = b * a.$$

Her $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ için $2 * a = a * 2 = \frac{2a}{2} = a$ olduğundan birim eleman 2 dir. Ayrıca a nın tersi $4/a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ dir, çünkü

$$\frac{4}{a} * a = a * \frac{4}{a} = \frac{a \cdot 4}{2} = 2.$$

Sonuç olarak: $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$ bir abelyen gruptur.

Çözüm d) Her $a, b \in \mathbb{R}^+$ için $\frac{ab}{3} \in \mathbb{R}^+$ olup işlem kapalıdır. İşlemin birleşme özelliği vardır, çünkü

$$(a * b) * c = \frac{ab}{3} * c = \frac{abc}{9} = a * \frac{bc}{3} = a * (b * c).$$

İşlemin değişme özelliği vardır, çünkü

$$a * b = \frac{ab}{3} = \frac{ba}{3} = b * a.$$

Her $a \in \mathbb{R}^+$ için $3 * a = a * 3 = \frac{3a}{3} = a$ olduğundan birim eleman 3 dür. Ayrıca a nın tersi $9/a \in \mathbb{R}^+$ dir, çünkü

$$\frac{9}{a} * a = a * \frac{9}{a} = \frac{a \cdot 9}{3} = 3.$$

Sonuç olarak: $(\mathbb{R}^+, *)$ bir abelyen gruptur.

Çözüm e) İşlemin kapalı olduğunu göstermek için, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ alalım.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \in G, B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 1/b \end{bmatrix} \in G \implies AB = A = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & 1/(ab) \end{bmatrix} \in G,$$

olur çünkü $1/(ab) \neq 0$ dır. O halde işlem kapalıdır. Matris çarpması her zaman birleşmeli olduğundan G' 'de de birleşmelidir. Şimdi

$$BA = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 1/b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba & 0 \\ 0 & 1/(ba) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & 1/(ab) \end{bmatrix} = AB$$

olup işlemin değişme özelliği vardır. (Fakat, genelde matris çarpımı değişmeli değildir.) 2×2 matrislerin çarpımında birim eleman

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisidir. G nin tanımında $a = 1$ alırsak $I_2 \in G$ olduğu görülür. 2×2 bir matrisin tersinin formülü şöyledir:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (\text{Eğer } ad-bc \neq 0 \text{ ise})$$

Bu durumda G deki bir A matrisinin tersi:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \frac{1}{a}} \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in G$$

olduğu açıktır. Sonuç olarak G bir abelyen gruptur.

2.) $(G, *)$ bir grup olsun. Her $a, b \in G$ için $(a * b)^2 = a^2 * b^2$ ise G 'nin değişmeli olduğunu gösterin.

Çözüm Her $a, b \in G$ için

$$\begin{aligned} (a * b)^2 = a^2 * b^2 &\implies a * b * a * b = a * a * b * b \\ &\implies b * a * b = a * b * b && (\text{soldan } a^{-1} \text{ ile işleme koyduk}) \\ &\implies b * a = a * b && (\text{sağdan } b^{-1} \text{ ile işleme koyduk}) \end{aligned}$$

olduğundan işlemin değişme özelliği elde edilir.

3.) $G = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$ kümesi üzerinde

$$a \circ b = \frac{a+b}{1+ab}$$

işlemi tanımlanıyor. $(G, \circ)$ sisteminin bir grup olduğunu gösterin.

Çözüm: $-1 < a, b < 1$ olduğundan $-1 < ab < 1$ olup $1 + ab > 0$ olduğu görülür. Şimdi

$$\left. \begin{array}{l} -1 < a < 1 \implies 0 < a + 1 \\ -1 < b < 1 \implies 0 < b + 1 \end{array} \right\} \implies (a + 1)(b + 1) > 0 \implies \frac{(a + 1)(b + 1)}{1 + ab} > 0 \implies \frac{a + b}{1 + ab} > -1$$

elde edilir. Diğer yandan:

$$\left. \begin{array}{l} -1 < a < 1 \implies a - 1 < 0 \\ -1 < -b < 1 \implies 0 < 1 - b \end{array} \right\} \implies (a - 1)(1 - b) < 0 \implies \frac{(a - 1)(1 - b)}{1 + ab} < 0 \implies \frac{a + b}{1 + ab} < 1$$

olup $-1 < a \circ b < 1$, yani işlem kapalıdır. Birleşme özelliği vardır, çünkü:

$$\begin{aligned} (a \circ b) \circ c &= \left(\frac{a + b}{1 + ab} \right) \circ c = \frac{\frac{a+b}{1+ab} + c}{1 + \frac{ac+bc}{1+ab}} = \frac{a + b + c + abc}{1 + ab + ac + bc} \\ a \circ (b \circ c) &= a \circ \left(\frac{b + c}{1 + bc} \right) = \frac{a + \frac{b+c}{1+bc}}{1 + \frac{ab+ac}{1+bc}} = \frac{a + abc + b + c}{1 + bc + ab + ac} \end{aligned}$$

olup eşittirler. Değişme özelliği vardır, çünkü:

$$a \circ b = \frac{a + b}{1 + ab} = \frac{b + a}{1 + ba} = b \circ a.$$

Birim eleman 0 dır, çünkü:

$$0 \circ a = a \circ 0 = \frac{a + 0}{1 + 0} = a.$$

Her $a \in G$ için $a^{-1} = -a \in G$ dir, çünkü

$$(-a) \circ a = a \circ (-a) = \frac{a - a}{1 - a^2} = 0.$$

Sonuç olarak: $(G, \circ)$ gruptur, aynı zamanda abelyen gruptur.

4.) $(G, *)$ bir grup ve H de onun bir altgrubu olsun. $a \in G$ olmak üzere aşağıda verilen kümenin de bir altgrup olduğunu gösterin.

$$K = \{ a * h * a^{-1} : h \in H \}.$$

Çözüm: $x, y \in K$ alalım. O halde $x = a * h_1 * a^{-1}$ şeklinde ve $y = a * h_2 * a^{-1}$ şeklinde olmalıdır. $(h_1, h_2 \in H)$. Şimdi H bir altgrup olduğundan Teorem 8.16 dan dolayı $h_1 * h_2^{-1} \in H$ dir. O halde:

$$\begin{aligned} x * y^{-1} &= (a * h_1 * a^{-1}) * (a * h_2 * a^{-1})^{-1} = (a * h_1 * a^{-1}) * (a * h_2^{-1} * a^{-1}) \\ &= a * h_1 * \underbrace{(a^{-1} * a)}_e * h_2^{-1} * a^{-1} = a * h_1 * h_2^{-1} * a^{-1} \\ &= a * \underbrace{(h_1 * h_2^{-1})}_{=h_3 \in H} * a^{-1} = a * h_3 * a^{-1} \in K \end{aligned}$$

olup Teorem 8.16 dan dolayı K, G nin bir altgrubudur.

5.) G kümesi 2×2 tipindeki tersi olan matrislerin kümesi olsun. G 'nin bilinen matris çarpımı ile bir grup olduğunu biliyoruz. Aşağıda verilen H kümesinin G 'nin ve K kümesinin de H 'nin bir altgrubu olduğunu gösterin.

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\}, \quad K = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Çözüm:

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in H, Y = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \in H \implies Y^{-1} = \frac{1}{df} \begin{bmatrix} f & -e \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/d & -e/(df) \\ 0 & 1/f \end{bmatrix}$$

olup

$$XY^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/d & -e/(df) \\ 0 & 1/f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{d} & -\frac{ae}{df} + \frac{b}{f} \\ 0 & \frac{c}{f} \end{bmatrix} \in H$$

çünkü a, d, c, f sıfır olmadığından $(a/d)(c/f) \neq 0$. Teorem 8.16 dan dolayı H, G nin bir alt grubudur. Benzer şekilde

$$X = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in K, Y = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in K \implies Y^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup

$$XY^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b-c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in K$$

olduğu açıktır. Teorem 8.16 dan dolayı K, H nin bir alt grubudur.

6.) $G = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \text{ veya } b \neq 0\}$ kümesinin bilinen çarpma işlemine göre bir grup olduğunu gösterin. (İpucu: $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ için $a + b\sqrt{5} = c + d\sqrt{5} \iff a = c$ ve $b = d$.)

Çözüm: $0 = 0 + 0\sqrt{5}$ olup $0 \in G$ olması için gerek ve yeter şart $a = b = 0$ dır. G nin tanımından ve verilen ipucundan dolayı $0 \notin G$ olur. Şimdi $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ için $x = a + b\sqrt{5} \in G, y = c + d\sqrt{5} \in G$ ise

$$xy = (a + b\sqrt{5})(c + d\sqrt{5}) = \underbrace{(ac + 5bd)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{5}$$

olur. Ayrıca $x, y \in \mathbb{R}$ olup sıfır olmayan iki reel sayının çarpımı sıfırdan farklı olacağından $xy \in G$ olur. Reel sayılardaki çarpma işlemi birleşmeli ve değişmeli olup G 'de de aynı özelliklere sahiptir. Çarpmanın birim elemanı 1 olup $1 = 1 + 0\sqrt{5} \in G$ olduğu açıktır. Şimdi ters elemanı bulalım. $a + b\sqrt{5} \in G$ elemanının tersine $x + y\sqrt{5}$ dersek:

$$(a + b\sqrt{5})(x + y\sqrt{5}) = 1 + 0\sqrt{5} \implies (ax + 5by) + (ay + bx)\sqrt{5} = 1 + 0\sqrt{5}$$

denklemi elde edilir. Buradan, ipucunu kullanırsak, $ax + 5by = 1$ ve $bx + ay = 0$ denklem sistemlerini çözmemiz gerekir. Cramer kuralını kullanırsak:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 5b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a}{a^2 - 5b^2} \quad \text{ve} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 5b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{-b}{a^2 - 5b^2}$$

elde edilir. $a^2 - 5b^2 = 0$ olamaz, çünkü öyle olsaydı $a/b = \mp\sqrt{5}$ olurdu. $a, b \in \mathbb{Q}$ olup iki rasyonel sayının bölümü irrasyonel bir sayı olan $\pm\sqrt{5}$ olamaz. $x, y \in \mathbb{Q}$ olduğu açıktır. Ayrıca a, b den en az biri sıfır olmayıp x, y den en az biri sıfırdan farklıdır. Bu durumda

$$(a + b\sqrt{5})^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 - 5b^2} \right) - \left(\frac{b}{a^2 - 5b^2} \right) \sqrt{5} \in G$$

elde edilir. Sonuç olarak $(G, \cdot)$ hem grup hem de abelyen bir gruptur.

7.) $G = \left\{ \begin{bmatrix} a+2b & 3b \\ -b & a \end{bmatrix} : a \text{ ve } b \text{ ikisi birden sıfır olmayan reel sayılar} \right\}$ kümesi bilinen matris çarpımı ile grup mudur? $a \neq 0$ ve $b = 0$ olacak şekildeki matrislerin kümesi H bir altgrup mudur?

Çözüm: G deki bir matrisin determinantı: $a^2 + 2ab + 3b^2 = (a+b)^2 + 2b^2$ olup bu ifadenin sıfır olması için gerek ve yeter şart $a = b = 0$ dır. a, b den en az biri sıfırdan farklı olacağından $(a+b)^2 + 2b^2 \neq 0$ dır. Yani G deki her matrisin determinantı sıfırdan farklıdır. Şimdi

$$X = \begin{bmatrix} a+2b & 3b \\ -b & a \end{bmatrix} \in G \text{ ve } Y = \begin{bmatrix} c+2d & 3d \\ -d & c \end{bmatrix} \in G \implies$$

$$XY = \begin{bmatrix} ac + 2ad + 2bc + bd & 3ad + 6bd + 3bc \\ -bc - 2bd - ad & -3bd + ac \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu aşamada $A = -3bd + ac$ ve $B = bc + 2bd + ad$ dersek

$$XY = \begin{bmatrix} A + 2B & 3B \\ -B & A \end{bmatrix}$$

elde edilir. $|X| \neq 0$ ve $|Y| \neq 0$ olup $|XY| = |X| \cdot |Y|$ formülünden $|XY| \neq 0$ dır, yani $A \neq 0$ veya $B \neq 0$ dır. O halde $XY \in G$ olup işlem kapalıdır. Bilinen matris çarpımı her zaman birleşmeli olduğundan G' de de birleşmelidir. G nin tanımında $a = 1, b = 0$ alınırsa, matris çarpması işleminin birim elemanı olan birim matris yani

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G$$

olduğu görülür. Şimdi de ters elemanı bulalım.

$$X^{-1} = \frac{1}{a^2 + 2ab + 3b^2} \begin{bmatrix} a & -3b \\ b & a + 2b \end{bmatrix}$$

bulunur. Yine bu aşamada

$$U = \frac{a+2b}{a^2+2ab+3b^2}, V = \frac{-b}{a^2+2ab+3b^2} \text{ dersek: } X^{-1} = \begin{bmatrix} U+2V & 3V \\ -V & U \end{bmatrix}$$

elde edilir. $|X| \neq 0$ olup $|X^{-1}| = 1/|X|$ formülünden $|X^{-1}| \neq 0$ dır. Yani $U \neq 0$ veya $V \neq 0$ olup $X^{-1} \in G$ olur. Sonuç olarak G bir gruptur. Şimdi

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

kümesinden X, Y matrisleri alalım. $a \neq 0, b \neq 0$ olmak üzere

$$X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in H \implies XY^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \frac{a}{b} \end{bmatrix} \in H$$

çünkü $\frac{a}{b} \neq 0$ dır. Teorem 8.16 dan dolayı H, G nin bir alt grubudur.

8.) $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0 \right\}$ kümesi bilinen matris çarpımı ile grup mudur? $b = -1$ olacak şekildeki matrislerin kümesi H bir altgrup mudur?

Çözüm: G deki matrislerin determinantı $ab \neq 0$ olur. Şimdi

$$X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in G \text{ ve } Y = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in G \implies XY = \begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix} \in G$$

olur çünkü a, b, c, d 'nin hepsi sıfırdan farklı olup $ac \neq 0, bd \neq 0$ dır. Matrislerdeki çarpma işlemi birleşme özelliğine sahiptir. $a = b = 1$ alınırsa I_2 birim matrisinin G de olduğu görülür.

$$X^{-1} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{bmatrix} \in G$$

olur, çünkü $1/a \neq 0$ ve $1/b \neq 0$ dır. Sonuç olarak G bir gruptur. Şimdi

$$X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in H \text{ ve } Y = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in H \implies$$

$$XY^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/b & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a/b & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup bu matris H de değildir. (Sağ alt köşede $+1$ vardır.) Teorem 8.16 dan dolayı H, G nin bir alt grubu değildir. (Teorem 8.16 kullanılmadan da H nin altgrup olmadığı nasıl söylenebilirdi?)

9.) $G = \{ (a, b) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q} \}$ kümesi üzerinde $(a, b) * (c, d) = (a + c, 2^{-c}b + d)$ işlemi tanımlanıyor. $(G, *)$ grup mudur? Abelyen midir?

Çözüm: $a, c \in \mathbb{Z}$ ve $b, d \in \mathbb{Q}$ ise $a + c \in \mathbb{Z}$ ve $2^{-c}b + d \in \mathbb{Q}$ olacağından $(a + c, 2^{-c}b + d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} = G$ olup işlem kapalıdır.

$$\left. \begin{aligned} [(a, b) * (c, d)] * (e, f) &= (a + c, 2^{-c}b + d) * (e, f) = (a + c + e, 2^{-e}(2^{-c}b + d) + f) \\ (a, b) * [(c, d) * (e, f)] &= (a, b) * (c + e, 2^{-e}d + f) = (a + c + e, 2^{-c-e}b + 2^{-e}d + f) \end{aligned} \right\} \text{Eşit}$$

olup $*$ işlemi birleşmelidir.

$$(a, b) * (x, y) = (a, b) \implies (a + x, 2^{-x}b + y) = (a, b) \implies a + x = a, 2^{-x}b + y = b$$

denklemlerinden $x = 0$ ve daha sonra $y = 0$ elde edilir. Ayrıca

$$(0, 0) * (a, b) = (0 + a, 2^{-a} \cdot 0 + b) = (a, b)$$

olduğundan birim eleman $(0, 0) \in G$ dır.

$$(a, b) * (x, y) = (0, 0) \implies (a + x, 2^{-x}b + y) = (0, 0) \implies a + x = 0, 2^{-x}b + y = 0$$

denklemlerinden $x = -a$ ve daha sonra $y = -2^a b$ elde edilir. Ayrıca

$$(-a, -2^a b) * (a, b) = (-a + a, 2^{-a}(-1)2^a b + b) = (0, 0) \text{ olup } (a, b)^{-1} = (\underbrace{-a}_{\in \mathbb{Z}}, \underbrace{-2^a b}_{\in \mathbb{Q}}) \in G$$

olur. Yani $(G, *)$ bir gruptur. Abelyen grup değildir, çünkü

$$(1, 2) * (3, 4) = (4, 2^{-3}2 + 4) = (4, 17/4) \quad \text{fakat} \quad (3, 4) * (1, 2) = (4, 2^{-1}4 + 2) = (4, 4).$$

10.) $G = \{ (a, b) : a, b \in \mathbb{Z}, a \leq 0, b > 0 \}$ kümesi üzerinde $(a, b) * (c, d) = (a + c, bd)$ işlemi tanımlanıyor. $(G, *)$ grup mudur? Abelyen midir?

