

## Bölüm 2

### GRUPLAR

Bu bölümde cebirsel yapıların ilk önemli örneği olan grupları tanımlayacağız ve ilgili örneklerle deaylarını inceleyeceğiz.

#### 2.1 Gruplar

**Tanım (Cebirsel yapı):**  $G$  boş olmayan bir küme ve  $*$ ,  $G$  de bir ikili işlem olsun.  $(G, *)$  ikilisine tek işlemli bir cebirsel yapı denir.

**Tanım (İkili işlem):**  $G \neq \emptyset$  bir küme,  $G \times G \rightarrow G$  bir fonksiyona  $G$  de bir ikili işlem denir.

**Tanım (Grup):**  $(G, *)$  cebirsel yapısı aşağıdaki özelliklere sahipse bu cebirsel yapıya grup denir.

**G1 :**  $*$  işlemi  $G$  de kapalıdır.

$$\forall a, b \in G \text{ için } (a * b) \in G \text{ ise,}$$

**G2 :**  $*$  işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$$\forall a, b, c \in G \text{ için } (a * b) * c = a * (b * c) \text{ ise,}$$

**G3 :**  $G$ ,  $*$  işlemine göre bir  $e$  birim (etkisiz) elemanına sahiptir.

$$\forall a \in G \text{ için } a * e = e * a = a \text{ ise,}$$

**G4 :**  $G$  deki her elemanın  $*$  işlemine göre ters (invers) elemanı mevcuttur.

$$\forall a \in G \text{ için } a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \text{ ise.}$$

**Tanım (Grupoid):**  $G$  kümesi  $\circ$  işlemine göre kapalı ise,  $(G, \circ)$  yapısına grupoid denir.

**Örnek:**  $G = \{1, 2\}$  kümesi üzerinde tanımlanan  $1 \circ 1 = 1, 1 \circ 2 = 2, 2 \circ 1 = 1$  ve  $2 \circ 2 = 2$  olarak tanımlanan  $(G, \circ)$  yapısı bir grupoiddir.

**Tanım (Yarı-grup):** Eğer  $(G, *)$  cebirsel yapısı sadece G1 ve G2 özelliklerini sağlıyorsa bir yarı-grup olarak adlandırılır.

**Tanım (Monoid):** Eğer  $(G, *)$  cebirsel yapısı sadece G1, G2 ve G3 özelliklerini sağlıyorsa bir monoid (birimli yarı-grup) olarak adlandırılır.

**Tanım (Abel grubu):**  $(G, *)$  bir grup ve  $*$  işleminin değişme (komütatif) özelliği de varsa grup, değişmeli grup yada Abel grubu olarak adlandırılır.

**G5:**  $\forall a, b \in G$  için  $a * b = b * a$  dir.

**Örneğin;** i) Kompleks sayılar kümesi  $C$ , toplama işlemine göre değişmeli (Abel) gruptur.

ii)  $Q^* = (Q - \{0\}, .)$  kümesi, çarpma işlemine göre değişmeli gruptur.

iii) Pozitif reel sayılar kümesi  $R^+$ , çarpma işlemine göre değişmeli bir grup olmasına rağmen toplama işlemine göre bir grup değildir. (Çünkü birim eleman mevcut değildir ve her elemanın toplamsal tersi yoktur.)

**Önerme 2.1.1** Bir grupta birim eleman varsa tektir.

**İspat:**  $(G, *)$  bir grup ve  $e$  ve  $e'$  iki birim eleman olsun.  $e$  birim eleman olduğundan,

$$\forall a \in G \text{ için } a * e = e * a = a$$

dır. Burada  $a = e'$  alınırsa,

$$e' * e = e * e' = e'$$

olur. Benzer şekilde  $e'$  birim eleman olduğundan,

$$\forall a \in G \text{ için } a * e' = e' * a = a$$

yazılabilir. Burada  $a = e$  alınırsa,

$$e * e' = e' * e = e$$

elde edilir. Böylece,  $e = e'$  elde edilmiş olur.

