

Rasyonel Sayıların İnşası

Tanım (Kesir): $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

kümesinin her bir elemanına bir kesir denir.

(a, b) bir kesir ise a 'ya kesirnin payı
 b 'ye " paydası denir.

Tanım (Denk Kesir): (a, b) ve (c, d) iki kesir olsun.
 $ad = bc$ ise (a, b) kesirlerine denk kesirler denir.
 $(a, b) \sim (c, d)$

ile gösterilir.

Örnek: $(2, 3) \sim (4, 6)$ dir. Çünkü $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ dür.

Örnek: $(3, 5) \sim (4, x)$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{Z}$ yoktu.
Çünkü, $3 \cdot x = 5 \cdot 4 = 20$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{Z}$ bulunamaz.

Önerme 1: $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ kesirler kümesinde tanımlanan
 $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: i) $\forall (a, b)$ kesiri için $(a, b) \sim (a, b) \Leftrightarrow ab = ba$
Yansıma özelliği

ii) $\forall (a, b), (c, d)$ kesirleri için $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$
 $\Leftrightarrow da = cb$
 $\Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$

Simetri özelliği

iii) $\forall (a, b), (c, d), (e, f)$ kesirleri için

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

$$(c, d) \sim (e, f) \Leftrightarrow cf = de$$

$$adf = bcf = bde, d \neq 0 \Rightarrow adf = bde$$

$$\Downarrow$$

$$af = be$$

$$\Downarrow$$

$$(a, b) \sim (e, f)$$

Geçişme özelliği

Sonuç: $\sim$ bir denklik bağıntısıdır.

Her küme üzerinde verilen bir denklik bağıntısı o kümenin bir sınıflara ayrılışını verir.

Tanım: (a, b) kesirinin $\sim$ denklik bağıntısına göre belirttiği sınıfı $\overline{(a, b)} = \frac{a}{b}$ ile gösterirsek

$$\overline{(a, b)} = \frac{a}{b} = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0, (x, y) \sim (a, b) \}$$

şeklinde tanımlarız.

Örnek: $(2, 3)$ kesirinin sınıfını bulalım

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0, (x, y) \sim (2, 3) \} \\ &= \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0, 3x = 2y \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \{ \dots, (-2, -3), (2, 3), (4, 6), \dots \} \\ &= \{ (2x, 3x) \mid x \in \mathbb{Z}, x \neq 0 \} \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Yani $\forall 0 \neq x \in \mathbb{Z}$ için $\frac{2}{3} = \frac{2x}{3x}$ dir.

Tanım (Rasyonel Sayı): Tüm kesirler üzerinde tanımlanan $\sim$ denklik bağıntısına göre oluşan her bir denklik sınıfına bir rasyonel sayı denir.

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$$

Eğer $(a, b) = 1$ ise (yani aralarında asal ise)

$\frac{a}{b}$ 'ye indirgenmiş kesir denir.

$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \text{ olsun.} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Önerme: $\mathbb{Q}$ üzerinde tanımlanan toplama ve Çarpma işlemleri iyi-tanımlıdır.

İspat: Toplamanın iyi-tanımlılığı:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{ve} \quad \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \quad \text{ise}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} \quad \text{olması demektir.}$$

$$(a, b) \sim (a', b') \quad \text{ve} \quad (c, d) \sim (c', d')$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$ab' = ba' \quad cd' = dc' \quad \text{eşitliklerini kullanmak}$$

$$\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'} \Leftrightarrow (ad+bc, bd) \sim (a'd'+b'c', b'd')$$

$$\Downarrow$$

$$(ad+bc)b'd' = (a'd'+b'c')bd$$

$$\Downarrow$$

$$ab'dd' = ba'dd' \quad \text{ve} \quad cd'bb' = dc'bb'$$

eşitliği

elde edilir.

Çarpmanın iyi-tanımlılığı:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{ve} \quad \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \quad \text{ise} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$$

olması demektir.

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow ab' = ba' \quad \text{eşitliklerini kullanarak}$$

$$(c, d) \sim (c', d') \Leftrightarrow cd' = dc'$$

$$(ac, bd) \sim (a'c', b'd') \Leftrightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'}$$

$\Downarrow$

$$ac b'd' = a'c' b'd$$

$$\Downarrow$$

$$ab'cd' = ba'dc'$$

eşitliği elde edilmiş olur.

Önerme: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ cebirsel yapısı bir cisimdir.

- İspat:
- $(\mathbb{Q}, +)$ bir değişme grup (Abel grubu)
 - $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ bir değişmeli grup (Abel grup)
 - $\cdot$ (çarpma) işleminin $+$ (toplama) işlemin üzerine dağılma özelliği

Bu üç koşul sağlanmalıdır.

i) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$ kapalılık öz.

$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$ Birleşme öz.