Çözüm: $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ olsun. $a \leq 0, c \leq 0 \implies a + c \leq 0$ ve $b > 0, d > 0 \implies bd > 0$ olacağından $(a + c, bd) \in G$ olduğu görülür. Yani $*$ işlemi kapalıdır.

$$\begin{aligned} [(a, b) * (c, d)] * (e, f) &= (a + c, bd) * (e, f) = (a + c + e, bdf) = (a, b) * (c + e, df) \\ &= (a, b) * [(c, d) * (e, f)] \end{aligned}$$

olup işlem birleşme özelliğine sahiptir.

$$(a, b) * (c, d) = (a + c, bd) = (c + a, db) = (c, d) * (a, b)$$

olup işlemin değişme özelliği vardır. Birim eleman $(0, 1) \in G$ dir, çünkü

$$(a, b) * (0, 1) = (a + 0, b \cdot 1) = (a, b)$$

ve değişme özelliği vardır.

$$(a, b) * (x, y) = (0, 1) \implies (a + x, by) = (0, 1) \implies x = -a, y = 1/b$$

olup (değişme özelliği de olduğundan) (a, b) nin tersi $(-a, 1/b)$ dir. Ancak $(-a, 1/b) \in G$ olması için $a = 0$ ve $b = 1$ olmalıdır. Yani sadece birim elemanın tersi vardır. O halde $(G, *)$ grup değildir, dolayısıyla da abelyen grup değildir.

11.) Bir $(G, *)$ grubunda e birim elemanı göstermek üzere $a * b * c * d = e$ ise $b * c * d * a = e, c * d * a * b = e$ ve $d * a * b * c = e$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 a * b * c * d = e &\implies \text{soldan } a^{-1} \text{ ile:} & b * c * d &= a^{-1} \\
 &\implies \text{sağdan } a \text{ ile:} & b * c * d * a &= e \\
 &\implies \text{soldan } b^{-1} \text{ ile:} & c * d * a &= b^{-1} \\
 &\implies \text{sağdan } b \text{ ile:} & c * d * a * b &= e \\
 &\implies \text{soldan } c^{-1} \text{ ile:} & d * a * b &= c^{-1} \\
 &\implies \text{sağdan } c \text{ ile:} & d * a * b * c &= e
 \end{aligned}$$

12.) $(G, *)$ bir grup ve $a, b \in G$ için $a^2 = b^2 = (a * b)^2 = e$ ise $a * b = b * a$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 a^2 = e &\implies \text{soldan } a^{-1} \text{ ile:} & a &= a^{-1} \\
 b^2 = e &\implies \text{soldan } b^{-1} \text{ ile:} & b &= b^{-1}
 \end{aligned}$$

olup a ile b nin tersleri kendilerine eşittir. Şimdi

$$\begin{aligned}
 (a * b)^2 = e &\implies a * b * a * b = e \\
 &\implies \text{soldan } a^{-1} \text{ ile:} & b * a * b &= a^{-1} \\
 &\implies \text{soldan } b^{-1} \text{ ile:} & a * b &= b^{-1} * a^{-1} \\
 &\implies a * b = b * a.
 \end{aligned}$$

13.) $(\mathbb{R}^+, \div), (\mathbb{Z} \setminus \{1\}, +)$ ve $(\mathbb{Q}, \cdot)$ sistemleri neden birer grup değildir? Açıklayın.

Çözüm: $(\mathbb{R}^+, \div)$ grup değildir, çünkü $\div$ işleminin birleşme özelliği yoktur. Örneğin:

$$(6 \div 1) \div 3 = 6 \div 3 = 2 \quad \text{fakat} \quad 6 \div (1 \div 3) = 6 \div (1/3) = 18$$

$(\mathbb{Z} \setminus \{1\}, +)$ grup değildir, çünkü $\mathbb{Z} \setminus \{1\}$ kümesinde toplama işlemi kapalı değildir. Örneğin, $3 + (-2) = 1 \notin \mathbb{Z} \setminus \{1\}$.

$(\mathbb{Q}, \cdot)$ grup değildir, çünkü 0 rasyonel sayısının tersi yoktur.

14.) Aşağıdaki sistemlerden hangisi bir abelyen gruptur?

☐ $(\mathbb{Q}, \cdot)$

☐ $((0, 1], \cdot)$

☐ $(\mathbb{R}^-, +)$

☐ $(3\mathbb{Z}, +)$

☐ Hiçbiri

15.) Aşağıdaki kümelerden hangisi yanında verilen işlemle bir monoiddir?

- $\bigcirc \mathbb{N}, a * b = a + b + 1$ $\bigcirc \mathbb{Q}, a * b = a$ $\otimes \mathbb{R}, a * b = a + b + ab$ $\bigcirc \mathbb{Z}^+, a * b = \text{OBEB}(a, b)$ $\bigcirc \text{H.B.}$

16.) Aşağıdaki sistemlerden hangisi bir grup değildir?

- $\bigcirc (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ $\bigcirc (\mathbb{C}, +)$ $\otimes ([0, \infty), +)$ $\bigcirc (\mathbb{Q}^+, \cdot)$ $\bigcirc \text{Hiçbiri}$

17.) Aşağıdaki kümelerden hangisi yanında verilen işlemle bir yarıgruptur?

- $\bigcirc \mathbb{N}, a * b = a + 2b$ $\bigcirc \mathbb{R}^+, a * b = a^{b+1}$ $\bigcirc \mathbb{Q}, a * b = 2a - 2b$ $\bigcirc \mathbb{Z}, a * b = |a + b| - 1$ $\otimes \text{Hiçbiri}$

18.) Bir A kümesinde tanımlanan $*$ işleminin birim elemanı olduğuna göre aş. hangisi kesinlikle doğrudur?

- $\bigcirc \text{En az 2 elemanın tersi var}$ $\bigcirc \text{Birleşme öz.var}$ $\bigcirc \text{Değişme öz.var}$ $\bigcirc (A, *)$ bir monoid $\otimes \text{H.B.}$

19.) Aşağıdaki kümelerden hangisi yanında verilen işlemle bir monoiddir?

- $\bigcirc \mathbb{R}, a * b = b$ $\bigcirc \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (a, b) * (c, d) = (a, d)$ $\otimes \mathbb{Z}, a * b = a + b - 1$ $\bigcirc \mathbb{Q}, a * b = ab - 1$ $\bigcirc \text{H.B.}$

20.) Aş. sistemlerin hangisi bir abelyen gruptur? ($a * b = \text{OKEK}(a, b)$ ve $A = \{\sqrt{2} \cdot x : x \in \mathbb{Z}\}$ dir)

- $\bigcirc (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, +)$ $\bigcirc (\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \cdot)$ $\bigcirc (\mathbb{N}^+, *)$ $\otimes (A, +)$ $\bigcirc \text{Hiçbiri}$

MT108 SOYUT MATEMATİK II DERSİ ÖRNEK ARASINAVI

- 1.) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ ve $A = [-1, 3]$ ise $f^{-1}(A)$ nedir?
☐ (0, 9) ☒ [0, 9) ☐ [0, $\sqrt{3}$) ☐ (0, 9] ☐ Hiçbiri
- 2.) Aşağıdaki bağıntılardan hangisi tanım kümesi $\mathbb{Z}$ nin tamamı olan bir fonksiyondur? ($x, y \in \mathbb{Z}$)
☐ $\{(x, y) : x = 2y\}$ ☐ $\{(x, y) : 2x = 3y\}$ ☐ $\{(x, y) : x = 4y\}$ ☒ $\{(x, y) : 4x = y\}$ ☐ Hiçbiri
- 3.) Aşağıdaki reel fonksiyonlardan hangisi 1-1 değildir?
☐ $f(x) = 4/x$ ☐ $h(x) = \sqrt[3]{x}$ ☒ $g(x) = x^3 + x^2 + 1$ ☐ $t(x) = \ln x$ ☐ Hiçbiri
- 4.) Tamsayılar kümesinde her $a, b \in \mathbb{Z}$ için aşağıda tanımlanan kurallardan hangisi bir işlem tanımlar?
☐ $\frac{a+b+1}{2}$ ☐ $\frac{a^2+b^2}{2}$ ☐ $\frac{a^3+ab}{a^2+b}$ ☐ $\frac{a+b+ab+1}{2}$ ☒ Hiçbiri
- 5.) A kümesinde $*$ işlemi tanımlansın. p : “ $*$ işlemine göre her elemanın tersi varsa bu işlem birleşmelidir” ve q : “ $*$ işlemine göre en az bir elemanın tersi varsa $(A, *)$ monoiddir” önermeleri için:
☒ p, q : Yanlış ☐ p, q : Doğru ☐ p : Yanlış, q : Doğru ☐ p : Doğru, q : Yanlış ☐ Hiçbiri
- 6.) Tamsayılarda $a * b = 2ab$ şeklinde tanımlanan işlem için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
☐ Birleşmeli değil ☐ Değişmeli değil ☐ Her elemanın tersi var ☒ Birim el. yok ☐ Hiçbiri
- 7.) $\mathbb{Q}$ da aşağıda kuralı verilen işlemlerden (eğer işlem ise) hangisinin birim elemanı vardır?
☐ $a * b = \frac{a+b}{a^2+1}$ ☐ $a * b = a + 4b$ ☒ $a * b = a + b - \frac{ab}{2}$ ☐ $a * b = \frac{a+b}{ab+b^2+a^2}$ ☐ Hiçbiri
- 8.) $\mathbb{R}^+$ kümesinde tanımlanan $a * b = \sqrt{ab}$ şeklinde tanımlanan işlem için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
☐ Birleşmelidir ☒ Birim eleman yoktur ☐ Kapalı değildir ☐ $a^{-1} = 1/a$ dır ☐ Hiçbiri
- 9.) $(G, *)$ bir grup, $a \in G$ ve $e \neq a$ olsun. $a^5 = e$ ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
☒ $a^2 = a^{-3}$ ☐ $a^3 = a^2$ ☐ $a^{-2} = a^2$ ☐ $a^{-1} = a^3$ ☐ Hiçbiri
- 10.) Aşağıdaki sistemlerden hangisi bir abelyen gruptur?
☐ $(\mathbb{R}, \cdot)$ ☐ $(\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}, +)$ ☐ $([-1, 1], \cdot)$ ☐ $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \cdot)$ ☒ Hiçbiri

_____ ☒ şeklinde işaretleyiniz. Bu sayfadaki her soru 5 puandır. _____
 _____ Dört yanlış bir doğruyu götürür. Diğer sayfaya geçiniz _____

Adı, Soyadı:

Numarası: MT

11.) “İkili işlem” ve “Etkisiz eleman” tanımlarını yazın. (10p)

12.) $f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Her $X \subseteq B$ için $f(f^{-1}(X)) \subseteq X$ olduğunu biliyoruz (göstermeyin). Eşitliğin her zaman sağlanması için gerek ve yeter şart f nin örten olmasıdır. Gösterin. (20p)

13.) Aşağıdaki G kümesi matris çarpımı ile grup mudur? Abelyen grup mudur? H , G nin altgrubu mudur? (20p)

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 2^m \end{bmatrix} : b \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z} \right\}, \quad H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 2^m \end{bmatrix} : b \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0 \right\}.$$

NOT: Süre 80 dakikadır.

BAŞARILAR Yrd.Doç.Dr.Hüseyin BİLGİÇ

CEVAP 11

İkili İşlem: A boş olmayan bir küme olsun. $f : A \times A \rightarrow A$ bir fonksiyon ise f ye A da bir **ikili işlem** denir.

Etkisiz Eleman: A kümesinde bir $*$ işlemi tanımlansın. Her $a \in A$ için $a * e = a$ ve $e * a = a$ şartını sağlayan bir $e \in A$ varsa bu elemana $*$ işleminin **birim (etkisiz) elemanı** denir.

CEVAP 12

İspat: ($\implies$) Her $X \subseteq B$ için $X = f(f^{-1}(X))$ olduğunu kabul edip f nin örten olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} X = B \text{ seçelim} &\implies f^{-1}(X) = f^{-1}(B) = A \\ &\implies X = f(f^{-1}(X)) \text{ olacağından } B = f(A) \\ &\implies f \text{ örten} \end{aligned}$$

İspat: ($\Longleftarrow$) Şimdi de f nin örten olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} x \in X &\implies f \text{ örten olduğundan } \exists y \in f^{-1}(X), f(y) = x \\ &\implies f(y) \in f(f^{-1}(X)) \\ &\implies x \in f(f^{-1}(X)) \end{aligned}$$

olup $X \subseteq f(f^{-1}(X))$ olur. Kapsamanın diğer yönü her zaman doğru olduğundan ispat tamamlanır.

(i) İşlemin kapalı olduğunu göstermek için, $a, b \in \mathbb{Q}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}$ alalım.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2^m \end{bmatrix} \in G, B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \in G \implies AB = \begin{bmatrix} 1 & b + a2^n \\ 0 & 2^{m+n} \end{bmatrix} \in G,$$

olur çünkü $b + a2^n \in \mathbb{Q}$ ve $m + n \in \mathbb{Z}$ dir. O halde işlem kapalıdır.

(ii) Matris çarpması her zaman birleşmeli olduğundan G 'de de birleşmelidir.

(iii) Şimdi

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a + b2^m \\ 0 & 2^{n+m} \end{bmatrix}$$

olup genelde $AB \neq BA$ dır, çünkü genelde $b + a2^n \neq a + b2^m$. O halde işlemin değişme özelliği yoktur.

(iv) 2×2 matrislerin çarpımında birim eleman $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisidir. G nin tanımında $b = 0$ ve $m = 0$ alırsak $I_2 \in G$ olduğu görülür.

(v)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2^m \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2^m} \begin{bmatrix} 2^m & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a2^{-m} \\ 0 & 2^{-m} \end{bmatrix} \in G$$

olduğu açıktır, çünkü $-m \in \mathbb{Z}$ ve $-a2^{-m} \in \mathbb{Q}$ dur.

Sonuç olarak: G bir gruptur, fakat abelyen grup değildir.

Şimdi de H nin altgrup olup olmadığına bakmak için, $a, b \in \mathbb{Q}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ alalım.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2^m \end{bmatrix} \in H, Y = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \in H \implies Y^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -b2^{-n} \\ 0 & 2^{-n} \end{bmatrix}$$

olup

$$XY^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -b2^{-n} \\ 0 & 2^{-n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b2^{-n} + a2^{-n} \\ 0 & 2^{m-n} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Ancak $m \geq 0$ ve $n \geq 0$ için genelde $m - n \geq 0$ olmayacağından genelde $XY^{-1} \notin H$ dir. O halde ilgili teoremden, H bir altgrup değildir.

Bölüm 9

Sayılabilirlik

Tanım 9.1 A ve B boş olmayan iki küme olsun. Eğer A 'dan B 'ye 1-1 ve örten bir fonksiyon yazılabiliyorsa A ve B kümelerine **eş güçlüdür** denir. (Boşküme sadece kendisi ile eş güçlüdür.)

Örnek 9.2 $A = \{a, b, c, d\}$ ve $B = \{2, 3, 4, 5\}$ olsun. $f = \{(a, 4), (b, 3), (c, 2), (d, 5)\}$ fonksiyonu 1-1 ve örten olup A ile B eş güçlüdür. Tam sayılar kümesi ile çift tamsayılar kümesi $2\mathbb{Z}$ eş güçlüdür, çünkü

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}, g(n) = 2n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon 1-1 ve örtendir.

Teorem 9.3 Kümeler arasında tanımlanan “eş güçlü olma” bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Her A kümesi için $I_A : A \longrightarrow A$ birim dönüşümü 1-1 ve örten olduğundan A ile A eş güçlüdür. A ile B eş güçlü ise $f : A \longrightarrow B$ 1-1 ve örten fonksiyon vardır. O halde, $f^{-1} : B \longrightarrow A$ 1-1 ve örten olup B ile A eş güçlüdür.

A ile B ve B ile C eş güçlü ise $f : A \longrightarrow B$ ve $g : B \longrightarrow C$ 1-1 ve örten fonksiyonları vardır. $g \circ f : A \longrightarrow C$ 1-1 ve örten olduğundan A ile C eş güçlü olur.