**Önerme 2.1.2** Bir grupta ters eleman varsa tektir.

**İspat:**  $(G, *)$  bir grup ve  $a \in G$  nin iki ters elemanı  $a_1$  ve  $a_2$  olsun.

$$a * a_1 = a_1 * a = e \text{ ve } a * a_2 = a_2 * a = e$$

eşitlikleri sağlanır. Burada birleşme özelliğini kullanarak,

$$a_2 * (a * a_1) = a_2 * e$$

$$(a_2 * a) * a_1 = a_2$$

$$e * a_1 = a_2$$

$$a_1 = a_2$$

elde edilir.

**Önerme 2.1.3**  $(G, *)$  bir grup olsun.  $\forall a, b, c \in G$  için

i)  $a * b = a * c \Rightarrow b = c$

ii)  $a * c = b * c \Rightarrow a = b$

özellikleri sağlanıyorsa kısaltma kuralı geçerlidir.

**İspat: i)**  $G$  bir grup olduğundan  $a \in G$  nın ters elemanı  $a^{-1}$  mevcuttur. Soldan  $a^{-1}$  ile işleme konursa,

$$\begin{aligned} a * b = a * c &\Rightarrow a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c) \\ &\Rightarrow (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c \\ &\Rightarrow e * b = b = e * c = c \end{aligned}$$

**ii)**  $G$  bir grup olduğundan  $c \in G$  nın ters elemanı  $c^{-1}$  mevcuttur. Sağdan  $c^{-1}$  ile işleme konursa,

$$\begin{aligned} a * c = b * c &\Rightarrow (a * c) * c^{-1} = (b * c) * c^{-1} \\ &\Rightarrow a * (c * c^{-1}) = b * (c * c^{-1}) \\ &\Rightarrow a * e = a = b * e = b \end{aligned}$$

elde edilir.

**Önerme 2.1.4**  $(G, *)$  bir grup olsun.  $\forall a, b \in G$  için

i)  $a * x = b$  ve

ii)  $y * a = b$

olacak şekilde  $x, y \in G$  mevcuttur ve tektir.

**İspat: i)**  $a \in G$  nın ters elemanı  $a^{-1}$  mevcuttur.  $a * x = b$  eşitliğinin her iki tarafı soldan  $a^{-1}$  ile işleme konursa,

$$\begin{aligned} a^{-1} * (a * x) &= a^{-1} * b \Rightarrow (a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b \\ &\Rightarrow e * x = a^{-1} * b \\ &\Rightarrow x = a^{-1} * b \in G \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi  $a * x = b$  eşitliğini sağlayan  $x \in G$  'in tek olduğunu gösterelim:

Kısaltma kuralı ile,

$$b = a * x_1 = a * x_2 \Rightarrow a^{-1} * a * x_1 = a^{-1} * a * x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{elde edilir.}$$

Benzer şekilde **ii)** ispatlanır.

**Önerme 2.1.5**  $(G, *)$  bir grup olsun.  $\forall a, b \in G$  için

**i)**  $\forall a \in G$  için  $(a^{-1})^{-1} = a$

**ii)**  $\forall a, b \in G$  için  $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$  dir.

**İspat: i)**  $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$  olduğundan  $(a^{-1})^{-1} = a$  dır.

**ii)** 
$$\begin{aligned} (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) &= ((b^{-1} * a^{-1}) * a) * b = (b^{-1} * (a^{-1} * a)) * b \\ &= (b^{-1} * e) * b = b^{-1} * b = e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= a * (b * (b^{-1} * a^{-1})) = a * ((b * b^{-1}) * a^{-1}) \\ &= a * (e * a^{-1}) = a * a^{-1} = e \end{aligned}$$

Sonuç olarak,  $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$  elde edilir.

**Örnek:**  $G$  bir grup ve  $\forall a, b \in G$  için  $(a b)^2 = a^2 b^2$  ise  $G$  grubu değişmelidir.

**Çözüm:**  $(a b)^2 = (a b)(a b) \Rightarrow a^2 b^2 = a b a b$

Son eşitliğin heriki tarafını soldan  $a^{-1}$  ile çarparsak

$$a b^2 = b a b$$

Bu eşitliğin heriki tarafını sağdan  $b^{-1}$  ile çarparsak

$$a b = b a$$

elde edilir. O halde  $G$  değişmelidir.

