

Örnekler

1) $[p \Leftrightarrow q]' \equiv p \Leftrightarrow q'$ olduğunu gösteriniz.

İspat $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (p' \wedge q')$ denkleğini kullanarak

$$\begin{aligned} [p \Leftrightarrow q]' &\equiv [(p \wedge q) \vee (p' \wedge q')] ' \\ &\equiv [\underbrace{(p' \vee q')} \wedge \underbrace{(p \vee q)}] \\ &\equiv [(p \Rightarrow q') \wedge (p' \Rightarrow q)] \\ &\equiv [(p \Rightarrow q') \wedge (q' \Rightarrow p)] \\ &\equiv p \Leftrightarrow q' // \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{veya} \\ [p \Leftrightarrow q]' \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] ' \\ \equiv [(q' \Rightarrow p') \wedge (p' \Rightarrow q')] ' \\ \equiv [q' \Leftrightarrow p'] ' \\ \equiv q' \Leftrightarrow p \\ \equiv p \Leftrightarrow q' // \end{array} \right\}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{Karsıt olarak; } [p \Leftrightarrow q'] &\equiv [(p \Rightarrow q') \wedge (q' \Rightarrow p)] \\ &\equiv [(p' \vee q') \wedge (q \vee p)] \\ &\equiv [(p \wedge q) \vee (q' \wedge p')] ' \\ &\equiv [(p \wedge q) \vee (p' \wedge q')] ' \\ &\equiv [p \Leftrightarrow q] ' // \end{aligned}$$

elde edilir.

2) Örnek: $p \Leftrightarrow q \equiv p' \Leftrightarrow q'$ olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned} p \Leftrightarrow q &\equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \\ \vee \quad p' \Leftrightarrow q' &\equiv [(p' \Rightarrow q') \wedge (q' \Rightarrow p')] \\ &\equiv [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)] \quad \text{yer değiştirme yapılırsa} \\ &\equiv p \Leftrightarrow q \end{aligned}$$

elde edilir.

$$3) [p \Rightarrow (q \wedge r)] \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \quad \text{olduğunu tablo yapmadan gösteriniz.}$$

İspat:

$$\begin{aligned} [p \Rightarrow (q \wedge r)] &\equiv p' \vee (q \wedge r) \\ &\equiv \underbrace{(p' \vee q)} \wedge \underbrace{(p' \vee r)} \\ &\equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] &\equiv [(p' \vee q) \wedge (p' \vee r)] \\ &\equiv [p' \vee (q \wedge r)] \\ &\equiv [p \Rightarrow (q \wedge r)] \end{aligned}$$

elde edilir.

$$4) (p \Rightarrow q)' \equiv ?$$

$$(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)' \equiv \underline{p \wedge q'}$$

$$5) (a < b \Rightarrow a = b) \text{ önermesinin olumsuzu nedir?}$$

$$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q \quad \text{old. göre}$$

$$(a > b \vee a = b)' \equiv a < b \wedge a \neq b$$

$$\equiv a < b \quad \text{bulunur.}$$

$$6) x > y \Rightarrow x = y \quad \text{önermesinin olumsuzunu bulunuz.}$$

$$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q \quad \text{old. göre}$$

$$\equiv (x \leq y \vee x = y)'$$

$$\equiv (x > y \wedge x \neq y)$$

$$\equiv x > y \quad \text{bulunur.}$$

$$7) [p' \Rightarrow (q \Rightarrow r')] \equiv [(q \wedge r) \Rightarrow p] \quad \text{olduğunu gösteriniz.}$$

$$p' \Rightarrow (q' \vee r') \equiv p \vee (q' \vee r') \equiv (q' \vee r') \vee p \equiv (q \wedge r)' \vee p \equiv [(q \wedge r) \Rightarrow p]$$

elde edilir.

ÖRNEKLER

1) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \equiv [p \Rightarrow (q \wedge r)]$ tablo yapmadan gösteriniz.

İspat: $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$
ve $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ } denklikleri yardımıyla

$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \equiv (p' \vee q) \wedge (p' \vee r)$
 $\equiv p' \vee (q \wedge r)$
 $\equiv [p \Rightarrow (q \wedge r)]$ elde edilir.