Sonuç olarak bağıntının yansıyan, simetrik ve geçişken olduğu gösterilmiş olur. $\square$

Not: Şimdi “sonlu küme” ve “sonsuz küme” tanımlarını vereceğiz. Bu tanımlar iki şekilde yapılmaktadır. Birinci şekilde “sonlu küme” tanımlanıp; “sonlu olmayan kümeye sonsuz küme denir” denmektedir. İkinci şekilde ise; “sonsuz küme” tanımlanıp; “sonsuz olmayan kümeye sonlu küme denir” denmektedir. Neticede, iki tanım eşdeğerdir; yani, bir tanıma göre sonlu (sonsuz) olan diğerine göre sonsuz (sonlu) olamaz.

Tanım 9.4 Kendi öz alt kümesi ile eş güçlü olabilen kümelere **sonsuz küme** denir. Sonsuz olmayan kümelere de **sonlu küme** denir. Boş küme sonlu olarak tanımlanır. Diğer şekliyle; bir küme boş

kümeysen veya k bir doğal sayı olmak üzere $\{0, 1, \dots, k\}$ kümesi ile eşgüçlü ise bu kümeye **sonlu küme** denir; sonlu olmayan kümeye de **sonsuz küme** denir.

Örnek 9.5 Doğal sayılar kümesi sonsuzdur, çünkü $f : \mathbb{N} \rightarrow A = \{2, 3, 4, \dots\}$, $f(n) = n + 2$ şeklinde tanımlanan fonksiyon 1-1 ve örtendir. $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi sonlu kümedir, çünkü B 'den öz altkümeye bir fonksiyon örten olabilir ama 1-1 olamaz.

Tanım 9.6 Doğal sayıların herhangi bir alt kümesiyle eş güçlü olan kümelere **sayılabilir küme** denir. Başka bir deyişle bir küme sonlu ise veya $\mathbb{N}$ ile eşgüçlü ise bu kümeye “sayılabilir” denir. Doğal sayılar kümesiyle eş güçlü olan kümelere **sayılabilir sonsuz küme** denir. (Aslında sayılabilir sonsuz küme hem sayılabilir hem de sonsuz olan kümedir.)

Örnek 9.7 Tamsayılar kümesi sayılabilirdir.

Çözüm: Aşağıdaki eşlemeyi düşünelim.

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & \dots \end{array}$$

O halde $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ çift ise;} \\ -\frac{n+1}{2}, & n \text{ tek ise.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun 1-1 ve örten olduğunu gösterelim. Bu daha önce gösterilmişti. (Bölüm 6, Alıştırma 6)

Teorem 9.8 A ve B sayılabilir iki ayrık küme ise $A \cup B$ sayılabilirdir.

İspat: A ve B her ikisi de sonlu ise $A \cup B$ nin sonlu olduğu açıktır. O halde $A \cup B$ sayılabilirdir.

Kümelerden biri sonlu, diğeri sayılabilir sonsuz olsun. Mesela A sonlu olsun. $s(A) = k + 1$ dersek, o zaman

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_k\} \quad \text{ve} \quad B = \{b_0, b_1, b_2, \dots\}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda $f : \mathbb{N} \rightarrow A \cup B$

$$f(n) = \begin{cases} a_n, & n \leq k \text{ ise;} \\ b_{n-k-1}, & n > k \text{ ise.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm 1-1 ve örtendir. O halde $A \cup B$ sayılabilirdir.

Öyleyse her iki kümenin de sonsuz (ve tabii ki sayılabilir) olduğunu kabul edelim. O zaman

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} \quad \text{ve} \quad B = \{b_0, b_1, b_2, \dots\}$$

şeklinde yazalım. Şimdi $g : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B$ fonksiyonunu

$$g(n) = \begin{cases} a_{n/2}, & n \text{ çift ise;} \\ b_{(n-1)/2}, & n \text{ tek ise.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. g nin 1-1 ve örten olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Yani, $A \cup B$ ile $\mathbb{N}$ eşgüçlü olup $A \cup B$ sayılabilir ve sonsuzdur. $\square$

Sonuç 9.9 a) A ile B ayrık olmasa da $A \cup B$ sayılabilir.

b) Sonlu sayıdaki sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilir.

Örnek 9.10 Rasyonel sayılar kümesi sayılabilir.

Çözüm: (İspat Cantor'a aittir) Önce pozitif rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}^+$ 'nın sayılabilir olduğunu gösterelim. $\mathbb{Q}^+$ kümesini bir sonsuz satırlı ve sütunlu bir tabloya; 1. satıra paydası 1 olanları, 2. satıra paydası 2 olanları (pay ve payda aralarında asal olmak üzere) v.s. yerleştirelim. Yani şu tablo oluşur:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
1/2	3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	13/2	15/2	17/2	...
1/3	2/3	4/3	5/3	7/3	8/3	10/3	11/3	13/3	...
1/4	3/4	5/4	7/4	9/4	11/4	13/4	15/4	17/4	...
1/5	2/5	3/5	4/5	6/5	7/5	8/5	9/5	11/5	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Şimdi $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Q}^+$ arasında aşağıdaki eşlemeyi yapalım:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
1	1/2	2	3	3/2	1/3	1/4	2/3	5/2	4	5	7/2	4/3	...

Tablonun bu şekilde $\mathbb{N}$ kümesi ile 1-1 ve örten eşleneceği açıktır. O halde $\mathbb{Q}^+$ ile $\mathbb{N}$ eşgüçlüdür. $\mathbb{Q}^+$ ile $\mathbb{Q}^-$ kümesi arasında $x \longmapsto -x$ eşlemesi 1-1 ve örten olduğundan $\mathbb{Q}^-$ kümesi de sayılabilir. Ayrık iki (veya sonlu sayıda) sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilir olduğundan $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ sayılabilir olur. $\square$

Şimdi sayılamayan kümelerin de olduğunu görelim.

Teorem 9.11 $[0, 1]$ kapalı aralığı sayılamayan bir kümedir. (Dolayısıyla $\mathbb{R}$ sayılamaz.)

İspat: (1891 yılında yapılan bu ispatta kullanılan yöntem Cantor'un Köşegen Yöntemi olarak bilinir.) $[0, 1]$ aralığının sayılabilir olduğunu kabul edelim. (Bu aralığın sonsuz olduğu açıktır.) O halde 1-1 ve örten bir $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu vardır. Başka bir deyişle; y_i , i -inci sayıyı ve $a_i, b_i, c_i, \dots$ ler de 0-9 arası rakamları temsil etmek üzere aşağıdaki sonsuz satırlı listede $[0, 1]$ aralığındaki bütün sayılar vardır:

$$\begin{aligned} y_0 &\rightarrow 0.a_0a_1a_2a_3\dots \\ y_1 &\rightarrow 0.b_0b_1b_2b_3\dots \\ y_2 &\rightarrow 0.c_0c_1c_2c_3\dots \\ y_3 &\rightarrow 0.d_0d_1d_2d_3\dots \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

$0.9999\dots = 1$ olduğundan 1 sayısı da bu tablodadır. Şimdi:

$$\begin{aligned} x_0 \text{ rakamını, } x_0 &\notin \{a_0, 0, 9\} \text{ şeklinde seçelim.} \\ x_1 \text{ rakamını, } x_1 &\notin \{b_1, 0, 9\} \text{ şeklinde seçelim.} \\ x_2 \text{ rakamını, } x_2 &\notin \{c_2, 0, 9\} \text{ şeklinde seçelim.} \\ x_3 \text{ rakamını, } x_3 &\notin \{d_3, 0, 9\} \text{ şeklinde seçelim.} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Seçim yapılırken 0 ve 9'un seçilmemesi bazı sayıların birden fazla ondalık gösterimi olduğundandır; mesela $0.540000 = 0.539999\dots$ gibi. Şimdi de x sayısını

$$x = 0.x_0x_1x_2x_3\dots$$

şeklinde oluşturalım. $x \in [0, 1]$ olduğu açıktır. Ancak

$$\begin{aligned} x &\neq y_0 \text{ dır, çünkü } x_0 \neq a_0 \quad (\text{yani 1. basamaklar farklı}) \\ x &\neq y_1 \text{ dir, çünkü } x_1 \neq b_1 \quad (\text{yani 2. basamaklar farklı}) \\ x &\neq y_2 \text{ dir, çünkü } x_2 \neq c_2 \quad (\text{yani 3. basamaklar farklı}) \\ x &\neq y_3 \text{ dür, çünkü } x_3 \neq d_3 \quad (\text{yani 4. basamaklar farklı}) \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Böylece x sayısının sonsuz listede olmadığı ortaya çıkar, yani sonsuz listede olmayan bir x sayısı üretilmiştir. Bu bir çelişkidir, çünkü sonsuz listede $[0, 1]$ aralığındaki bütün sayılar vardı. O halde $[0, 1]$ aralığı sayılabilir bir küme değildir. $\square$

Teorem 9.12 Sayılabilir sonsuz miktardaki sayılabilir sonsuz kümenin birleşimi sayılabilir sonsuzdur.

İspat: Sayılabilir sonsuz sayıdaki kümeler aşağıdaki gibi olsun.

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\} \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\} \\ A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots\} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Bu elemanları aşağıdaki tabloya yerleştirelim:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Daha sonra sırasıyla 1., 2., 3. . . köşegendeki elemanları yukarıdan aşağıya doğru $\mathbb{N}$ kümesi ile eşleyelim.

Yani aşağıdaki eşlemeyi yazalım:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{13} & a_{22} & a_{31} & a_{14} & a_{23} & a_{32} & a_{41} & \dots \end{array}$$

Bu şekilde yapılan eşlemenin örten olduğu açıktır. Eğer bu kümeler ayrıkta bu eşleme 1-1 dir. Alt satırda aynı olan elemanlar sadece bir defa yazılırsa (ki bu durumda da alt satır bu kümelerin birleşimidir) bu eşleme 1-1 ve örtendir. $\square$

ALİŞTIRMALAR

1.) $A = \{1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, \dots\}$ kümesi sayılabilir midir? İspatlayın.

Çözüm: $A = \{n^2 + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ olduğu açıktır. Şimdi $f : \mathbb{N} \rightarrow A, f(n) = n^2 + 1$ fonksiyonu tanımlayalım. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$f(m) = f(n) \implies m^2 + 1 = n^2 + 1 \implies m^2 = n^2 \implies m = n, \text{ (çünkü } m, n \geq 0 \text{)}$$

olup f nin 1-1 olduğu görülür. Şimdi de, verilen her $y \in A$ için $x = \sqrt{y-1}$ seçelim. $\exists k \in \mathbb{N}$ için $y = k^2 + 1$ olacağından $x = \sqrt{y-1} = k \in \mathbb{N}$ olur. O zaman $f(x) = y$ olup f örtendir.

Sonuç olarak A ile $\mathbb{N}$ eşgüçlü olduğundan A sayılabilir.

2.) Çift tamsayılar kümesinin sayılabilir sonsuz bir küme olduğunu gösterin.

Çözüm: $2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ yazalım. $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım.

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & n \text{ tek ise;} \\ -n, & n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

Şimdi $f(n) = f(m)$ olduğunu kabul edelim.

Durum 1. n, m çift: Bu durumda $-m = -n \implies m = n$ elde edilir.

Durum 2. n, m tek: Bu durumda $n+1 = m+1 \implies n = m$ bulunur.

Durum 3. n tek, m çift: Bu durumda $n+1 = -m \implies m+n = -1$ elde edilir ki, $m, n \in \mathbb{N}$ olduğundan böyle bir durum olamaz.

Durum 4. m tek, n çift: Bu durumda $m+1 = -n \implies m+n = -1$ elde edilir ki, $m, n \in \mathbb{N}$ olduğundan böyle bir durum olamaz.

Sonuç olarak, f birebirdir. Şimdi $y \in 2\mathbb{Z}$ verilsin.

Durum 1. $y > 0$: Bu durumda $x = y-1$ seçilirse, x tek bir doğal sayı olup

$$f(x) = x+1 = (y-1)+1 = y \quad \text{olup } f \text{ örtendir.}$$

Durum 2. $y \leq 0$: Bu durumda $x = -y$ seçilirse, x çift bir doğal sayı olup

$$f(x) = -x = -(-y) = y \quad \text{olup } f \text{ örtendir.}$$

Yani f örtendir. Sonuç olarak $\mathbb{N}$ ile A eşgüçlü olup A sayılabilir sonsuzdur.

3.) Negatif tamsayılar kümesinin sonsuz bir küme olduğunu gösterin.

Çözüm: $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$ kümesinin sonsuz olması için bir özalt kümesi ile eşgüçlü olması gerekir. Şimdi $f : \mathbb{Z}^- \rightarrow \{-2, -3, -4, \dots\}$ fonksiyonunu $f(x) = x-1$ şeklinde tanımlayalım. Her $x, y \in \mathbb{Z}^-$ için

$$f(x) = f(y) \implies x-1 = y-1 \implies x = y$$

olup f 1-1 dir. Ayrıca verilen her $y \in \{-2, -3, -4, \dots\}$ için $x = y+1$ seçilirse $f(x) = x-1 = y+1-1 = y$ olup f nin örten olduğu görülür. Yani $\mathbb{Z}^-$ ile $\{-2, -3, -4, \dots\}$ eşgüçlü olup $\mathbb{Z}^-$ sonsuzdur.

4.) $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ kümesi sayılabilir midir? Açıklayın.

Çözüm: $\mathbb{N}$ ile verilen küme arasında aşağıdaki eşlemeyi yazalım:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	...

Şimdi $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ aşağıdaki fonksiyonu yazalım.

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n+1}{2}, & n \text{ tek ise;} \\ \frac{n+2}{2}, & n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

Şimdi $f(n) = f(m)$ olduğunu kabul edelim.

Durum 1. n, m çift: Bu durumda $\frac{m+2}{2} = \frac{n+2}{2} \implies m = n$ elde edilir.

Durum 2. n, m tek: Bu durumda $-\frac{m+1}{2} = -\frac{n+1}{2} \implies m = n$ bulunur.

Durum 3. n tek, m çift: Bu durumda $-\frac{n+1}{2} = \frac{m+2}{2} \implies m + n = -3$ elde edilir ki, $m, n \in \mathbb{N}$ olduğundan böyle bir durum olamaz.

Durum 4. m tek, n çift: Bu durumda $-\frac{m+1}{2} = \frac{n+2}{2} \implies m + n = -3$ elde edilir ki, $m, n \in \mathbb{N}$ olduğundan böyle bir durum olamaz.

Sonuç olarak, f birebirdir. Şimdi $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ verilsin.

Durum 1. $y > 0$ ise: Bu durumda $x = 2y - 2$ seçilirse, x çift bir doğal sayı olup

$$f(x) = \frac{x+2}{2} = \frac{(2y-2)+2}{2} = y \quad \text{olup } f \text{ örtendir.}$$

Durum 2. $y < 0$: Bu durumda $x = -2y - 1$ seçilirse, x tek bir doğal sayı olup

$$f(x) = -\frac{x+1}{2} = -\frac{(-2y-1)+1}{2} = y \quad \text{olup } f \text{ örtendir.}$$

Yani f örtendir. Sonuç olarak $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ eşgüçlü olup $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sayılabilirdir.

5.) $A = \left\{ 0, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{4}, 4, \frac{7}{6}, 6, \frac{9}{8}, \dots \right\}$ kümesi sayılabilir midir? Neden?

Çözüm: $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+2}{n+1}, & n \text{ tek ise;} \\ n, & n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

Şimdi $f(n) = f(m)$ olduğunu kabul edelim.

Durum 1. n, m çift: Bu durumda $m = n$ hemen elde edilir.

Durum 2. n, m tek: Bu durumda $\frac{m+2}{m+1} = \frac{n+2}{n+1} \implies mn + m + 2n + 2 = mn + 2m + n + 2 \implies m = n$ bulunur.

Durum 3. n tek, m çift: Bu durumda $\frac{n+2}{n+1} = m \implies n + 2 = m(n + 1)$ elde edilir ki, böyle bir durum olamaz, çünkü $n + 2$ tek, fakat $m(n + 1)$ çifttir.

Durum 4. m tek, n çift: Bu durumda $\frac{m+2}{m+1} = n \implies m + 2 = n(m + 1)$ elde edilir ki, böyle bir durum olamaz, çünkü $m + 2$ tek, fakat $n(m + 1)$ çifttir.

Sonuç olarak, f birebirdir. Şimdi $y \in A$ verilsin.

Durum 1. y çift doğal sayı ise : Bu durumda $x = y$ seçilirse, x çift bir doğal sayı olup $f(x) = x = y$ olur. Yani f örtendir.

Durum 2. Bir k tek doğal sayısı için $y = (k + 2)/(k + 1)$ şeklinde ise: Bu durumda $x = k$ seçilirse, x tek bir doğal sayı olup

$$f(x) = f(k) = \frac{k + 2}{k + 1} = y \quad \text{olup } f \text{ örtendir.}$$

Sonuç olarak $\mathbb{N}$ ile A eşgüçlü olup A sayılabilirdir.