**Örnek:**  $G = \{e, a, b\}$  üç elemanlı bir grup olsun. Bu grubun değişmeli olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $a b = b a$  olduğunu göstermeliyiz.  $G$  grup olduğundan kapalılık özelliğini sağlaması için üç durum söz konusudur:

$$1. \text{Durum: } a b = e \Rightarrow a = b^{-1} \Rightarrow b^{-1} b = b b^{-1} = e \Rightarrow ab = ba$$

$$2. \text{Durum: } a b = a \Rightarrow b = e \Rightarrow a e = e a = a \Rightarrow ab = ba$$

$$3. \text{Durum: } a b = b \Rightarrow a = e \Rightarrow e b = b e = b \Rightarrow ab = ba$$

elde edilir.

**Örnek:** Bir grubun her elemanının tersi kendisine eşit ise grubun değişmeli olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $G$  bir grup ve  $\forall a, b \in G$  için  $a = a^{-1}$  ve  $b = b^{-1}$  olmak üzere  $(a b)^{-1} = a b$  olduğunu göstermeliyiz.

$$(a b)^{-1} = b^{-1} a^{-1} = b a \Rightarrow a b = (a b)^{-1} = b a$$

Dolayısıyla  $a b = b a$  olup,  $G$  değişmelidir.

**Tanım (Bir elemanın  $n$  kuvveti):**  $(G, \cdot)$  çarpımsal bir grup ve  $a \in G$  olsun.  $\forall n \in \mathbb{Z}$  için bir  $a$  elemanının  $n$  kuvveti

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdots a}_n & n > 0 \text{ ise} \\ e & n = 0 \text{ ise} \\ \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{-n} & n < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

**Önerme 2.1.6**  $(G, \cdot)$  çarpımsal bir grup ve  $a, b \in G$  olsun.  $\forall m, n \in \mathbb{N}$  için

$$i) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n} = a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

$$ii) \quad (a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$$

$$iii) \quad G \text{ değişmeli grup ise } (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \text{ dir.}$$

$$\text{İspat: i)} \quad a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_m \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_n = a^{m+n}$$

$$ii) \quad (a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_n$$

$$= \underbrace{\underbrace{a.a \cdots a}_m \underbrace{a.a \cdots a}_m \cdots \underbrace{a.a \cdots a}_m}_n = a^{mn} \text{ dir.}$$

iii)  $G$  değişmeli grup olsun.

$$\begin{aligned} (a.b)^n &= \underbrace{(a.b)(a.b) \cdots (a.b)}_n = a.(b.a).b.(a.b) \cdots (a.b) \\ &= a.(a.b).(b.a).b \cdots (a.b) = a.a.(b.a).b.(a.b) \cdots (a.b) \\ &= \underbrace{a.a.a \cdots a}_n . \underbrace{b.b.b \cdots b}_n = a^n b^n \end{aligned}$$

dir.

**Tanım (Bir elemanın  $n$  katı) :**  $(G, +)$  toplamsal bir grup ve  $a \in G$  olsun.  $\forall n \in \mathbb{Z}$  için bir  $a$  elemanının  $n$  katı

$$n a = \begin{cases} \underbrace{a + a + \cdots + a}_n & n > 0 \text{ ise} \\ 0 & n = 0 \text{ ise} \\ \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{-n} & n < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca,

$(G, +)$  toplamsal bir grup ve  $a, b \in G$  olsun.  $\forall m, n \in \mathbb{Z}$  için bir  $a$  elemanının  $n$  katı

i)  $m a + n a = (m + n) a$

ii)  $m (n a) = (m n) a$

iii)  $m (a + b) = m a + m b$

özelliklerine sahiptir.

## 2.2 Grup Örnekleri

**Örnek 1**  $G$  bir grup ve  $a, b \in G$  olsun.  $o(a) = 5$  ve  $a * b * a^{-1} = b^2$  ise  $o(b)$  yi bulunuz.

**Çözüm:**  $a * b * a^{-1} = b^2 \Rightarrow a * b^2 * a^{-1} = (a * b * a^{-1})^2 = b^4 = a^2 * b * a^{-2}$

$$a * b^4 * a^{-1} = (a * b * a^{-1})^4 = b^8 = a^3 * b * a^{-3}$$

$$a * b^8 * a^{-1} = (a * b * a^{-1})^8 = b^{16} = a^4 * b * a^{-4}$$

$$a * b^{16} * a^{-1} = (a * b * a^{-1})^{16} = b^{32} = a^5 * b * a^{-5} = b \Rightarrow b^{31} = e$$

bulunur. O halde  $o(b) \mid 31$  olacağından,  $o(b) = 31$  veya  $o(b) = 1$ , ( $b = e$ )