$\frac{a}{b} + \frac{0}{x} = \frac{0}{x} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, $\frac{0}{x}$ Birim eleman ($x \neq 0$)

$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{-a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{0}{b}$, $\frac{0}{b}$, ($b \neq 0$) birim eleman $+$ 'ya göre

$\frac{-a}{b}$ $+$ 'ya göre ters eleman ($b \neq 0$)

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$, değişme öz.

ii) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$ kapalılık öz.

$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$ Birleşme öz.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, $\frac{1}{1}$ birim eleman $\cdot$ 'ya göre

$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{1}$, $\frac{b}{a}$ ters eleman

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$, değişme öz.

iii) $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}\right)$ soldan

ve $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}\right) + \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$ sağdan

dağılma özellikleri sağlanır.

Örnek: $-\frac{2}{3}$ ve $\frac{4}{5}$ kesirlerinin farkını ve bölümünü bulalım:

$$-\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = -\frac{2}{3} + \left(-\frac{4}{5}\right) \\ = \frac{(-2) \cdot 5 + (-4) \cdot 3}{3 \cdot 5} = -\frac{22}{15}$$

$$-\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} \\ = -\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6}$$

Önerme: $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(a) = \frac{a}{1}$ ile tanımlı fonksiyon 1-1 bir homomorfizmadır. (Toplama ve Çarpmaya göre)
Yani $f(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ izomorftur. $\Leftrightarrow \mathbb{Z} \cong \mathbb{Q}$ dir.

İspat: f 1-1 midir?

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $f(a) = f(b)$ ise $\frac{a}{1} = \frac{b}{1} \Rightarrow a = b$ old. 1-1 dir.

f 'in önce toplama göre bir homomorfizma olduğunu gösterelim:

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ mi?}$$

$$f(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = f(a) + f(b) //$$

Şimdi de çarpma göre bir homomorfizma olduğunu gösterelim:

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \text{ mi?}$$

$$f(a \cdot b) = \frac{a \cdot b}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = f(a) \cdot f(b) //$$

O halde $f(\mathbb{Z})$ ile $\mathbb{Z}$ izomorftur.

Yani $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Q}$ dir.

Ayrıca;

Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$ ise $f(a) - f(b) = \frac{a}{1} - \frac{b}{1} = \frac{a-b}{1}$ yani $f(a) > f(b)$ dir.

Tanım (Tam Rasyonel Sayı):

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(a) = \frac{a}{1}$ sayısına tam rasyonel sayı denir. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ kümesi üzerinde Sıralama:

Önerme: $(a, b) \sim (c, d)$ iki denk kesir olsun.

$$i) a=0 \Rightarrow c=0$$

$$ii) ab > 0 \Rightarrow cd > 0$$

$$iii) ab < 0 \Rightarrow cd < 0$$

dir.

İspat: $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$

i) $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ old. $a=0$ ise $b \neq 0$ old. $c=0$ dir.

$$ii) (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

$$\Leftrightarrow (ad)^2 = (ab)(cd)$$

$$ab > 0 \text{ ise } a \neq 0 \text{ ve } d \neq 0 \Rightarrow (ad)^2 > 0 \\ \Rightarrow cd > 0 \text{ dir.}$$

$$iii) ad = bc$$



$$(ad)^2 = (ab)(cd)$$

ancak $ab < 0$ ve $cd < 0$ ise $(ad)^2 > 0$ dir.
($a \neq 0, d \neq 0$)

ohalde $ab < 0$ olması $cd < 0$ olmasını gerektirir.

Tanım ($\mathbb{Q}$ 'nun ayrışımı):

$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı i) $a=0$ ise $\frac{a}{b}=0$ dir.

ii) $ab > 0$ ise $\frac{a}{b} > 0$ dir.

iii) $ab < 0$ ise $\frac{a}{b} < 0$ dir.

O halde $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$ ayrışımını elde ederiz.

Tanım ($\mathbb{Q}$ 'da Sıralama):

α ve β iki rasyonel sayı olsun.

$\alpha + x = \beta$ olacak şekilde bir pozitif x rasyonel sayısı varsa α, β den küçüktür denir. $\alpha < \beta$ yazılır.

Eğer $\alpha < \beta$ ve $\alpha = \beta$ ise $\alpha \leq \beta$ ile gösterilir.

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q}_+ \text{ için } \alpha > 0$$

$$\forall \beta \in \mathbb{Q}_- \text{ için } \beta < 0$$

$$\alpha + x = \beta \Rightarrow x = \beta - \alpha,$$

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0$$

Önerme: $\mathbb{Q}$ üzerinde tanımlanan $\leq$ bağıntısı bir tam sıralama bağıntısıdır.

$\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$ hallerinden biri ve yalnız birini (3 hal kuralı) sağlanacağı aşıktır.

O halde yansıma, ters-simetri ve geçişme özellikleri sağlanır.