Kesit olarak;
 $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \equiv [p' \vee (q \wedge r)]$
 $\equiv [(p' \vee q) \wedge (p' \vee r)]$
 $\equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$ elde edilir.

2) $[p' \Rightarrow (q \Rightarrow r')] \equiv [(q \wedge r) \Rightarrow p]$ olduğunu tablo yapmadan gösteriniz.

İspat: $[p' \Rightarrow (q \Rightarrow r')] \equiv [p' \Rightarrow (q' \vee r')]$
 $\equiv p \vee (q' \vee r')$
 $\equiv (q' \vee r') \vee p$
 $\equiv [(q \wedge r) \Rightarrow p]$ bulunur.

veya $[p' \Rightarrow (q \Rightarrow r')] \equiv [p \vee (q \Rightarrow r')]$
 $\equiv p \vee (q' \vee r')$
 $\equiv (q' \vee r') \vee p$
 $\equiv [(q \wedge r) \Rightarrow p]$ bulunur.

Kesit olarak;

$$\begin{aligned} [(q \wedge r) \Rightarrow p] &\equiv [(q \wedge r)' \vee p] \\ &\equiv [(q' \vee r') \vee p] \\ &\equiv [p \vee (q' \vee r')] \equiv p' \Rightarrow (q' \vee r') \\ &\equiv [p' \Rightarrow (q \Rightarrow r')] \end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine; $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} A \setminus (A \cap B) &= \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin (A \cap B)\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in (A \cap B)'\} \\ &= A \cap (A \cap B)' \\ &= A \cap (A' \cup B') \\ &= (\underbrace{A \cap A'}) \cup (A \cap B') \\ &= \emptyset \cup (A \cap B') \\ &= A \cap B' \\ &= A \setminus B // \end{aligned}$$

bulunur.

9) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ olduğunu gösteriniz.

$$A \setminus B = A \cap B' \text{ idi.}$$

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= A \cap (B \cup C)' \\ &= A \cap (B' \cap C') \\ &= (A \cap B') \cap C' \\ &= (A \setminus B) \cap C' \\ &= (A \setminus B) \setminus C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \setminus C &= (A \cap B') \setminus C \\ &= (A \cap B') \cap C' \\ &= A \cap (B' \cap C') \\ &= A \cap (B \cup C)' \\ &= A \setminus (B \cup C) \end{aligned}$$

elde edilir.

23) $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$ olduğunu ispat ediniz.

$$\begin{aligned}
 (A \Delta B) \cup (A \cap B) &= [(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B) \\
 &= [(A \cap B') \cup (B \cap A')] \cup (A \cap B) \\
 &= (A \cap B') \cup [(B \cap A') \cup (A \cap B)] \\
 &= (A \cap B') \cup [(A \cap B) \cup (B \cap A')] \\
 &= [(A \cap B') \cup (A \cap B)] \cup (B \cap A') \\
 &= [A \cap (B' \cup B)] \cup (B \cap A') \\
 &= A \cup (B \cap A') \\
 &= (A \cup B) \cap \underbrace{(A \cup A')}_{\text{E}} \\
 &= A \cup B //
 \end{aligned}$$

24) $[A \cup (B \cap C)]' \equiv (C' \cup B') \cap A'$ olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned}
 [A \cup (B \cap C)]' &\equiv A' \cap (B' \cup C') \\
 &\equiv (B' \cup C') \cap A' \\
 &\equiv (C' \cup B') \cap A' //
 \end{aligned}$$

25)

Bir denklik bağıntısının Tersinin de bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$A \neq \emptyset$ üzerinde β bir denklik bağıntısı
ise β yansyan, simetrik ve geçişkendir.

$$\beta^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in \beta \}$$

bağıntısının bu üç özelliği sağladığını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow (x, x) \in \beta \\ &\Rightarrow (x, x) \in \beta^{-1} \Rightarrow \beta^{-1} \text{ yansyan} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y) \in \beta^{-1} &\Rightarrow (y, x) \in \beta \\ &\Rightarrow (x, y) \in \beta \quad (\beta \text{ simetrik old}) \\ &\Rightarrow (y, x) \in \beta^{-1} \quad \beta^{-1} \text{ tanımından} \\ &\Rightarrow \beta^{-1} \text{ simetrik} \quad \beta^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in \beta \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y) \in \beta^{-1} \text{ ve } (y, z) \in \beta^{-1} &\Rightarrow (y, x) \in \beta \text{ ve } (z, y) \in \beta \\ &\Rightarrow (z, y) \in \beta \text{ ve } (y, x) \in \beta \\ &\Rightarrow (z, x) \in \beta \\ &\Rightarrow (x, z) \in \beta^{-1} \\ &\Rightarrow \beta^{-1} \text{ geçişken} \end{aligned}$$