**Örnek 2**  $G$  bir grup ve  $a, b \in G$  olsun. Herhangi bir pozitif  $n$  tamsayısı için  $(a b a^{-1})^n = a b^n a^{-1}$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

$$\begin{aligned} (a b a^{-1})^n &= a \underbrace{b a^{-1} a}_{e} b \underbrace{a^{-1} a}_{e} \dots a b a^{-1} \\ &= a b b b \dots b a^{-1} \\ &= a b^n a^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

**Örnek 3**  $G = \{a \in \mathbb{R} \mid -1 < a < 1\}$  olmak üzere  $*$  işlemi  $\forall a, b \in G$  için  $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$  şeklinde tanımlansın.  $(G, *)$  in değişmeli bir grup olduğunu gösteriniz.

**Çözüm: G1 Kapalılık özelliği:**

$\forall a, b \in G$  için  $a * b = \frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$  ve  $-1 < a, b < 1$  olduğundan,  $-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$  dir. Gerçekten,  $-1 < ab < 1 \Rightarrow 1+ab > 0$  olduğundan,

$$a < 1 \text{ ve } 1-b > 0 \Rightarrow a(1-b) < 1-b \Rightarrow a+b < 1+ab$$

$$-1 < a \text{ ve } 1+b > 0 \Rightarrow -(1+b) < a(1+b) \Rightarrow -(1+ab) < a+b$$

eşitliklerinden istenen elde edilir.

**G2 Birleşme Özelliği:**

$$\forall a, b, c \in G \text{ için } (a * b) * c = \frac{a+b}{1+ab} * c = \frac{\frac{a+b}{1+ab} + c}{1 + \frac{a+b}{1+ab} c} = \frac{a+b+c(1+ab)}{(1+ab) + (a+b)c} = \frac{a+b+c+cab}{1+ab+ac+bc}$$

$$a * (b * c) = a * \frac{b+c}{1+bc} = \frac{a + \frac{b+c}{1+bc}}{1+a + \frac{b+c}{1+bc}} = \frac{a(1+bc) + (b+c)}{(1+bc) + a(b+c)} = \frac{a+abc+b+c}{1+bc+ab+ac}$$

### G3 Birim Eleman:

$$\begin{aligned} \forall a \in G \text{ için } a * e &= \frac{a+e}{1+ae} = a \Leftrightarrow a+e = a(1+ae) = a+a^2e \\ &\Leftrightarrow e = a^2e \Leftrightarrow e(1-a^2) = 0 \end{aligned}$$

olmalıdır.  $1-a^2 \neq 0$  olduğundan,  $e=0$  bulunur. O halde birim eleman  $0 \in G$  dır.

### G4 Ters Eleman (invers eleman):

$$a \in G \text{ olsun. } a \in G \text{ için } a * x = 0 \Leftrightarrow \frac{a+x}{1+ax} = 0 \Leftrightarrow x = -a$$

dır.  $-1 < a < 1$  ve  $-1 < -a < 1$  olur. Yani,  $-a \in G$   $a$  nın ters elemanıdır. O halde  $G$  de her elemanın tersi vardır.

### G5 Komütatiflik (Değişme özelliği):

$$\forall a, b \in G \text{ için } a * b = \frac{a+b}{1+ab} \text{ ve } b * a = \frac{b+a}{1+ba}$$

O halde  $(G, *)$  değişmeli bir gruptur.

**Örnek 4**  $(G_1, *)$  ve  $(G_2, o)$  iki grup olsun.  $\cdot$  işlemi  $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in G_1 \times G_2$  için  $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 * a_2, b_1 o b_2)$  şeklinde tanımlansın.  $G_1 \times G_2$  nin bir grup olduğunu gösteriniz. Bu grup Direkt Çarpım grubu olarak adlandırılır.