6.) $A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, 5, \frac{1}{4}, 17, \frac{1}{6}, 37, \frac{1}{8}, 65, \frac{1}{10}, 101, \dots \right\}$ kümesi sayılabilir midir? Açıklayınız.

Çözüm: $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & n \text{ tek ise;} \\ n^2 + 1, & n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

Şimdi $f(n) = f(m)$ olduğunu kabul edelim.

Durum 1. n, m çift: Bu durumda $m^2 + 1 = n^2 + 1 \implies m^2 = n^2 \implies m = n$ elde edilir, çünkü $m, n \geq 0$.

Durum 2. n, m tek: Bu durumda $\frac{1}{m+1} = \frac{1}{n+1} \implies m + 1 = n + 1 \implies m = n$ bulunur.

Durum 3. n tek, m çift: Bu durumda $\frac{1}{n+1} = m^2 + 1$ elde edilir ki. Böyle bir durum olamaz, çünkü $\frac{1}{n+1} \notin \mathbb{N}$, fakat $m^2 + 1 \in \mathbb{N}$.

Durum 4. m tek, n çift: Bu durumda $\frac{1}{m+1} = n^2 + 1$ elde edilir ki. Böyle bir durum olamaz, çünkü $\frac{1}{m+1} \notin \mathbb{N}$, fakat $n^2 + 1 \in \mathbb{N}$.

Sonuç olarak, f birebirdir. Şimdi $y \in A$ verilsin.

Durum 1. Bir k çift doğal sayısı için $y = k^2 + 1$ şeklinde ise : Bu durumda $x = k$ seçilirse, x çift bir doğal sayı olup $f(x) = x^2 + 1 = k^2 + 1 = y$ olur. Yani f örtendir.

Durum 2. Bir k tek doğal sayısı için $y = 1/(k + 1)$ şeklinde ise: Bu durumda $x = k$ seçilirse, x tek bir doğal sayı olup

$$f(x) = f(k) = \frac{1}{k + 1} = y \quad \text{olup } f \text{ örtendir.}$$

Sonuç olarak $\mathbb{N}$ ile A eşgüçlü olup A sayılabilirdir.

7.) Ayrık iki sonlu kümenin birleşiminin sonlu olduğunu ispatlayın.

Çözüm: A ve B ayrık ve sonlu iki küme olsun. $A = B = \emptyset$ ise $A \cup B = \emptyset$ sonludur. Kümelerden sadece biri boşküme ise $A \cup B = A$ veya $A \cup B = B$ olup her iki halde de $A \cup B$ sonludur. O zaman $A \neq \emptyset$ ve

$B \neq \emptyset$ kabul edelim. $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $s(A) = m + 1, s(B) = n + 1$ diyelim. O zaman

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_m\} \text{ ve } B = \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$$

şeklindedir. Şimdi $\{0, 1, \dots, m + n + 1\}$ kümesinden $A \cup B$ kümesine aşağıdaki f fonksiyonunu yazalım:

$$f(k) = \begin{cases} a_k, & 0 \leq k \leq m \text{ ise;} \\ b_{k-m-1}, & m+1 \leq k \leq m+n+1 \text{ ise.} \end{cases}$$

Burada aşağıdaki eşleme yapılmıştır:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & m & m+1 & m+2 & m+3 & \dots & m+n+1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{array}$$

Şimdi $f(x) = f(y)$ olsun.

Durum 1. $0 \leq x, y \leq m$: Bu durumda $a_x = a_y \implies x = y$ elde edilir.

Durum 2. $m+1 \leq x, y \leq m+n+1$: Bu durumda $b_x = b_y \implies x = y$ elde edilir.

Durum 3. $0 \leq x \leq m, m+1 \leq y \leq m+n+1$: Bu durumda $a_x = b_y$ elde edilir. Böyle bir durum olamaz, çünkü A ile B ayrıktır.

Durum 4. $0 \leq y \leq m, m+1 \leq x \leq m+n+1$: Bu durumda $a_y = b_x$ elde edilir. Böyle bir durum olamaz, çünkü A ile B ayrıktır.

Sonuç olarak f 1-1 dir. Şimdi $y \in A \cup B$ verilsin.

Durum 1. $y \in A$: Bu durumda bir $0 \leq k \leq m$ doğal sayısı için $y = a_k$ olmalıdır. O zaman $x = k$ seçilirse $f(x) = a_x = a_k = y$ olur. Yani f örtendir.

Durum 2. $y \in B$: Bu durumda bir $0 \leq k \leq n$ doğal sayısı için $y = b_k$ olmalıdır. O zaman $x = k+m+1$ seçilir. Bu durumda $m+1 \leq x \leq m+n+1$ olduğu açıktır. O halde

$$f(x) = b_{x-m-1} = b_{k+m+1-m-1} = b_k = y$$

olup f örtendir.

Sonuç olarak $A \cup B$ ile $\{0, 1, \dots, m+n+1\}$ kümesi eşgüçlüdür. $m+n+1 \in \mathbb{N}$ olduğundan $A \cup B$ sonludur.

8.) p : “Sonlu tane sonlu kümenin kartezyen çarpımı sayılabilir”, q : “İki sonsuz kümenin kesişimi sonlu olabilir” önermeleri için:

☒ p, q : Doğru ☐ p : Doğru, q : Yanlış ☐ p, q : Yanlış ☐ p : Yanlış, q : Doğru ☐ Hiçbiri

9.) Sayılabilir sonsuz miktardaki (boş olmayan) sonlu ve ayrık kümelerin birleşimi dur.

☐ sonlu ☒ sayılabilir sonsuz ☐ sayılamaz sonsuz ☐ sayılabilir sonlu ☐ Hiçbiri

- 10.) $A \subsetneq B$ ve A kümesi sayılabilir ise B kümesi için aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?
☐ sonludur ☐ sayılabilirdir ☐ sonsuzdur ☐ sayılamazdır ☒ Hiçbiri
- 11.) p : “Hem sonsuz ve hem sayılamayan küme yoktur”, q : “Bir sonlu küme ile sayılabilir kümenin birleşimi sonlu olamaz.” önermeleri için:
☐ p, q : Doğru ☒ p, q : Yanlış ☐ p : Doğru, q : Yanlış ☐ p : Yanlış, q : Doğru ☐ Hiçbiri
- 12.) Aşağıdaki küme çiftlerinden hangisi birbiriyle eş güçlüdür?
☐ $\mathbb{N}$ ile $[0, 1]$ ☐ $\mathbb{Q}$ ile irrasyonel sayılar ☒ $\mathbb{Z}^-$ ile $\mathbb{Q}^+$ ☐ $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{R}$ ☐ Hiçbiri
- 13.) Aşağıdaki kümelerden hangisi $\mathbb{R}$ ile eşgüçlü olamaz?
☐ $[-1, 1]$ ☐ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ☒ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ☐ $[0, \infty)$ ☐ Hiçbiri
- 14.) A ve B sayılabilir iki ayrık küme ise $A \cup B$ için aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?
☐ sonludur ☐ sayılabilir sonsuzdur ☐ sonsuzdur ☒ sayılabilirdir ☐ Hiçbiri
- 15.) p : “Sonlu ve sayılamayan bir küme yoktur”, q : “Sayılabilir miktardaki boş olmayan sonlu kümelerin birleşimi sonlu olmalıdır” önermeleri için:
☐ p, q : Doğru ☐ p, q : Yanlış ☒ p : Doğru, q : Yanlış ☐ p : Yanlış, q : Doğru ☐ Hiçbiri
- 16.) p : “Sonlu olmayan her küme sayılamayan bir kümedir”, q : “Sayılabilen ve sonlu olmayan kümeler vardır” önermeleri için:
☒ p : Yanlış, q : Doğru ☐ p, q : Doğru ☐ p, q : Yanlış ☐ p : Doğru, q : Yanlış ☐ Hiçbiri

Bölüm 10

Doğal Sayıların İnşası

Tanım 10.1 Sonlu kümeler üzerinde tanımlanan eş güçlü olma bağıntısına göre bir X kümesinin denklik sınıfını $\overline{X}$ ile gösterelim. Boş kümenin denklik sınıfını 0 ile gösterelim. O halde $\overline{\emptyset} = 0$ yazabiliriz. Daha sonra $\overline{\{0\}} = 1$ diyelim. Bu şekilde devam edelim:

$$\begin{aligned}\overline{\{0, 1\}} &= 2 \\ \overline{\{0, 1, 2\}} &= 3 \\ \overline{\{0, 1, 2, 3\}} &= 4 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Bu şekilde elde edilen denklik sınıflarının herbirine bir **doğal sayı** denir. Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ile gösterilir. Doğal sayıların yukardaki gibi seçilen temsilcilerine de **kanonik temsilci** denir.

Doğal Sayılarda Toplama ve Çarpma

Tanım 10.2 $x, y \in \mathbb{N}$ ve $x = \overline{A}, y = \overline{B}$ ayrıca $A \cap B = \emptyset$ olsun.

$$\boxed{x + y = \overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cup B}}$$

şeklinde tanımlanan işleme x ile y nin **toplamı** denir.

Örnek 10.3 $2+3=5$ olduğunu gösterelim. $A = \{a, b\}, B = \{1, 2, 3\}$ alalım. $2 = \overline{A}, 3 = \overline{B}$ diyebiliriz. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan:

$$2 + 3 = \overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cup B} = \overline{\{a, b, 1, 2, 3\}} = 5.$$

Toplama İşleminin Özellikleri:

1.) $\mathbb{N}, +$ işlemine göre kapalıdır.

2.) $\mathbb{N}$, $+$ işlemine göre birleşmeli ve değişmelidir. (Alıştırma(1) ve Alıştırma(2))

3.) Etkisiz eleman $0 = \bar{\emptyset}$ dır; çünkü her $x = \bar{A} \in \mathbb{N}$ için

$$0 + x = x + 0 = \bar{A} + \bar{\emptyset} = \overline{A \cup \emptyset} = \bar{A} = x.$$

4.) Sadece 0'in tersi vardır.

Teorem 10.4 Her $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ için

$$x = y \text{ ve } z = t \implies x + z = y + t.$$

İspat: $x = \bar{A}, y = \bar{B}, z = \bar{C}, t = \bar{D}$ diyelim. Ayrıca $A \cap C = \emptyset, B \cap D = \emptyset$ olduğunu kabul edelim.

$$x = y \implies f : A \longrightarrow B, \text{ 1-1 ve örten fonksiyonu vardır,}$$

$$z = t \implies g : C \longrightarrow D, \text{ 1-1 ve örten fonksiyonu vardır.}$$

Şimdi $h : A \cup C \longrightarrow B \cup D$ fonksiyonunu

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \text{ ise;} \\ g(x), & x \in C \text{ ise.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. h 'nin 1-1 olduğunu gösterelim. $x, y \in A \cup C$ için $h(x) = h(y)$ olsun.

Durum 1. $x, y \in A$: $f(x) = f(y)$ olup f 1-1 olduğundan $x = y$.

Durum 2. $x, y \in C$: $g(x) = g(y)$ olup g 1-1 olduğundan $x = y$.

Durum 3. $x \in A, y \in C$: $f(x) = g(y)$ olup $f(x) \in B$ ve $g(y) \in D$ dir. $B \cap D = \emptyset$ olduğundan böyle bir durum olamaz.

Durum 4. $x \in C, y \in A$: $g(x) = f(y)$ olup $g(x) \in D$ ve $f(y) \in B$ dir. $B \cap D = \emptyset$ olduğundan böyle bir durum olamaz.

Sonuç olarak h 1-1 dir. Şimdi de h nin örten olduğunu gösterelim. $y \in B \cup D$ verilsin.

$$y \in B \implies f \text{ örten olduğundan, } \exists x_0 \in A, f(x_0) = y \text{ olup } h(x_0) = f(x_0) = y$$

$$y \in D \implies g \text{ örten olduğundan, } \exists x_1 \in C, g(x_1) = y \text{ olup } h(x_1) = g(x_1) = y$$

olup her iki halde de h örtendir.

Sonuç olarak h 1-1 ve örten olup $A \cup C$ ile $B \cup D$ eşgüçlüdür. O halde, $A \cap C = B \cap D = \emptyset$ olduğundan;

$$x + z = \bar{A} + \bar{C} = \overline{A \cup C} = \overline{B \cup D} = \bar{B} + \bar{D} = y + t.$$

Teorem 10.5 Her $x, y \in \mathbb{N}$ için

$$x + y = 0 \implies x = 0 \text{ ve } y = 0$$

İspat: $x = \overline{A}, y = \overline{B}$ ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. $0 = \overline{\emptyset}$ olduğunu hatırlarsak:

$$\begin{aligned}
 x + y = 0 &\implies \overline{A} + \overline{B} = \overline{\emptyset} \\
 &\implies \overline{A \cup B} = \overline{\emptyset} \\
 &\implies A \cup B \text{ ile } \emptyset \text{ eşgüçlü} \\
 &\implies A \cup B = \emptyset \quad (\text{Çünkü } \emptyset \text{ sadece kendisiyle eşgüçlü}) \\
 &\implies A = B = \emptyset \\
 &\implies x = y = \overline{\emptyset} = 0
 \end{aligned}$$

Örnek 10.6 $x + 3 = 0$ önermesinin $\mathbb{N}$ deki çözümü yoktur, çünkü

$$x + 3 = 0 \implies x = 0 \text{ ve } 3 = 0$$

olup $3 = 0$ önermesi her zaman yanlıştır.

Tanım 10.7 $x, y \in \mathbb{N}$ ve $x = \overline{A}$ ve $y = \overline{B}$ olsun.

$$x \cdot y = \overline{A \cdot B} = \overline{A \times B}$$

şeklinde tanımlanan işleme x ile y nin **çarpımı** denir.

Örnek 10.8 $2 \cdot 3 = 6$ olduğunu gösterelim. $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ alalım. $2 = \overline{A}$, $3 = \overline{B}$ diyebiliriz. Şimdi

$$2 \cdot 3 = \overline{A \cdot B} = \overline{A \times B} = \overline{\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}} = 6.$$

Çarpma İşleminin Özellikleri:

- 1.) $\mathbb{N}$, çarpma işlemine göre kapalıdır.
- 2.) $\mathbb{N}$, çarpma işlemine göre birleşmeli ve değişmelidir. (Alıştırma(3) ve Alıştırma(4))
- 3.) Etkisiz eleman $1 = \overline{\{a\}}$ dır; çünkü her $x = \overline{A} \in \mathbb{N}$ için

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = \overline{A \cdot \{a\}} = \overline{A \times \{a\}} = \overline{A} = x.$$

Burada $f : A \longrightarrow A \times \{a\}$, her $y \in A$ için $f(y) = (y, a)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun 1-1 ve örten olduğu gösterilebilir.

- 4.) Sadece 1'in tersi vardır.

Teorem 10.9 Her $x \in \mathbb{N}$ için

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$$

İspat: $x = \overline{A}$ alalım.

$$x \cdot 0 = \overline{A \cdot \emptyset} = \overline{A \times \emptyset} = \overline{\emptyset} = 0$$

olur. Benzer şekilde $0 \cdot x = 0$ bulunur.

Teorem 10.10 Her $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ için

$$x = y \text{ ve } z = t \implies xz = yt.$$

İspat: $x = \overline{A}, y = \overline{B}, z = \overline{C}, t = \overline{D}$ diyelim.

$x = y \implies f : A \longrightarrow B$, 1-1 ve örten fonksiyonu vardır,

$z = t \implies g : C \longrightarrow D$, 1-1 ve örten fonksiyonu vardır.

Şimdi $h : A \times C \longrightarrow B \times D$ fonksiyonunu

$$h(a, c) = (f(a), g(c))$$

şeklinde tanımlayalım. h 'nin 1-1 olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} h(a_1, c_1) = h(a_2, c_2) &\implies (f(a_1), g(c_1)) = (f(a_2), g(c_2)) \\ &\implies f(a_1) = f(a_2) \text{ ve } g(c_1) = g(c_2) \\ &\implies f \text{ 1-1 olduğundan } a_1 = a_2 \text{ ve } g \text{ 1-1 olduğundan } c_1 = c_2 \\ &\implies (a_1, c_1) = (a_2, c_2) \end{aligned}$$

olup h 1-1 dir. Şimdi de h nin örten olduğunu gösterelim. $y = (b, d) \in B \times D$ verilsin.

$b \in B$ ve f örten olduğundan $\exists a \in A, f(a) = b$

$d \in D$ ve g örten olduğundan $\exists c \in C, g(c) = d$.

Şimdi de $x = (a, c)$ seçilirse $h(x) = y$ olup h nin örten olduğu görülür.