veya;

$$\beta^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in \beta \} \text{ alırsak}$$

$$\begin{aligned} (x, x) \in \beta^{-1}, (x, x) \in \beta^{-1} &\Rightarrow (x, y) \in \beta \\ &\Rightarrow (y, x) \in \beta \quad \beta \text{ simetrik} \\ &\Rightarrow (y, x) \in \beta^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y, x) \in \beta^{-1} \text{ ve } (x, z) \in \beta^{-1} &\Rightarrow (x, y) \in \beta \text{ ve } (z, x) \in \beta \quad \beta \text{ geçişken} \\ &\Rightarrow (z, x) \in \beta \text{ ve } (x, y) \in \beta \\ &\Rightarrow (z, y) \in \beta \Rightarrow (y, z) \in \beta^{-1} \end{aligned}$$

(24)

(a, b) nin denklik sınıfı $(\overline{a, b})$ olsun.

$$\begin{aligned} (\overline{a, b}) &= \{ (x, y) \mid (x, y) \beta (a, b) \} \\ &= \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ ve } x+b=y+a \} \end{aligned}$$

olur.

Örnek: Sayma sayıları kümesi S ile gösterildiğine göre, $S \times S$

kümesinde

$$(a, b) \beta (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

şeklinde tanımlanan β bağıntısı, bir denklik bağıntısı mıdır?
Denklik bağıntısı ise $(3, 5)$ 'in denklik sınıfını bulunuz.

Çözüm: $S = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$

i) $\forall (x, y), (x, y) \in S \times S \Rightarrow xy = yx$
 $\Rightarrow (x, y) \beta (x, y)$ Tansıyan

ii) $\forall (x, y), (z, t) \in S \times S \Rightarrow (x, y) \beta (z, t)$
 $\Rightarrow xt = yz$
 $\Rightarrow zy = tx$
 $\Rightarrow (z, t) \beta (x, y)$ Simetrik

iii) $\forall (x, y), (z, t), (k, p) \in S \times S$

$$\Rightarrow (x, y) \beta (z, t) \Rightarrow xt = yz$$

$$\Rightarrow (z, t) \beta (k, p) \Rightarrow zp = tk$$

$$\frac{xt}{zp} = \frac{yz}{tk}$$

$$xp = yk$$

$$\Rightarrow (x, y) = (k, p)$$

$$\Rightarrow (x, y) \beta (k, p)$$

Geçerime

$$\begin{aligned} (\overline{3, 5}) &= \{ (x, y) \mid (3, 5) \beta (x, y) \} = \{ 3y = 5x \} \\ &= \{ (3, 5), (6, 10), (9, 15), \dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{I} &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } (x, 1) \in \beta\} \\
 &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } x-1 \in \mathbb{Z}\} \\
 &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } k \in \mathbb{Z}, x-1=k\} \\
 &= \{x=k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Örnek: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\beta = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^* \text{ ve } xy > 0\}$ olduğuna göre β bağıntısının denklik bağıntısı olup olmadığını gösteriniz. Eğer β denklik bağıntısı ise $\frac{1}{2}$ sayısının denklik sınıfını bulunuz.

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R}^*, (x, x) \in \beta$?