### Çözüm: G1 Kapalılık özelliği:

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in G_1 \times G_2 \text{ için } (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 * a_2, b_1 o b_2) \in G_1 \times G_2 \text{ dir.}$$

### G2 Birleşme özelliği:

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in G_1 \times G_2 \text{ için}$$

$$[(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)] \cdot (a_3, b_3) = (a_1 * a_2, b_1 o b_2) \cdot (a_3, b_3) \\ = ((a_1 * a_2) * a_3, (b_1 o b_2) o b_3)$$

ve

$$(a_1, b_1) \cdot [(a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)] = (a_1, b_1) \cdot (a_2 * a_3, b_2 o b_3) \\ = (a_1 * (a_2 * a_3), b_1 o (b_2 o b_3))$$

bulunur.

### G3 Birim eleman:

$e_1$  ve  $e_2$  sırası ile  $(G_1, *)$  ve  $(G_2, o)$  gruplarının birim elemanları olmak üzere

$$\forall (a, b) \in G_1 \times G_2 \text{ için } (a, b) \cdot (e_1, e_2) = (a * e_1, b o e_2)$$

$$(e_1, e_2) \cdot (a, b) = (e_1 * a, e_2 o b)$$

elde edilir.

### G4 Ters eleman:

$\forall (a, b) \in G_1 \times G_2$  için  $a \in G_1$  ve  $b \in G_2$  elemanlarının tersleri  $a^{-1}$  ve  $b^{-1}$  olmak üzere

$$(a, b) \cdot (a^{-1}, b^{-1}) = (a^{-1}, b^{-1}) \cdot (a, b) = (e_1, e_2)$$

eşitliği sağlanır.

O halde  $G_1 \times G_2$  bir gruptur.

**Örnek 5**  $G = \{x \mid x \text{ realsayı, } x \neq 1\}$  ve  $G$  deki ikili işlem  $\forall a, b \in G$  için  $a \circ b = a + b - ab$  şeklinde tanımlansın.  $(G, \circ)$  nin bir grup olduğunu gösteriniz.

### Çözüm: G1 Kapalılık özelliği:

$\forall a, b \in G$  için  $a \circ b$  bir reel sayıdır.  $a \circ b \in G$  için  $a \circ b = a + b - ab \neq 1$  olmalıdır.  $a, b \in G$  olduğundan,  $a \neq 1, b \neq 1$  dir.

$a \circ b = a + b - ab = 1$  olsun.  $a \neq 1$  olduğundan  $a + b(1 - a) = 1 \Rightarrow b = \frac{1-a}{1-a} = 1$  elde edilir.

Bu bir çelişkidir. Çünkü  $b \neq 1$  idi. Sonuç olarak  $G, \circ$  işlemine göre kapalıdır.

### G2 Birleşme özelliği:

$$\begin{aligned}
\forall a, b, c \in G \text{ için } (a \circ b) \circ c &= (a + b - ab) \circ c \\
&= a + b - ab + c - (a + b - ab)c \\
&= a + b - ab + c - ac - bc + abc \\
&= a + b + c - ab - ac - bc + abc
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a \circ (b \circ c) &= a \circ (b + c - bc) = a + b + c - bc - a(b + c - bc) \\
&= a + b + c - bc - ab - ac + abc
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, Sonuç olarak  $G, \circ$  işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

### G3 Birim eleman:

$\forall a \in G$  için  $a \circ e = a$  olacak şekilde bir  $e \in G$  bulunmalıdır.

$$a \circ e = a + e - ae = a \Rightarrow e - ae = 0 \Rightarrow (1 - a)e = 0, \quad a \neq 1 \text{ olduğundan } 1 - a \neq 0$$

olacağından  $e = 0$  bulunur. O halde birim eleman  $0$  dır.

### G4 Ters eleman:

$\forall a \in G$  için  $a \circ x = x \circ a = 0$  olacak şekilde bir  $x \in G$  bulunmalıdır.

$$a \circ x = 0 \Rightarrow a + x - ax = 0 \Rightarrow x(1 - a) = -a \Rightarrow x = \frac{-a}{1 - a} \text{ olup, } a \neq 1 \text{ olduğundan}$$

daima mümkündür.

$$x \circ a = 0 \Rightarrow x + a - xa = 0 \Rightarrow x(1 - a) = -a \Rightarrow x = \frac{-a}{1 - a} \text{ bulunur. O halde ters eleman}$$

$$x = a^{-1} = \frac{-a}{1 - a} \text{ dır.}$$

### G5 Komütatiflik (Değişme özelliği):

$\forall a, b \in G$  için  $a \circ b$  bir reel sayıdır.  $a \circ b = a + b - ab = b \circ a$  olup,  $b \circ a$  da bir reel sayıdır.