Sonuç olarak h 1-1 ve örten olup $A \times C$ ile $B \times D$ eşgüçlüdür. O halde,

$$xz = \overline{A} \cdot \overline{C} = \overline{A \times C} = \overline{B \times D} = \overline{B} \cdot \overline{D} = yt.$$

Sonuç 10.11 Her $x, y \in \mathbb{N}$ ve $z \neq 0$ için

$$x = y \iff xz = yz.$$

Teorem 10.12 Her $x, y \in \mathbb{N}$ için

$$xy = 0 \implies x = 0 \text{ veya } y = 0.$$

İspat: $x = \overline{A}, y = \overline{B}$ diyelim.

$$\begin{aligned} xy = 0 &\implies \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{\emptyset} \\ &\implies \overline{A \times B} = \overline{\emptyset} \\ &\implies A \times B \text{ ile } \emptyset \text{ eşgüçlü} \\ &\implies A \times B = \emptyset \quad (\text{Çünkü } \emptyset \text{ sadece kendisiyle eşgüçlü}) \\ &\implies A = \emptyset \text{ veya } B = \emptyset \\ &\implies x = \overline{A} = \overline{\emptyset} = 0 \text{ veya } y = \overline{B} = \overline{\emptyset} = 0 \end{aligned}$$

Doğal Sayılarda Sıralama

Tanım 10.13 $x, y \in \mathbb{N}$ iki tane doğal sayı olsun. x 'in kanonik temsilcisi A ve y nin kanonik temsilcisi B olsun. Yani $x = \overline{A}, y = \overline{B}$. Buradan $x = y \iff A = B$ olduğu açıktır. Şimdi $x < y$ olmasını $A \subsetneq B$ şeklinde tanımlayalım. Ayrıca “ $x < y$ veya $x = y$ ” yerine kısaca $x \leq y$ yazdığımızda

$$x \leq y \iff A \subseteq B$$

tanımını veririz. Bu şekilde tanımlanan $\leq$ bağıntısının bir sıralama bağıntısı olduğu kolayca görülür. Ancak $x \leq y$ tanımı aşağıdaki gibi de verilir ve bu tanım daha sık kullanılır:

$$x < y \iff x + k = y \text{ olacak şekilde en az bir } 1 \leq k \in \mathbb{N} \text{ var.}$$

Teorem 10.14 Her $x, y \in \mathbb{N}$ için $x < y, x = y$ ve $y < x$ önermelerinden sadece biri doğrudur. Doğal sayılar kümesinin en küçük elemanı sıfırdır.

Teorem 10.15 Doğal sayılar kümesinde tanımlanan $\leq$ bağıntısı bir tam sıralama bağıntısıdır.

Teorem 10.16 Her $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ için

- (a) $x < y \implies x + z < y + z$ (b) $x < y, z < w \implies x + z < y + w$
- (c) $x < y \implies x + 1 \leq y$ (d) $x < y, z \neq 0 \implies xz < yz$
- (e) $x < y, z < w \implies xz < yw$

İspat (a):

$$\begin{aligned} x < y &\implies \exists k \in \mathbb{N}^+, x + k = y \\ &\implies x + k + z = y + z \\ &\implies (x + z) + k = y + z \\ &\implies x + z < y + z \end{aligned}$$

İspat (b):

$$\begin{aligned} x < y, z < w &\implies \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}^+, x + k_1 = y \text{ ve } z + k_2 = w \\ &\implies (x + k_1) + (z + k_2) = y + w \\ &\implies (x + z) + (k_1 + k_2) = y + w \\ &\implies x + z < y + w, \text{ çünkü } k_1 + k_2 \geq 1 \end{aligned}$$

İspat (c): $x < y \implies x + k = y$ olacak şekilde $1 \leq k \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $k = 1$ ise $x + 1 = y$ dir. Aksi halde $k \geq 2$ olup $(x + 1) + k_1 = y$ olup burada $k_1 \geq 1$ dir; yani $x + 1 < y$ olur. Sonuç olarak $x + 1 \leq y$ olur.

İspat (d): $z \neq 0$ olsun. Çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği olduğunu göstermek kolaydır (Ağıştırma (5)). O halde:

$$\begin{aligned}
 x < y &\implies \exists k \in \mathbb{N}^+, x + k = y \\
 &\implies (x + k)z = yz \\
 &\implies xz + kz = yz \\
 &\implies xz < yz, \text{ çünkü } kz \geq 1
 \end{aligned}$$

İspat (e):

$$\begin{aligned}
 x < y, z < w &\implies \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}^+, x + k_1 = y \text{ ve } z + k_2 = w \\
 &\implies (x + k_1)(z + k_2) = yw \\
 &\implies xz + \underbrace{xk_2}_{\geq 0} + \underbrace{k_1z}_{\geq 0} + \underbrace{k_1k_2}_{\geq 1} = yw \\
 &\implies xz < yw, \text{ çünkü } (xk_2 + k_1z + k_1k_2) \geq 1
 \end{aligned}$$

İki Doğal Sayının Farkı ve Bölümü

Tanım 10.17 $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a + x = b$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{N}$ varsa bu sayıya b ile a 'nın farkı denir ve $x = b - a$ yazılır. Bu durumda $a, b \in \mathbb{N}$ için

$$a \leq b \iff b - a \in \mathbb{N}$$

olduğu açıktır.

Tanım 10.18 $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a \cdot x = b$ olacak şekilde en az bir $x \in \mathbb{N}$ varsa a, b 'yi böler denir ve $a|b$ yazılır. Bu durumda x doğal sayısına b ile a 'nın bölümü denir ve $x = b \div a$ yazılır.

$$a|b \iff b \div a \in \mathbb{N}.$$

Örnek 10.19 $x, y, z \in \mathbb{N}$ olsun. $(z + x) - (y + x) \in \mathbb{N}$ veya $z - y \in \mathbb{N}$ ise $(z + x) - (y + x) = z - y$ olduğunu gösterelim.

Durum 1. $(z + x) - (y + x) = n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\begin{aligned}
 (z + x) - (y + x) = n &\implies z + x = (y + x) + n \\
 &\implies z + x = (y + n) + x \\
 &\implies z = y + n \\
 &\implies n = z - y
 \end{aligned}$$

olup eşitlik gösterilir.

Durum 2. $z - y = m \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\begin{aligned} z - y = m &\implies z = y + m \\ &\implies z + x = (y + m) + x \\ &\implies z + x = (y + x) + m \\ &\implies m = (z + x) - (y + x) \end{aligned}$$

olup eşitlik gösterilir.

Örnek 10.20 $x, y, z \in \mathbb{N}$ olsun. $(x - y) - z \in \mathbb{N}$ veya $x - (y + z) \in \mathbb{N}$ ise $(x - y) - z = x - (y + z)$ olduğunu gösterelim.

Durum 1. $(x - y) - z = n \in \mathbb{N}$ ve $x - y = t$ diyelim.

$$\begin{aligned} (x - y) - z = n, \quad x - y = t &\implies x = y + t, \quad t - z = n \\ &\implies x = y + t, \quad t = z + n \\ &\implies x = y + (z + n) = (y + z) + n \\ &\implies n = x - (y + z) \end{aligned}$$

olup eşitlik gösterilir.

Durum 2. $x - (y + z) = m$ diyelim.

$$\begin{aligned} x - (y + z) = m &\implies x = m + (y + z) = y + (z + m) \\ &\implies z + m = x - y \\ &\implies m = (x - y) - z \end{aligned}$$

olup eşitlik gösterilir.

Örnek 10.21 $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ olsun.

$$a|b \text{ ve } c|d \implies (ac)|(bd) \quad \text{olup} \quad (bd) \div (ac) = (b \div a)(d \div c)$$

olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$\begin{aligned} a|b &\implies b = ak_1 \text{ olacak şekilde } k_1 \in \mathbb{N} \text{ var, } k_1 = b \div a, \\ c|d &\implies d = ck_2 \text{ olacak şekilde } k_2 \in \mathbb{N} \text{ var, } k_2 = d \div c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Taraf tarafa çarparsak: } bd &= (ak_1)(ck_2) = (ac)(k_1k_2) \\ &\implies k_1k_2 \in \mathbb{N} \text{ olup } (ac)|(bd). \end{aligned}$$

Ayrıca $(bd) \div (ac) = k_1k_2 = (b \div a)(d \div c)$ elde edilir.

Örnek 10.22 $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki önermeyi ispatlayın:

$$x|y \text{ ve } z|w \implies (y \div x) + (w \div z) = (xw + yz) \div (xz)$$

Çözüm: $x|y \implies y = xk_1$ olacak şekilde bir $k_1 \in \mathbb{N}$ vardır ve burada $k_1 = y \div x$ yazılır. Yine, $z|w \implies w = zk_2$ olacak şekilde bir $k_2 \in \mathbb{N}$ vardır ve burada $k_2 = w \div z$ yazılır. Şimdi

$$xw + yz = x(zk_2) + (xk_1)z = xz(k_1 + k_2)$$

olup $(xz)|(xw + yz)$ olur ve $(xw + yz) \div (xz) = k_1 + k_2$ yazılır. Buradan k_1 ve k_2 yerine yazılırsa:

$$(xw + yz) \div (xz) = (y \div x) + (w \div z)$$

elde edilir.

ALİŞTIRMALAR

1.) Doğal sayılarda tanımlanan toplama işleminin birleşme özelliği olduğunu gösterin.

Çözüm: $x, y, z \in \mathbb{N}$ ve $x = \overline{A}, y = \overline{B}, z = \overline{C}$ olsun. Ayrıca $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$ olsun. Bu durumda $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ ve $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ olduğu açıktır. O halde

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= (\overline{A} + \overline{B}) + \overline{C} = (\overline{A \cup B}) + \overline{C} = \overline{(A \cup B) \cup C} \\ &= \overline{A \cup (B \cup C)} = \overline{A} + \overline{(B \cup C)} = \overline{A} + (\overline{B} + \overline{C}) \\ &= x + (y + z) \end{aligned}$$

olup toplama işleme birleşmelidir.

2.) Doğal sayılarda tanımlanan toplama işleminin değişme özelliği olduğunu gösterin.

Çözüm: $x, y \in \mathbb{N}$ ve $x = \overline{A}, y = \overline{B}$ olsun. Ayrıca $A \cap B = \emptyset$ olsun.

$$x + y = \overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cup B} = \overline{B \cup A} = \overline{B} + \overline{A} = y + x$$

olup toplama işlemi değişmelidir.

3.) Doğal sayılarda tanımlanan çarpma işleminin birleşme özelliği olduğunu gösterin.

Çözüm: $x, y, z \in \mathbb{N}$ ve $x = \overline{A}, y = \overline{B}, z = \overline{C}$ olsun. Şimdi $(A \times B) \times C$ kümesi ile $A \times (B \times C)$ kümesinin eşgüçlü olduğunu gösterelim. Bu amaçla

$$f : (A \times B) \times C \longrightarrow A \times (B \times C), \text{ her } ((a, b), c) \in (A \times B) \times C \text{ için } f((a, b), c) = (a, (b, c))$$

şeklinde bir f fonksiyonu tanımlayalım. Şimdi $X = ((a_1, b_1), c_1)$ ve $Y = ((a_2, b_2), c_2) \in (A \times B) \times C$ alalım.

$$\begin{aligned} f(X) = f(Y) &\implies f((a_1, b_1), c_1) = f((a_2, b_2), c_2) \implies (a_1, (b_1, c_1)) = (a_2, (b_2, c_2)) \\ &\implies a_1 = a_2 \text{ ve } (b_1, c_1) = (b_2, c_2) \implies a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2 \\ &\implies ((a_1, b_1), c_1) = ((a_2, b_2), c_2) \implies X = Y \end{aligned}$$

olup f nin 1-1 olduğu gösterilmiş olur. Şimdi de verilen her $Y = (a_o, (b_o, c_o)) \in A \times (B \times C)$ için $X = ((a_o, b_o), c_o) \in (A \times B) \times C$ seçilirse $f(X) = Y$ olduğu görülür. Yani f örtendir. f hem 1-1 hem örten olduğundan $(A \times B) \times C$ kümesi ile $A \times (B \times C)$ kümesi eşgüçlüdür. O halde

$$\overline{(A \times B) \times C} = \overline{A \times (B \times C)} \implies (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

4.) Doğal sayılarda tanımlanan çarpma işleminin değişme özelliği olduğunu gösterin.

Çözüm: $x, y \in \mathbb{N}$ ve $x = \overline{A}, y = \overline{B}$ olsun. Şimdi $A \times B$ kümesi ile $B \times A$ kümesinin eşgüçlü olduğunu gösterelim. Bu amaçla

$$f : A \times B \longrightarrow B \times A, \text{ her } (a, b) \in A \times B \text{ için } f(a, b) = (b, a)$$

şeklinde bir f fonksiyonu tanımlayalım. Şimdi $X = (a_1, b_1)$ ve $Y = (a_2, b_2) \in (A \times B)$ alalım.

$$\begin{aligned} f(X) = f(Y) &\implies f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2) \implies (b_1, a_1) = (b_2, a_2) \\ &\implies b_1 = b_2 \text{ ve } a_1 = a_2 \implies (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \\ &\implies X = Y \end{aligned}$$

olup f nin 1-1 olduğu gösterilmiş olur. Şimdi de verilen her $Y = (b_o, a_o) \in B \times A$ için $X = (a_o, b_o) \in A \times B$ seçilirse $f(X) = Y$ olduğu görülür. Yani f örtendir. f hem 1-1 hem örten olduğundan $(A \times B)$ kümesi ile $(B \times A)$ kümesi eşgüçlüdür. O halde

$$\overline{A \times B} = \overline{B \times A} \implies x \cdot y = y \cdot x.$$

5.) $\mathbb{N}$ 'de tanımlanan çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliği olduğunu gösterin. Çarpmanın değişme özelliği olduğundan sağdan dağılma özelliğinin olduğunu söyleyebilir miyiz?

Çözüm: $x, y, z \in \mathbb{N}$ ve $x = \overline{A}, y = \overline{B}, z = \overline{C}$ olsun. Ayrıca $B \cap C = \emptyset$ olsun. Bu durumda $A \times B$ ile $A \times C$ de ayrıktır, çünkü:

$$(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C) = A \times \emptyset = \emptyset.$$

Şimdi

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= \overline{A} \cdot (\overline{B} + \overline{C}) = \overline{A} \cdot (\overline{B \cup C}) = \overline{A \times (B \cup C)} = \overline{(A \times B) \cup (A \times C)} \\ &= \overline{A \times B} + \overline{A \times C} = (\overline{A} \cdot \overline{B}) + (\overline{A} \cdot \overline{C}) \\ &= (x \cdot y) + (x \cdot z) \end{aligned}$$

olup soldan dağılma özelliği vardır. Çarpma işleminin değişme özelliği ve toplama üzerine soldan dağılma özelliği varsa, sağdan dağılma özelliği de vardır, çünkü her $x, y, z \in \mathbb{N}$ için:

$$\begin{aligned} (x + y) \cdot z &= z \cdot (x + y) && (\text{çarpmanın değişme özelliği olduğundan}) \\ &= (z \cdot x) + (z \cdot y) && (\text{çarpmanın soldan dağılma özelliği olduğundan}) \\ &= (x \cdot z) + (y \cdot z) && (\text{çarpmanın değişme özelliği olduğundan}) \end{aligned}$$

Sonuç olarak; Alıştırma(4) ile birlikte, çarpma işleminin toplama üzerine (soldan ve sağdan) dağılma özelliği olduğunu söyleyebiliriz.

6.) $a, b, c \in \mathbb{N}$ olsun. $a|b$ ve $a|c$ ise $a|(b + c)$ olduğunu ve $(b + c) \div a = (b \div a) + (c \div a)$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$a|b \implies b = ak_1 \text{ olacak şekilde } k_1 \in \mathbb{N} \text{ var, } k_1 = b \div a,$$

$$a|c \implies c = ak_2 \text{ olacak şekilde } k_2 \in \mathbb{N} \text{ var, } k_2 = c \div a$$

$$\begin{aligned} \text{Taraf tarafa toplarsak: } b + c &= (ak_1) + (ak_2) = a(k_1 + k_2) \\ &\implies k_1 + k_2 \in \mathbb{N} \text{ olup } a|(b + c). \end{aligned}$$

Ayrıca $(b + c) \div a = k_1 + k_2 = (b \div a) + (c \div a)$ elde edilir.

7.) $x, y, z \in \mathbb{N}$ ve $y \neq 0$ olsun. Bu durumda $(yz)|(xy)$ ve $z|x$ ise $(xy) \div (yz) = x \div z$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$(yz)|(xy) \implies xy = (yz)k_1 \text{ olacak şekilde } k_1 \in \mathbb{N} \text{ var, } k_1 = (xy) \div (yz),$$

$$z|x \implies x = zk_2 \text{ olacak şekilde } k_2 \in \mathbb{N} \text{ var, } k_2 = x \div z$$

Şimdi, $y \neq 0$ olduğundan

$$xy = (yz)k_1 \implies xy = (zk_1)y \implies x = zk_1$$

elde edilir. Yani $k_1 = x \div z$ olmalıdır. Buradan $k_1 = k_2$, yani $(xy) \div (yz) = x \div z$ bulunur.