$$\begin{aligned}
 \forall x, x \in \mathbb{R}^* &\Rightarrow x \neq 0 \\
 &\Rightarrow x^2 > 0 \\
 &\Rightarrow x \cdot x > 0 \\
 &\Rightarrow (x, x) \in \beta \quad \text{Yansıyan}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \forall x, y \in \mathbb{R}^*, [(x, y) \in \beta] &\Rightarrow xy > 0 \\
 &\Rightarrow yx > 0 \\
 &\Rightarrow (y, x) \in \beta \quad \text{Simetrik}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, [(x, y) \in \beta \wedge (y, z) \in \beta] &\Rightarrow (xy > 0 \wedge yz > 0) \\
 &\Rightarrow (xy)(yz) > 0 \\
 &\Rightarrow x y^2 z > 0 \\
 &\Rightarrow xz > 0 \\
 &\Rightarrow (x, z) \in \beta \quad \text{Geçişken}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \beta$ bir denklik bağıntısıdır.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} &= \left\{ y \mid y \in \mathbb{R}^* \text{ ve } (y, \frac{1}{2}) \in \beta \right\} \\
 &= \left\{ y \mid y \in \mathbb{R}^* \text{ ve } y \cdot \frac{1}{2} > 0 \right\} = \left\{ y \mid y \in \mathbb{R}^* \text{ ve } y > 0 \right\} \\
 &= \mathbb{R}^+
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} a \in \mathbb{R}^* \text{ ve } a > 0 \text{ ise } \bar{a} = \mathbb{R}^+ \\ a \in \mathbb{R}^* \text{ ve } a < 0 \text{ ise } \bar{a} = \mathbb{R}^- \end{array} \right\} \Rightarrow \{\mathbb{R}^-, \mathbb{R}^+\} \text{ bölüm kümesi}$$

$$\mathbb{R}^* / \beta = \{\mathbb{R}^-, \mathbb{R}^+\} \text{ olur.}$$

Cevap1) $S \neq \emptyset$, $S \subseteq \mathbb{Z}$, β bağıntısı $x\beta y \Leftrightarrow x+2y \in 3\mathbb{Z}$

(a) β nin denklik bağıntısı olduğunu gösterelim:

$$a \in S \text{ için } a\beta a \Leftrightarrow a+2a = 3a \in 3\mathbb{Z} \Rightarrow \text{yansıyan}$$

$$a, b \in S \text{ için } a\beta b \Leftrightarrow a+2b \in 3\mathbb{Z} \Rightarrow a+2b = 3k, k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow a = 3k - 2b$$

$$b\beta a \Leftrightarrow b+2a = b+2(3k-2b) \\ = 6k - 4b + b \\ = 6k - 3b \\ = 3(\underbrace{2k-b}_{\in \mathbb{Z}}) = 3t, t \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow b+2a \in 3\mathbb{Z}, \Rightarrow \text{simetrik}$$

$a, b, c \in S$ için

$$a\beta b \Leftrightarrow a+2b \in 3\mathbb{Z} \Rightarrow a+2b = 3k, k \in \mathbb{Z}$$

$$b\beta c \Leftrightarrow b+2c \in 3\mathbb{Z} \Rightarrow b+2c = 3l, l \in \mathbb{Z}$$

$$a+2b+b+2c = 3k+3l$$

$$a+3b+2c = 3(k+l)$$

$$a+2c = 3(\underbrace{k+l-b}_{\in \mathbb{Z}}) = 3t, t \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a+2c \in 3\mathbb{Z}, \Rightarrow \text{Geçişkendir.}$$

$\Rightarrow \beta$, denklik bağıntısıdır.

(b) $S = \{-7, -6, -2, 0, 1, 4, 5, 7\}$, β bağıntısı ile S nin kümesi hangi ayrık denklik sınıflarının birleşimidir. (ayrışmasını bulalım)

$$\bar{0} = \{y \in S \mid (0, y) \in \beta\} = \{y \in S \mid 0+2y \in 3\mathbb{Z}\} \\ = \{-6, -3, 0, 3, 6, \dots\} \cap S = \{-6, 0\}$$

$$\bar{-2} = \bar{1} = \bar{4} = \bar{7} = \{y \in S \mid (1, y) \in \beta\} = \{y \in S \mid 1+2y \in 3\mathbb{Z}\} \\ = \{\dots, -2, -5, 1, 4, 7, \dots\} \cap S = \{-2, 1, 4, 7\}$$

$$\bar{5} = \{y \in S \mid (5, y) \in \beta\} = \{y \in S \mid 5+2y \in 3\mathbb{Z}\} \\ = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, \dots\} \cap S = \{-7, 5\}$$

$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{5}\} = \{\{-6, 0\}, \{-2, 1, 4, 7\}, \{-7, 5\}\}$ şeklinde S nin parçalanması elde edilir.