O halde  $(G, \circ)$  değişmeli bir gruptur.

**Örnek 6**  $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  ve  $S$  üzerinde  $a * b = a + b + ab$  şeklinde  $*$  işlemi tanımlansın.  $(S, *)$  ın bir grup olduğunu gösteriniz.

### Çözüm: G1 Kapalılık özelliği:

$$a, b \in S \text{ için } a * b = a + b + ab \in S$$

olup, kapalıdır.

**G2 Birleşme özelliği:**

$$\begin{aligned}
a, b, c \in S \text{ için } (a * b) * c &= (a + b + a b) * c \\
&= a + b + ab + c + (a + b + a b) c \\
&= a + b + a b + c + ac + bc + a b c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a * (b * c) &= a * (b + c + bc) = a + b + c + bc + a(b + c + bc) \\
&= a + b + c + bc + a b + ac + a b c
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,  $*$  işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

**G3 Birim eleman:**

$\forall a \in S$  için  $a * e = e * a = a$  olacak şekilde bir  $\exists e \in S$  bulunmalıdır.

$$a * e = a + e + a e = a \Rightarrow e + a e = 0 \Rightarrow (1 + a) e = 0 \Rightarrow e = 0$$

$$e * a = e + a + e a = a \Rightarrow e + e a = 0 \Rightarrow e(1 + a) = 0 \Rightarrow e = 0$$

bulunur. O halde birim eleman  $0$  dır.

**G4 Ters eleman:**

$\forall a \in S$  için  $a * x = x * a = 0$  olacak şekilde bir  $x \in S$  bulunmalıdır.

$$a * x = 0 \Rightarrow a + x + a x = 0 \Rightarrow x(1 + a) = -a \Rightarrow x = \frac{-a}{1 + a}$$

$$x * a = 0 \Rightarrow x + a + x a = 0 \Rightarrow x(1 + a) = -a \Rightarrow x = \frac{-a}{1 + a}$$

bulunur. O halde ters eleman  $x = a^{-1} = \frac{-a}{1 + a}$  dır.

O halde  $(S, *)$  bir gruptur.

## Bölüm 3

### ALT GRUPLAR

Bu bölümde bir  $G$  grubunun alt kümelerinin hangi koşullar altında grup olacağı sorusuna cevap arayacağız.

#### 3.1 Alt Gruplar

**Tanım (Alt Grup):**  $(G, *)$  bir grup ve  $\emptyset \neq H \subset G$ ,  $G$  nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer  $(H, *)$ ,  $G$  deki  $*$  işlemine göre bir grup ise  $H$  ye  $G$  nin bir alt grubu denir.  $H < G$  şeklinde gösterilir.

**Önerme 3.1.1**  $(G, *)$  bir grup ve  $\emptyset \neq H \subset G$  olsun.  $H < G$  olması için g.v.y.k

- i)  $\forall a, b \in H$  için  $a * b \in H$
- ii)  $\forall a \in H$  için  $a^{-1} \in H$

olmasıdır.

**İspat:**  $H < G$  olsun.  $H$ ,  $G$  nin işlemine göre bir grup olduğundan i) ve ii) sağlanır.

Karşıt olarak;  $H$  alt kümesi için i) ve ii) şartları sağlansın. i) den kapalılık, ii) den ters eleman özelliği sağlanır. Hipotez gereğince  $H \neq \emptyset$  olduğundan,  $a \in H$  vardır. i) den  $a * a^{-1} = e \in H$  dir. Yani  $H$  birim elemanı içerir.  $G$  deki tüm elemanlar için birleşme özelliği sağlandığından,  $H$  alt kümesi için de sağlanır. O halde  $H$ ,  $G$  deki işleme göre bir gruptur. Bu nedenle  $H < G$  dir.

**Önerme 3.1.2**  $(G, *)$  bir grup ve  $\emptyset \neq H \subset G$  olsun. O zaman  $H$  nın bir alt grup olması için g.v.y.k

$$\forall a, b \in H \text{ için } a * b^{-1} \in H \text{ (veya } a^{-1} * b \in H)$$

olmasıdır.