Bölüm 11

Tümevarım İlkesi

Tümevarım İlkesi: $a \in \mathbb{N}$ olmak üzere $N_a = \{x \in \mathbb{N} : x \geq a\}$ kümesi üzerinde bir $P(n)$ açık önermesi tanımlı olsun. Eğer $P(a)$ önermesi doğruysa ve $P(k)$ doğru iken $P(k+1)$ de doğruysa; başka bir deyişle

$$P(k) \implies P(k+1)$$

önermesi doğruysa o zaman her $n \in N_a$ için $P(n)$ doğrudur.

Örnek 11.1 Tümevarım yöntemiyle her $1 \leq n \in \mathbb{N}$ için

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

olduğunu gösterelim. $P(n)$ önermesi “ $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ ” olsun. $n = 1$ için eşitliğin her iki tarafı da 1’e eşit olduğundan $P(1)$ doğrudur. Şimdi de önermenin k için doğru olduğunu kabul edip $k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. $P(k)$ doğru olsun.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k &= \frac{k(k+1)}{2} \implies 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &\implies 1 + 2 + \cdots + (k+1) = (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \\ &\implies 1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

olup $P(k+1)$ de doğrudur. Tümevarımdan dolayı her $1 \leq n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

Örnek 11.2 Her $n \in \mathbb{N}$ için $3 \mid (4^n - 1)$ olduğunu gösterelim. $P(n)$ önermesi $3 \mid (4^n - 1)$ olsun. $n = 0$ için $3 \mid 0$ olup önerme doğrudur. Şimdi

$$\begin{aligned} 3 \mid (4^k - 1) &\implies \exists m \in \mathbb{N}, (4^k - 1) = 3m \\ &\implies 4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1 = 4(3m + 1) - 1 = 12m + 3 = 3(4m + 1) \end{aligned}$$

olup $4m+1$ de bir doğal sayı olduğundan $3 \mid (4^{k+1} - 1)$ dir. Yani $P(k) \implies P(k+1)$ doğrudur. Tümevarımdan, her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

Örnek 11.3 Her $3 \leq n \in \mathbb{N}$ için $n^2 < 3^n$ olduğunu gösterelim. $P(n)$ önermesi $n^2 < 3^n$ olsun. $n = 3$ için $9 < 27$ olup önerme doğrudur. Şimdi $P(n)$ 'in doğru olduğunu kabul edip $P(n+1)$ 'in doğru olduğunu gösterelim. $n^2 < 3^n$ olsun. Eşitsizliğin her iki tarafını 3 ile çarparsak $3n^2 < 3^{n+1}$ elde ederiz. $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ olup $n \geq 3$ için $n^2 + 2n + 1 < 3n^2$ yani $2n^2 - 2n - 1 > 0$ olduğunu göstereceğiz. Şimdi $p(n) = 2n^2 - 2n - 1$ polinomunun kökleri

$$n_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{12}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

olup büyük kök 3 den küçüktür. ($\sqrt{3} \approx 1.7$ alınırsa) Polinom kökleri dışında pozitif olduğundan $n \geq 3$ için $p(n) \geq 0$ dır. Yani $P(n) \implies P(n+1)$ doğrudur. Tümevarımdan, her $3 \leq n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

İyi Sıralılık İlkesi: Doğal sayılar kümesinin boş olmayan her alt kümesinin (bilinen $\leq$ bağıntısına göre) bir en küçük elemanı vardır.

Teorem 11.4 Tümevarım ilkesi ile iyi sıralılık ilkesi birbirine denktir.

İspat: (Tümevarım $\implies$ İyi sıralılık) Tümevarım ilkesinin doğru olduğunu kabul edelim ve $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{N}$ alalım. Yeni bir S kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$S = \{x \in \mathbb{N} : \text{Her } t \in T \text{ için } x \leq t\}.$$

Her $t \in T$ için $0 \leq t$ olacağından (çünkü 0, doğal sayıların en küçük elemanı) $0 \in S$ dir. Eğer S ile T 'nin ortak bir elemanı varsa bu eleman T nin en küçük elemanıdır ve tek türlü belirlidir.

Şimdi $S \cap T = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. $s \in S$ ise ve $t \in T$ herhangi bir eleman ise $s < t$ olmalıdır. O halde $s + 1 \leq t$ dir. Yani $s \in S \implies s + 1 \in S$ olup; $S \cap T = \emptyset$ ise " $P(n) : n \in S$ " önermesi her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olur (tümevarımdan). O halde $S = \mathbb{N}$ olmalıdır. O zaman $T = \emptyset$ olur ve bu da T 'nin boş olmamasıyla çelişir. O halde $S \cap T \neq \emptyset$ olup $\mathbb{N}$ iyi sıralıdır.

İspat: (İyi sıralılık $\implies$ Tümevarım) İyi sıralılık ilkesinin doğru olduğunu kabul edelim. $a \in \mathbb{N}$ olmak üzere $N_a = \{x \in \mathbb{N} : x \geq a\}$ kümesinde tanımlı bir $P(n)$ açık önermesi verilsin. $P(a)$ doğru olsun ve $P(k) \implies P(k+1)$ doğru olsun. $P(n)$ önermelerinin doğru olduğu doğal sayıların kümesine S diyelim.

$$S = \{n \in N_a : P(n) \text{ doğru}\}.$$

$S \subseteq N_a$ olduğu açıktır. Biz $S = N_a$ olduğunu göstereceğiz. $S \neq N_a$ olduğunu kabul edelim. O zaman $N_a \setminus S \neq \emptyset$ olur. O halde, iyi sıralılık ilkesinden, $N_a \setminus S$ 'nin bir en küçük elemanı t vardır. Yani $P(t)$ yanlıştır. $t - 1 \in S$ olup $k = t - 1$ alınırsa $P(k) \implies P(k+1)$ olacağından $P(t)$ doğru olur. Bu bir çelişkidir. O halde $N_a = S$ dir. $\square$

ALİŞTIRMALAR

- 1.) Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\sum_{r=0}^{n-1} x^r = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ olduğunu gösteriniz. ($x \neq 1$ bir reel sayıdır.)
- 2.) Her $n \geq 5$ için $n^2 < 2^n$ olduğunu gösteriniz. ($n \in \mathbb{N}$.)
- 3.) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $6n+1$ biçiminde yazılan bir doğal sayının karesinin 1 eksiğinin 24 ile bölündüğünü gösterin.
- 4.) $\{a_n\}$ dizisinin genel terimi $a_n = 3^{2n+4} - 2^{2n}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $5|a_n$ olduğunu gösteriniz. (İpucu: $a_{n+1} + a_n$ ifadesini kullanın.)
- 5.) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{r=1}^n r(r+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ olduğunu gösteriniz.
- 6.) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ olduğunu gösteriniz.
- 7.) $a > -1$ reel sayısı ve her n pozitif tamsayısı için $(1+a)^n \geq 1+na$ olduğunu gösterin. (Bu eşitsizliğe Bernoulli Eşitsizliği denir.)
- 8.) Tümevarımla n elemanlı bir kümenin 2^n tane alt kümesinin olduğunu gösteriniz.
- 9.) Tümevarımla $3^{6n} \equiv 1 \pmod{7}$ olduğunu gösteriniz.
- 10.) $3^n + 4^n \leq 5^n$ önermesi n 'nin hangi değerleri için doğrudur. İspatlayınız.
- 11.) Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\sum_{r=1}^{2n} (-1)^r r^3 = n^2(4n+3)$ olduğunu gösteriniz.
- 12.) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + n(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$ midir? Neden?
- 13.) $\forall n \geq 0$ doğal sayısı için $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ sayısının 11'e tam bölündüğünü gösterin.
- 14.) Tümevarımla her $n \geq 1$ için $\prod_{r=1}^n \frac{2r-1}{r} = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}$ olduğunu gösteriniz.
- 15.) Tümevarımla her $n \geq 2$ için $\prod_{r=2}^n \frac{r^2}{r^2-1} = \frac{2n}{n+1}$ olduğunu gösteriniz.
- 16.) Her $n \geq 1$ doğal sayısı için $\sum_{k=1}^n (k+1)2^{k-1} = n2^n$ olduğunu gösterin.
- 17.) $n \geq 1$ olmak üzere; $12^n + 10$ sayısının 11'e tam bölündüğünü tümevarımla gösterin.
- 18.) Her $1 \leq n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ olduğunu gösterin.
- 19.) Tümevarımla her $1 \leq n \in \mathbb{N}$ için $6 \mid n(2n+1)(7n+1)$ olduğunu gösterin.
- 20.) Her $3 \leq n \in \mathbb{N}$ için $2^n > 2n+1$ olduğunu tümevarımla gösterin.

BAZI ALIŞTIRMALARIN ÇÖZÜMLERİ

Çözüm (1.) $P(n)$ önermesi $\sum_{r=0}^{n-1} x^r = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ olsun. $n = 1$ için

$$\sum_{r=0}^0 x^r = x^0 = 1 \text{ ve } \frac{x^1 - 1}{x - 1} = 1$$

olup $P(1)$ doğrudur. Şimdi $P(n)$ in doğru olduğunu kabul edelim. Şimdi $n \geq 1$ için

$$\sum_{r=0}^n x^r = \left(\sum_{r=0}^{n-1} x^r \right) + x^n = \frac{x^n - 1}{x - 1} + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

olup $P(n+1)$ doğrudur. Tümevarımdan dolayı her $1 \leq n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

Çözüm (3.) $(6n+1)^2 - 1 = 36n^2 + 12n$ dir. O halde $P(n)$ önermesi $24 \mid (36n^2 + 12n)$ olsun. $n = 0$ için $24 \mid 0$ olup $P(1)$ doğrudur. Şimdi $P(n)$ in doğru olduğunu kabul edelim. O halde

$$36n^2 + 12n = 24 \cdot k$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi

$$36(n+1)^2 + 12(n+1) = 36n^2 + 72n + 36 + 12n + 12 = \underbrace{36n^2 + 12n}_{24k} + 24(3n+2) = 24(k+3n+2)$$

olup $k+3n+2 \in \mathbb{N}$ olduğundan $P(n+1)$ de doğrudur. Tümevarımdan dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

Çözüm (6.) $P(n)$ önermesi $\sum_{r=1}^n \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$ olsun. $n = 0$ için

$$\sum_{r=1}^0 \frac{1}{r(r+1)} = 0 = \frac{0}{0+1}$$

olup $P(0)$ doğrudur. $P(n)$ in doğru olduğunu kabul edelim. Şimdi,

$$\sum_{r=1}^{n+1} \frac{1}{r(r+1)} = \left(\sum_{r=1}^n \frac{1}{r(r+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

olup $P(n+1)$ de doğrudur. Tümevarımdan dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

Çözüm (7.) $P(n)$ önermesi $(1+a)^n \geq 1+na$ olsun. $1+a \geq 1+a$ olup $P(1)$ doğrudur. Şimdi $P(n)$ in doğru olduğunu kabul edelim. Buradan:

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) \\ &\geq (1+na)(1+a) \\ &= 1+(n+1)a+na^2 \\ &\geq 1+(n+1)a \end{aligned} \quad (\text{Çünkü } na^2 \geq 0)$$

olup $P(n+1)$ in doğru olduğu gösterilir. Tümevarımdan dolayı her $n \in \mathbb{N}^+$ için $P(n)$ doğrudur.

Çözüm (8.) E_n, n elemanlı bir kümeyi gösterebiliriz. $P(E_n)$ de E_n in kuvvet kümesi olsun. Bu durumda $Q(n)$ önermesi $|P(E_n)| = 2^n$ olsun. Şimdi $n = 0$ ise $E_0 = \emptyset$ olup boşkümenin kuvvet kümesi $\{\emptyset\}$ dir ve $|P(E_0)| = 1 = 2^0$ olduğundan $Q(0)$ önermesi doğrudur. $Q(n)$ doğru olsun, yani $|P(E_n)| = 2^n$ olsun. Şimdi $a \notin E_n$ olmak üzere $E_{n+1} = E_n \cup \{a\}$ yazalım. Bu durumda

$$P(E_{n+1}) = P(E_n) \cup \{X \cup \{a\} : X \in P(E_n)\}$$

eşitliği vardır. Bu birleşim ayrıktır ve bu iki kümenin eleman sayıları aynıdır; yani 2^n dir. O halde

$$|P(E_{n+1})| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

olup $Q(n+1)$ in doğru olduğu gösterilir. Tümevarımdan dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için $Q(n)$ doğrudur.

Çözüm (10.) $P(n)$ önermesi $3^n + 4^n \leq 5^n$ olsun. $n \geq 2$ için önermenin doğru olduğunu gösterelim. olsun. $n = 2$ için: $3^2 + 4^2 = 25 \leq 5^2$ olup $P(2)$ doğrudur. $P(n)$ doğru olsun; yani $3^n + 4^n \leq 5^n$ olsun. Şimdi $3 \cdot 3^n < 5 \cdot 3^n$ ve $4 \cdot 4^n < 5 \cdot 4^n$ olacağından

$$3^{n+1} + 4^{n+1} = 3 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n < 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 4^n = 5(3^n + 4^n) \leq 5 \cdot 5^n = 5^{n+1}$$

olup $P(n+1)$ in doğru olduğu gösterilmiş olur. Tümevarımdan dolayı her $2 \leq n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

Çözüm (11.) $P(n)$ önermesi $\sum_{r=1}^{2n} (-1)^r r^3 = n^2(4n+3)$ olsun. $n = 1$ için

$$\sum_{r=1}^2 (-1)^r r^3 = -1 + 8 = 7 \quad \text{ve} \quad 1^2(4+3) = 7$$

olup $P(1)$ doğrudur. $P(n)$ doğru olsun. O halde:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{2(n+1)} (-1)^r r^3 &= \left(\sum_{r=1}^{2n} (-1)^r r^3 \right) + (-1)^{2n+1} (2n+1)^3 + (-1)^{2n+2} (2n+2)^3 \\ &= (4n^3 + 3n^2) - (2n+1)^3 + (2n+2)^3 \\ &= (4n^3 + 3n^2) - (8n^3 + 12n^2 + 6n + 1) + (8n^3 + 24n^2 + 24n + 8) \\ &= 4n^3 + 15n^2 + 18n + 7 \dots \dots \dots (I)\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi de $n^2(4n+3)$ ifadesinde n yerine $n+1$ yazılırsa:

$$\begin{aligned}(n+1)^2(4n+7) &= (n^2 + 2n + 1)(4n+7) \\ &= 4n^3 + 15n^2 + 18n + 7 \dots \dots \dots (II)\end{aligned}$$

olup (I)=(II) olduğundan $P(n+1)$ doğrudur. Tümevarımdan dolayı her $n \in \mathbb{N}^+$ için $P(n)$ doğrudur.

Çözüm (14.) $P(n)$ önermesi $\prod_{r=1}^n \frac{2r-1}{r} = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}$ olsun. $n=1$ için

$$\prod_{r=1}^1 \frac{2r-1}{r} = \frac{1}{1} = 1 = \frac{1}{2} \binom{2}{1}$$

olup $P(1)$ doğrudur. Şimdi $P(n)$ doğru olsun.

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{n+1} \frac{2r-1}{r} &= \left(\prod_{r=1}^n \frac{2r-1}{r} \right) \cdot \frac{2(n+1)-1}{n+1} = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \frac{2n+1}{n+1} \\ &= \frac{(2n)!(2n+1)}{2^n n! n! (n+1)} \dots \dots \dots (I)\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi de önermedeki eşitliğin sağ tarafındaki ifadede n yerine $n+1$ yazılırsa:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{2^{n+1} (n+1)! (n+1)!} \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1)(2n)!}{2 \cdot 2^n (n+1)(n+1)n! n!} \\ &= \frac{(2n+1)(2n)!}{2^n (n+1)n! n!} \dots \dots \dots (II)\end{aligned}$$

olup (I)=(II) olduğu görülür. Yani $P(n+1)$ doğrudur. Tümevarımdan dolayı her $n \in \mathbb{N}^+$ için $P(n)$ doğrudur.

Bölüm 12

Tamsayılar

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinde her $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$$

şeklinde tanımlanan $\sim$ bağıntısını ele alalım. Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. O halde bu bağıntı $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesini denklik sınıflarına ayırır. (a, b) elemanının denklik sınıfını $\overline{(a, b)}$ ile gösterelim. Bir kaç örnek verelim:

$$\begin{aligned}\overline{(3, 1)} &= \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (x, y) \mid (3, 1) \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + 1 = y + 3 \} \\ &= \{ (2, 0), (3, 1), (4, 2), \dots \} . \\ \overline{(0, 4)} &= \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (x, y) \mid (0, 4) \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + 4 = y \} \\ &= \{ (0, 4), (1, 5), (2, 6), \dots \} .\end{aligned}$$

Tanım 12.1 $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olmak üzere (a, b) 'nin $\sim$ bağıntısına göre olan $\overline{(a, b)}$ denklik sınıfına bir *tamsayı* denir. Bu durumda, mesela, $\overline{(1, 0)}, \overline{(3, 9)}$ birer tamsayıdır. Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ ile gösterilir.

Tamsayılarda Toplama ve Çarpma

Tanım 12.2 $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $x = \overline{(a, b)}, y = \overline{(c, d)}$ olsun. Bu durumda

$$x + y = \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)}$$

şeklinde tanımlanan işleme *iki tamsayının toplamı* denir. Ayrıca

$$x \cdot y = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$$

şeklinde tanımlanan işleme *iki tamsayının çarpımı* denir.

Toplama İşleminin Özellikleri:

1.) $\mathbb{Z}$, $+$ işlemine göre kapalıdır, çünkü $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ise $a + c, b + d \in \mathbb{N}$ dir.

2.) $\mathbb{Z}$, $+$ işlemine göre birleşmeli ve değişmelidir. Çünkü, $x = \overline{(a, b)}, y = \overline{(c, d)}$ ise

$$x + y = \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)} = \overline{(c + a, d + b)} = \overline{(c, d)} + \overline{(a, b)} = y + x.$$

Ayrıca $z = \overline{(e, f)} \in \mathbb{Z}$ ise

$$(x + y) + z = \overline{((a + c) + e, (b + d) + f)} = \overline{(a + (c + e), (b + (d + f)))} = x + (y + z).$$

3.) $\mathbb{Z}$ 'de $+$ işleminin birim elemanı her $y \in \mathbb{N}$ için $\overline{(y, y)}$ dir. Çünkü her $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$ için

$$\overline{(a, b)} + \overline{(y, y)} = \overline{(a + y, b + y)} = \overline{(a, b)}$$

olur çünkü $(a + y) + b = (b + y) + a$ dır. Toplamanın birim elemanı 0 ile gösterilir ve $\overline{(0, 0)}$ alınabileceği gibi $\overline{(1, 1)}, \overline{(2, 2)}, \dots$ alınabilir.

4.) Her $x = \overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$ tamsayısının $+$ işlemine göre tersi $\overline{(b, a)}$ dır, çünkü

$$\overline{(a, b)} + \overline{(b, a)} = \overline{(a + b, b + a)} = \overline{(0, 0)}.$$

Bu eleman $-x$ ile gösterilir.

Çarpma İşleminin Özellikleri:

1.) $\mathbb{Z}$, $\cdot$ işlemine göre kapalıdır, çünkü $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ise $ac + bd, ad + bc \in \mathbb{N}$ dir.

2.) $\mathbb{Z}$, $\cdot$ işlemine göre birleşmeli ve değişmelidir. Çünkü, $x = \overline{(a, b)}, y = \overline{(c, d)}$ ise

$$x \cdot y = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(ca + db, cb + da)} = \overline{(c, d)} \cdot \overline{(a, b)} = y \cdot x.$$

Ayrıca $z = \overline{(e, f)} \in \mathbb{Z}$ ise

$$(xy)z = \overline{(ac + bd, ad + bc)} \cdot \overline{(e, f)} = \overline{(ace + bde + adf + bcf, acf + bdf + ade + bce)} \dots \dots (I)$$

$$x(yz) = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(ce + df, cf + de)} = \overline{(ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bce + bdf)} \dots \dots (II)$$

olup (I)=(II) olduğu görülür.

3.) Birim elemanı bulalım. Her $\overline{(x, y)} \in \mathbb{Z}$ için

$$\overline{(x, y)} \cdot \overline{(a, b)} = \overline{(x, y)}$$

olacak şekilde $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$ arıyoruz.

$$\overline{(x, y)} \cdot \overline{(a, b)} = \overline{(x, y)} \implies \overline{(xa + yb, xb + ya)} = \overline{(x, y)}$$

$$\implies (xa + yb, xb + ya) \sim (x, y)$$

$$\implies (xa + yb) + y = (xb + ya) + x$$

$$\implies xa + y(b + 1) = x(b + 1) + ya$$

Şimdi en son denklemin her x, y için doğru olması için x ve y 'nin katsayıları eşit olmalıdır. O halde $a = b + 1$ dir. Buradan birim eleman

$$\overline{(a, b)} = \overline{(b + 1, b)} = \overline{(1, 0)}$$

bulunur.

4.) Çarpma işleminin toplama üzerine dağılma özelliği vardır. $x = \overline{(a, b)}, y = \overline{(c, d)}, z = \overline{(e, f)}$ alalım.

$$x(y + z) = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c + e, d + f)} = \overline{(ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be)} \quad \dots\dots (I)$$

$$xy + xz = \overline{(ac + bd, ad + bc)} + \overline{(ae + bf, af + be)} = \overline{(ac + bd + ae + bf, ad + bc + af + be)} \quad \dots\dots (II)$$

olup (I)=(II) olduğundan soldan dağılma özelliği gösterilmiş olur. Çarpma işlemi değişmeli olduğundan sağdan dağılma özelliği de vardır.

Teorem 12.3 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$(a) \quad x + z = y + z \iff x = y$$

$$(b) \quad xz = yz, z \neq 0 \iff x = y$$

İspat (a): $x = \overline{(a, b)}, y = \overline{(c, d)}, z = \overline{(e, f)}$ alalım.

$$\begin{aligned} x + z = y + z &\iff \overline{(a, b)} + \overline{(e, f)} = \overline{(c, d)} + \overline{(e, f)} \\ &\iff \overline{(a + e, b + f)} = \overline{(c + e, d + f)} \\ &\iff (a + e, b + f) \sim (c + e, d + f) \\ &\iff (a + e) + (d + f) = (b + f) + (c + e) \\ &\iff a + d = b + c \iff (a, b) \sim (c, d) \\ &\iff \overline{(a, b)} = \overline{(c, d)} \iff x = y \end{aligned}$$

İspat (b): $z \neq 0$ olduğundan $e \neq f$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} xz = yz &\iff \overline{(ae + bf, af + be)} = \overline{(ce + df, cf + de)} \\ &\iff (ae + bf, af + be) \sim (ce + df, cf + de) \\ &\iff ae + bf + cf + de = af + be + ce + df \\ &\iff e(a + d) + f(b + c) = e(b + c) + f(a + d) \\ &\iff a + d = b + c \quad (\text{Çünkü } e \neq f) \\ &\iff (a, b) \sim (c, d) \iff \overline{(a, b)} = \overline{(c, d)} \iff x = y \end{aligned}$$

Teorem 12.4 $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere:

$$(a) \quad \overline{(a, b)} = \overline{(x + k, x)} \iff a = b + k$$

$$(b) \quad \overline{(a, b)} = \overline{(x, x)} \iff a = b$$

$$(c) \quad \overline{(a, b)} = \overline{(x, x + k)} \iff b = a + k$$

Sonuç 12.5 $(a, b) \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$(a) \quad a > b \text{ ise } \overline{(a, b)} = \overline{(a - b, 0)}$$

$$(b) \quad a = b \text{ ise } \overline{(a, b)} = \overline{(0, 0)}$$

$$(c) \quad a < b \text{ ise } \overline{(a, b)} = \overline{(0, b - a)}$$

Tanım 12.6 $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$ olsun.

(a) $a > b$ ise $\overline{(a, b)} = \overline{(a - b, 0)}$ tamsayısına **pozitif tamsayı** denir ve $a - b$ ile gösterilir. Pozitif tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}^+$ ile gösterilir.

(b) $a < b$ ise $\overline{(a, b)} = \overline{(0, b - a)}$ tamsayısına **negatif tamsayı** denir ve $-(b - a)$ ile gösterilir. Negatif tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}^-$ ile gösterilir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi a ve b nin durumuna göre bir tamsayı negatif, pozitif veya sıfırdır; ama bunlardan sadece bir tanesidir. O halde aşağıdaki ayrık birleşimi yazabiliriz:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Tanım 12.7 x, y iki tamsayı ise $x + (-y)$ tamsayısına x ile y nin **farkı** denir ve kısaca $x - y$ ile gösterilir.

Örnek 12.8 $x + 4 = 3$ denkleminin çözümünün $x = -1$ olduğunu gösterelim. $x = \overline{(a, b)}, 3 = \overline{(3, 0)}$ ve $4 = \overline{(4, 0)}$ alalım.

$$\begin{aligned} x + 4 = 3 &\implies \overline{(a, b)} + \overline{(4, 0)} = \overline{(3, 0)} \\ &\implies \overline{(a + 4, b)} = \overline{(3, 0)} \\ &\implies (a + 4, b) \sim (3, 0) \\ &\implies a + 4 = b + 3 \implies (a + 1) + 3 = b + 3 \implies a + 1 = b \\ &\implies x = \overline{(a, b)} = \overline{(a, a + 1)} = \overline{(0, 1)} = -1 \end{aligned}$$

Örnek 12.9 $3x - 11 = 7$ denkleminin çözümünün $x = 6$ olduğunu gösterelim. $x = \overline{(a, b)}, 3 =$

$\overline{(3,0)}, 11 = \overline{(11,0)}$ ve $7 = \overline{(7,0)}$ alalım. O zaman $-11 = \overline{(0,11)}$ olur.

$$\begin{aligned}
3x - 11 = 7 &\implies 3x + (-11) = 7 \\
&\implies \overline{(3,0)} \cdot \overline{(a,b)} + \overline{(0,11)} = \overline{(7,0)} \\
&\implies \overline{(3a,3b)} + \overline{(0,11)} = \overline{(7,0)} \\
&\implies \overline{(3a,3b+11)} = \overline{(7,0)} \\
&\implies (3a,3b+11) \sim (7,0) \\
&\implies 3a = (3b+11) + 7 = 3b+18 \implies 3a = 3(b+6) \implies a = b+6 \\
&\implies x = \overline{(a,b)} = \overline{(b+6,b)} = \overline{(6,0)} = 6
\end{aligned}$$

Tamsayılarda Sıralama

Tanım 12.10 Tamsayılarda *küçük olma* bağıntısını $x = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ ve $y = \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x < y \iff a + d < b + c$$

şeklinde tanımlayalım ve “ $x \leq y \iff x < y$ veya $x = y$ ” şeklinde yazalım. Bu durumda $\leq$ bağıntısının bir tam sıralama bağıntısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $x < y$ yerine bazen $y > x$ yazılır.

Not 12.11 Bir $t = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ alalım.

$$t \text{ pozitif} \iff a > b \iff \overline{(a,b)} > \overline{(0,0)} \iff t > 0$$

Benzer şekilde

$$t \text{ negatif} \iff a < b \iff \overline{(a,b)} < \overline{(0,0)} \iff t < 0$$

Ayrıca

$$t \text{ pozitif} \iff \exists k \in \mathbb{N}^+, t = \overline{(k,0)} \quad \text{ve} \quad t \text{ negatif} \iff \exists k \in \mathbb{N}^+, t = \overline{(0,k)}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 12.12 $x, y, z, w, t \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad x < y &\iff x + z < y + z & \text{(b)} \quad x < y, z < w &\implies x + z < y + w \\
\text{(c)} \quad t > 0 \text{ ise } xt > yt &\iff x > y & \text{(d)} \quad t < 0 \text{ ise } xt > yt &\iff x < y
\end{aligned}$$

İspat: İspat boyunca $x = \overline{(a,b)}, y = \overline{(c,d)}, z = \overline{(e,f)}, w = \overline{(g,h)}$ alalım.

İspat (a)

$$\begin{aligned}
x < y &\iff \overline{(a, b)} < \overline{(c, d)} \iff a + d < b + c \\
&\iff (a + d) + (e + f) < (b + c) + (e + f) \\
&\iff (a + e) + (d + f) < (b + f) + (c + e) \\
&\iff \overline{(a + e, b + f)} < \overline{(c + e, d + f)} \\
&\iff \overline{(a, b)} + \overline{(e, f)} < \overline{(c, d)} + \overline{(e, f)} \\
&\iff x + z < y + z
\end{aligned}$$

İspat (b)

$$\begin{aligned}
x < y, z < w &\implies \overline{(a, b)} < \overline{(c, d)} \quad \text{ve} \quad \overline{(e, f)} < \overline{(g, h)} \\
&\implies a + d < b + c \quad \text{ve} \quad e + h < f + g \\
&\implies (a + d) + (e + h) < (b + c) + (f + g) & \text{(Eşitsizlikler toplandı)} \\
&\implies (a + e) + (d + h) < (b + f) + (c + g) \\
&\implies \overline{(a + e, b + f)} < \overline{(c + g, d + h)} \\
&\implies \overline{(a, b)} + \overline{(e, f)} < \overline{(c, d)} + \overline{(g, h)} \\
&\implies x + z < y + w
\end{aligned}$$

İspat (c) $t > 0$ olduğundan, en az bir $k \in \mathbb{N}^+$ için $t = \overline{(k, 0)}$ dır.

$$\begin{aligned}
yt < xt &\iff \overline{(c, d)} \cdot \overline{(k, 0)} < \overline{(a, b)} \cdot \overline{(k, 0)} \\
&\iff \overline{(ck, dk)} < \overline{(ak, bk)} \\
&\iff ck + bk < dk + ak \iff k(c + b) < k(d + a) \\
&\iff c + b < d + a \quad (\text{Çünkü } k \neq 0) \\
&\iff \overline{(c, d)} < \overline{(a, b)} \iff y < x
\end{aligned}$$

İspat (d) $t < 0$ olduğundan, en az bir $k \in \mathbb{N}^+$ için $t = \overline{(0, k)}$ dır.

$$\begin{aligned}
yt < xt &\iff \overline{(c, d)} \cdot \overline{(0, k)} < \overline{(a, b)} \cdot \overline{(0, k)} \\
&\iff \overline{(dk, ck)} < \overline{(bk, ak)} \\
&\iff dk + ak < ck + bk \iff k(a + d) < k(b + c) \\
&\iff a + d < b + c \quad (\text{Çünkü } k \neq 0) \\
&\iff \overline{(a, b)} < \overline{(c, d)} \iff x < y
\end{aligned}$$

ALİŞTIRMALAR

1.) Aşağıdaki önermelerden hangisi neden doğrudur?

(a) $(0, 0) \in \overline{(0, 0)}$ (b) $(0, 0) \in \overline{(1, 1)}$ (c) $\overline{(0, 0)} = \overline{(1, 1)}$ (d) $\overline{(2, 1)} \in (2, 1)$

Çözüm: (a) $(0, 0) \in \overline{(0, 0)}$, çünkü $0 + 0 = 0 + 0$.

Çözüm: (b) $(0, 0) \in \overline{(1, 1)}$, çünkü $0 + 1 = 1 + 0$.

Çözüm: (c) $\overline{(0, 0)} = \overline{(1, 1)}$, çünkü $0 + 1 = 1 + 0$.

Çözüm: (d) $\overline{(2, 1)} \in (2, 1)$ yanlıştır, çünkü $\overline{(2, 1)}$ denklik sınıfı olup $(2, 1)$ bir elemandır.

2.) $a, b \in \mathbb{N}$ olduğuna göre aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu gösterin.

(a) $(a, a) \sim (b, b)$ (b) $(a + 1, a) \sim (b + 1, b)$ (c) $(a + 1, b + 1) \sim (a, b)$

Çözüm: (a) $a + b = b + a$ olduğundan $(a, b) \sim (a, b)$ dir.

Çözüm: (b) $(a + 1) + b = a + (b + 1)$ olduğundan $(a + 1, a) \sim (b + 1, b)$ dir.

Çözüm: (c) $(a + 1) + b = (b + 1) + a$ olduğundan $(a + 1, b + 1) \sim (a, b)$ dir.

3.) Aşağıdaki tamsayıları en sade şekilde yazın.

(a) $\overline{(a, b)} + \overline{(b, a)}$ (b) $\overline{(a, 0)} + \overline{(b, 0)}$ (c) $\overline{(a, a - 1)} \cdot \overline{(a, a - 2)}$ (d) $\overline{(0, a)} \cdot \overline{(0, a + 1)}$

Çözüm: (a) $\overline{(a, b)} + \overline{(b, a)} = \overline{(a + b, b + a)} = \overline{(0, 0)} = 0$.

Çözüm: (b) $\overline{(a, 0)} + \overline{(b, 0)} = \overline{(a + b, 0)} = a + b$.

Çözüm: (c)

$$\begin{aligned} \overline{(a, a - 1)} \cdot \overline{(a, a - 2)} &= \overline{(a^2 + (a - 1)(a - 2), a(a - 2) + (a - 1)a)} \\ &= \overline{(2a^2 - 3a + 2, 2a^2 - 3a)} \\ &= \overline{(2, 0)} = 2 \end{aligned}$$

Çözüm: (d) $\overline{(0, a)} \cdot \overline{(0, a + 1)} = \overline{(a^2 + a, 0)} = a^2 + a$.

4.) $a, b, x, r \in \mathbb{N}$ olsun. Aşağıdaki eşitlikleri gösterin

(a) $\overline{(a + x, a)} = \overline{(x + 1, 1)}$ (b) $\overline{(a, b)} + \overline{(r, r)} = \overline{(a, b)}$ (c) $\overline{(a, b)} \cdot \overline{(r, r)} = \overline{(r, r)}$

Çözüm: (a) $(a + x) + 1 = a + (x + 1) \implies (a + x, a) \sim (x + 1, 1) \implies \overline{(a + x, a)} = \overline{(x + 1, 1)}$

Çözüm: (b) $\overline{(a, b)} + \overline{(r, r)} = \overline{(a + r, b + r)} = \overline{(a, b)}$, çünkü $(a + r) + b = (b + r) + a$.

Çözüm: (c) $\overline{(a, b)} \cdot \overline{(r, r)} = \overline{(ar + br, ar + br)} = \overline{(r, r)}$, çünkü $(ar + br) + r = (ar + br) + r$.

5.) $\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} = \overline{(c, d)}$ ise $\overline{(x, y)} = \overline{(c + b, d + a)}$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} &= \overline{(c, d)} \implies \overline{(a + x, b + y)} = \overline{(c, d)} \\ &\implies (a + x, b + y) \sim (c, d) \\ &\implies (a + x) + d = (b + y) + c \\ &\implies x + (d + a) = y + (c + b) \\ &\implies (x, y) \sim (c + b, d + a) \\ &\implies \overline{(x, y)} = \overline{(c + b, d + a)}\end{aligned}$$

6.) $(a, b) \sim (s, m)$ ve $(c, d) \sim (t, n)$ ise aşağıdaki denklikleri gösterin

(a) $(a + c, b + d) \sim (s + t, m + n)$ (b) $(ac + bd, ad + bc) \sim (st + mn, sn + mt)$

Çözüm: (a)

$$\begin{aligned}(a, b) \sim (s, m) &\implies a + m = b + s \\ (c, d) \sim (t, n) &\implies c + n = d + t \\ &\implies (a + m) + (c + n) = (b + s) + (d + t) \\ &\implies (a + c) + (m + n) = (b + d) + (s + t) \\ &\implies (a + c, b + d) \sim (s + t, m + n)\end{aligned}$$

Çözüm: (b)

$$\begin{aligned}(a, b) \sim (s, m) &\implies \overline{(a, b)} = \overline{(s, m)} \\ (c, d) \sim (t, n) &\implies \overline{(c, d)} = \overline{(t, n)} \\ &\implies \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(s, m)} \cdot \overline{(t, n)} \\ &\implies \overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(st + mn, sn + mt)} \\ &\implies (ac + bd, ad + bc) \sim (st + mn, sn + mt)\end{aligned}$$

7.) $(-3) + (-2) = -5$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $3 = \overline{(3, 0)}$, $2 = \overline{(2, 0)}$ alalım. O zaman $-3 = \overline{(0, 3)}$, $-2 = \overline{(0, 2)}$ olur.

$$(-3) + (-2) = \overline{(0, 3)} + \overline{(0, 2)} = \overline{(0, 5)} = -5$$

olup sonuç bulunur.

8.) $(-3) \cdot (-2) = 6$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $3 = \overline{(3, 0)}$, $2 = \overline{(2, 0)}$ alalım. O zaman $-3 = \overline{(0, 3)}$, $-2 = \overline{(0, 2)}$ olur.

$$(-3) \cdot (-2) = \overline{(0, 3)} \cdot \overline{(0, 2)} = \overline{(6, 0)} = 6$$

olup sonuç bulunur.

9.) Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $(-x) + (-y) = -(x + y)$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $x = \overline{(a, b)}, y = \overline{(c, d)}$ alalım. O zaman $-x = \overline{(b, a)}, -y = \overline{(d, c)}$ olur.

$$(-x) + (-y) = \overline{(b, a)} + \overline{(d, c)} = \overline{(b + d, a + c)} \quad \dots\dots\dots (I)$$

$$x + y = \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)}$$

$$\implies -(x + y) = \overline{(b + d, a + c)} \quad \dots\dots\dots (II)$$

olup (I)=(II) olduğundan eşitlik doğrudur.

10.) Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $(-x) + y = -(x + (-y))$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $x = \overline{(a, b)}, y = \overline{(c, d)}$ alalım. O zaman $-x = \overline{(b, a)}, -y = \overline{(d, c)}$ olur.

$$(-x) + y = \overline{(b, a)} + \overline{(c, d)} = \overline{(b + c, a + d)} \quad \dots\dots\dots (I)$$

$$x + (-y) = \overline{(a, b)} + \overline{(d, c)} = \overline{(a + d, b + c)}$$

$$\implies -(x + (-y)) = \overline{(b + c, a + d)} \quad \dots\dots\dots (II)$$

olup (I)=(II) olduğundan eşitlik doğrudur.

11.) Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $x - (-y) = x + y$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $x = \overline{(a, b)}, y = \overline{(c, d)}$ alalım. O zaman $-y = \overline{(d, c)}$ olur. Ayrıca $-(-y) = \overline{(c, d)}$ olur.

$$x - (-y) = x + (-(-y)) = \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = x + y$$

elde edilir.

12.) Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $x = \overline{(a, b)}, y = \overline{(c, d)}$ alalım. O zaman $-x = \overline{(b, a)}, -y = \overline{(d, c)}$ olur.

$$(-x)(-y) = \overline{(b, a)} \cdot \overline{(d, c)} = \overline{(bd + ac, bc + ad)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = xy$$

elde edilir.

13.) $-1 < \overline{(s, t)} < 1$ ise $s = t$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $-1 < \overline{(s, t)} < 1$ önermesi “ $-1 < \overline{(s, t)}$ ve $\overline{(s, t)} < 1$ ” anlamındadır. $-1 = \overline{(0, 1)}$ ve $1 = \overline{(1, 0)}$ alalım. Şimdi

$$-1 < \overline{(s, t)} \implies \overline{(0, 1)} < \overline{(s, t)} \implies t < s + 1 \implies t + 1 \leq s + 1$$

$$\overline{(s, t)} < 1 \implies \overline{(s, t)} < \overline{(1, 0)} \implies s < t + 1 \implies s + 1 \leq t + 1$$

olup buradan $t + 1 = s + 1$, yani $s = t$ bulunur.

14.) Aşağıdaki açık önermelerin $\mathbb{Z}$ 'deki çözümlerini teoremleri kullanarak bulun.

(a) $x + 2 < 7$ (b) $x + 2 > x$ (c) $-x - 2 < 4 - 2x$

Çözüm: (a) $x + 2 < 7 \implies x + 2 < 5 + 2 \implies x < 5$ olup çözüm kümesi $\{x \in \mathbb{Z} : x < 5\}$ dir.

Çözüm: (b) $x + 2 > x \implies x + 2 > x + 0 \implies 2 > 0$ olup bu önerme yanlıştır. Çözüm kümesi $\emptyset$ dir.

Çözüm: (c) $-x - 2 < 4 - 2x \implies -x + (-2) + 2 < 4 - 2x + 2 \implies -x < -2x + 6$
 $\implies -x + (2x) < -2x + 6 + 2x \implies x < 6$

olup çözüm kümesi $\{x \in \mathbb{Z} : x < 6\}$ dır.

15.) Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $x \cdot y = 0 \implies x = 0$ veya $y = 0$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $x = \overline{(a, b)}, y = \overline{(c, d)}$ alalım. Şimdi

$$x \cdot y = 0 \implies \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = 0 \implies \overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(0, 0)} \implies (ac + bd, ad + bc) \sim (0, 0)$$

olup buradan $ac + bd = bc + ad$ elde edilir. Şimdi $a \neq b$ ise (yani $x \neq 0$ ise) $ac + bd = bc + ad$ olması için gerek ve yeter şart $c = d$ olmasıdır (yani $x \neq 0 \implies y = 0$ dır). Benzer şekilde $c \neq d$ ise (yani $y \neq 0$ ise) $ac + bd = bc + ad$ olması için gerek ve yeter şart $a = b$ olmasıdır (yani $y \neq 0 \implies x = 0$ dır). Yani $x = 0$ veya $y = 0$ olmalıdır.

MT108 SOYUT MATEMATİK II DERSİ ÖRNEK YARIYIL SONU SINAVI

1.) 5 elemanlı bir kümeden 2 elemanlı bir kümeye kaç tane örten fonksiyon yazılabilir? (**İpucu:** Sabit olmayan fonksiyon örtendir.)

- ☐ 120 ☐ 25 ☐ 32 ☒ 30 ☐ Hiçbiri

2.) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$ ve $A = (0, 2\pi]$ ise $f(A) = ?$

- ☐ $(-1, 1]$ ☐ $[-1, 1)$ ☐ $(-1, 1)$ ☐ $(0, 1]$ ☒ Hiçbiri

3.) Bir A kümesinde $a * b = \frac{(a+1)(b+2)}{2}$ işlemi kapalı ise A aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- ☐ $A = \mathbb{Z}$ ☐ $A = \mathbb{N}$ ☒ $A = \mathbb{Q}^+$ ☐ $A = \mathbb{Q}^-$ ☐ Hiçbiri

4.) Rasyonel sayılarda tanımlanan $a * b = a^2 + b^2 - 1$ işlemi için hangisi doğrudur?

- ☐ Kapalı değil ☒ Birleşme öz. yok ☐ Birim eleman var ☐ Bazı elemanların tersi var ☐ Hiçbiri

5.) Bütün kümeler üzerinde tanımlanan $A * B = \overline{A \cap B}$ işlemi için hangisi doğrudur?

- ☐ Kapalı değil ☐ Birleşme öz. var ☐ Değişme özelliği yok ☐ Birim el. var ☒ Hiçbiri

6.) Aşağıdaki sistemlerden hangisi abelyen gruptur? ($a * b = a + b - 3$, $a \triangle b = 2a + 2b$)

- ☒ $(\mathbb{Z}, *)$ ☐ $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ☐ $(\mathbb{Q}, \triangle)$ ☐ $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, +)$ ☐ Hiçbiri

7.) p :“Abelyen olmayan bir grup aynı zamanda monoiddir” ve q :“Monoid olup yarıgrup olmayan sistemler vardır” önermeleri için:

- ☐ p, q : Yanlış ☐ p, q : Doğru ☐ p : Yanlış, q : Doğru ☒ p : Doğru, q : Yanlış ☐ Hiçbiri

8.) A ’da tanımlı bir $*$ işlemi olsun. $(A, *)$ monoid değil ise aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

- ☐ $(A, *)$ yarıgruptur ☐ Birim el. vardır ☒ $(A, *)$ grup değil ☐ Birleşme öz. vardır ☐ Hiçbiri

9.) p :“Sonsuz her küme sayılamazdır” ve q :“İki sayılabilir kümenin kesişimi sayılabilir” önermeleri için:

- ☒ p : Yanlış, q : Doğru ☐ p, q : Yanlış ☐ p, q : Doğru ☐ p : Doğru, q : Yanlış ☐ Hiçbiri

10.) $A \subsetneq B \subsetneq C$ olsun. A sonlu bir küme ve C sayılabilir sonsuz ise B için hangisi kesinlikle doğrudur?

- ☐ sonludur ☒ sayılabilir ☐ sonsuzdur ☐ sayılabilir sonsuzdur ☐ Hiçbiri

_____ ☒ şeklinde işaretleyiniz. Bu sayfadaki her soru 5 puandır. _____

_____ Dört yanlış bir doğruyu götürür. Diğer sayfaya geçiniz _____

11 (a) Sayılabilir Sonsuz Küme tanımını yazın (5p).

(b) Tümevarımla her $n \in \mathbb{N}$ için $11 \mid (4^{4n+2} - 3^{n+3})$ olduğunu gösterin. (15p)

12.) Her $x, y \in \mathbb{N}$ için $x \cdot y = 0 \implies x = 0$ veya $y = 0$ olduğunu gösterin. (15p)

13.) $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ve $z \neq 0$ olsun. $xz = yz \iff x = y$ önermesini ispatlayın. (15p)

NOT: Süre 80 dakikadır.

BAŞARILAR Yrd.Doç.Dr.Hüseyin BİLGİÇ

CEVAP 11

(a) Tanım: Doğal sayılar kümesi ile eşgüçlü olan kümelere **sayılabilir sonsuz küme** denir.

İspat (b): $P(n)$ önermesi $11 \mid (4^{4n+2} - 3^{n+3})$ olsun. $n = 0$ için $11 \mid (16 - 27)$ yani $11 \mid (-11)$ doğru olup $P(0)$ doğrudur. Şimdi $P(n)$ in doğru olduğunu kabul edelim. O halde $4^{4n+2} - 3^{n+3} = 11 \cdot k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Şimdi

$$4^{4(n+1)+2} - 3^{n+4} = 4^{4n+6} - 3^{n+4} = 256 \cdot 4^{4n+2} - 3 \cdot 3^{n+3} = (253 + 3) \cdot 4^{4n+2} - 3 \cdot 3^{n+3}$$

şeklinde yazılır. $253 = 23 \cdot 11$ olduğundan son ifade:

$$23 \cdot 11 \cdot 4^{4n+2} + \underbrace{3 \cdot 4^{4n+2} - 3 \cdot 3^{n+3}}_{3 \cdot 11 \cdot k} = 11 \underbrace{(23 \cdot 4^{4n+2} + 11 \cdot k)}_{\in \mathbb{N}}$$

olup $23 \cdot 4^{4n+2} + 11 \cdot k \in \mathbb{N}$ olduğundan $P(n+1)$ de doğrudur. Tümevarımdan dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

CEVAP 12

İspat: $x = \overline{A}, y = \overline{B}$ diyelim.

$$\begin{aligned} xy = 0 &\implies \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{\emptyset} \implies \overline{A \times B} = \overline{\emptyset} \implies A \times B \text{ ile } \emptyset \text{ eşgüçlü} \\ &\implies A \times B = \emptyset \text{ (Çünkü } \emptyset \text{ sadece } \emptyset \text{ ile eşgüçlü)} \\ &\implies A = \emptyset \text{ veya } B = \emptyset \implies x = \overline{A} = \overline{\emptyset} = 0 \text{ veya } y = \overline{B} = \overline{\emptyset} = 0 \end{aligned}$$

CEVAP 13

İspat: $x = \overline{(a, b)}, y = \overline{(c, d)}, z = \overline{(e, f)}$ alalım. $z \neq 0$ olduğundan $e \neq f$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} xz = yz &\iff \overline{(ae + bf, af + be)} = \overline{(ce + df, cf + de)} \\ &\iff (ae + bf, af + be) \sim (ce + df, cf + de) \\ &\iff ae + bf + cf + de = af + be + ce + df \\ &\iff e(a + d) + f(b + c) = e(b + c) + f(a + d) \\ &\iff a + d = b + c \quad (\text{Çünkü } e \neq f) \\ &\iff (a, b) \sim (c, d) \\ &\iff \overline{(a, b)} = \overline{(c, d)} \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

Kaynakça

- [1] **Örneklerle Soyut Matematik**, Prof. Dr. Fethi Çallıalp, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2005.
- [2] **Soyut Matematik**, Prof.Dr. Orhan Özer, Prof.Dr. Doğan Çoker, Prof.Dr. Kenan Taş, Bilim Yayıncılık, Ankara, 2009.
- [3] **Soyut Matematik**, Prof.Dr. Ali Dönmez, Seçkin Yayıncılık, Ankara, 2001.
- [4] **Soyut Matematik**, Sait Akkaş, H.Hilmi Hacısalihoğlu, Zühtü Özel, Arif Sabuncuoğlu, Hacısalihoğlu Yayıncılık, Ankara, 2009.
- [5] **Çözümlü Soyut Matematik Problemleri**, Sait Akkaş, H.Hilmi Hacısalihoğlu, Zühtü Özel, Arif Sabuncuoğlu, Hacısalihoğlu Yayıncılık, Ankara, 2000.
- [6] **Soyut Matematik**, Prof.Dr. Orhan Özer, T.C. Anadolu Üniversitesi Yayınları No:1062, <http://www.aof.anadolu.edu.tr/kitap/a0303.html>
- [7] **Soyut Matematik**, Prof.Dr. Timur Karaçay, Türkiye Bilimler Akademisi Ulusal Açıkders Malzemeleri, <http://www.acikders.org.tr/course/view.php?id=20>