**İspat:**  $H < G$  olduğunu kabul ederek,  $a * b^{-1} \in H$  olduğunu gösterelim:

$H$ , bir alt grup olduğundan  $\forall b \in H$  için  $b^{-1} \in H$  vardır.  $\forall a, b \in H$  için  $a * b^{-1} \in H$  olur.

Karşıt olarak ;  $\emptyset \neq H \subset G$ ,  $\forall a, b \in H$  için  $a * b^{-1} \in H$  olsun.

$\exists a \in H$  için  $a * a^{-1} = e \in H$  dir. (özdeş eleman)

$e, a \in H$  ve  $e * a^{-1} = a^{-1} \in H$  dir. (ters eleman)

$a, b \in H$  için  $b^{-1} \in H$  ve  $(b^{-1})^{-1} = b$  olduğu gözönüne alınarak,

$a, b \in H$  için  $a, b^{-1} \in H$  ve  $a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H$  bulunur. (kapalılık)

$\Phi \neq H \subset G$  olduğundan  $G$  deki birleşme özelliği  $H$  alt kümesinde de vardır.

$\forall a, b, c \in H$  için  $a * (b * c) = (a * b) * c$  sağlanır. (birleşme özelliği)

Böylece grup olma koşulları sağlanmış oldu. O halde  $H < G$  dir.

**Önerme 3.1.3** Sonlu bir  $(G, .)$  grubunda bir  $H$  alt kümesinin alt grup olması için g.v.y.k  $H$  nın  $G$  deki işleme göre kapalı olmasıdır. Yani,  $\forall a, b \in H$  için  $a * b \in H$  ise  $H < G$  dir.

**İspat 1:**  $H < G$  ise  $.$  işlemine göre kapalıdır.  $G$  sonlu olduğundan  $H$  da sonludur.

i)  $.$  işlemine göre kapalıdır.

ii)  $H \subset G$  olduğundan  $G$  de geçerli olan birleşme özelliği  $H$  da da geçerlidir.

iii)  $H \subset G$  olduğundan  $G$  de geçerli olan kısaltma özelliği,  $H$  da da geçerlidir.

O halde  $H < G$  dir.

**İspat 2:** Önerme 3.1.1 i) şikkından  $\forall a, b \in H$  için  $a * b \in H$  sağlanır. ii) şikkı için İki durum gözönüne alınmalıdır:

1) Eğer  $a = e$  ise  $a^{-1} = e \in H$  olur.

2)  $e \neq a \in H$  kabul edelim.  $\forall a \in H$  için  $a^{-1} \in H$  olduğunu göstermeliyiz.

$$a \in H, a^2 = a.a \in H, a^3 = a^2.a \in H, \dots, a^m \in H, \dots$$

$H$  sonlu bir küme olduğundan  $a$  nın bütün pozitif kuvvetleri birbirinden farklı olamazlar. O halde

$$r, s \in \mathbb{Z} \text{ için } 0 < s < r \text{ olmak üzere } a^r = a^s \text{ dir.}$$

$$a^{r-s} = e \in H \text{ ve } a \neq e \text{ için } r-s > 1 \Rightarrow r-s-1 > 0 \text{ olup,}$$

$$a^{r-s-1} = a^{-1} \in H \text{ bulunur.}$$

Tersine,  $H < G$  ise kapalılık özelliği sağlanır.

### Örnekler:

- 1) Çift sayılar kümesi  $2\mathbb{Z}$ ,  $(\mathbb{Z}, +)$  grubunun bir alt grubudur.
- 2)  $\mathbb{Z}$  tam sayılar kümesi,  $(\mathbb{Q}, +)$  grubunun bir alt grubudur.
- 3)  $(\mathbb{Z}, +)$  sonsuz bir gruptur.
- 4)  $G = \{1, -1\}$  ise  $(G, .)$  mertebesi 2 olan bir gruptur.
- 5)  $(\{e\}, *)$  ve  $(G, *)$  grupları trivial (aşıkâr) alt gruplardır.

**İspat 5)**  $e.e = e$  ve  $e^{-1} = e$  olduğundan Önerme 3.1.1 'e göre  $\{e\}$ ,  $G$  nin bir alt

grubudur.

**Tanım (Aşık alt grup):** Bir  $(G, *)$  bir grup ve  $e \in (G, *)$  grubunun birim elemanı olmak üzere  $(\{e\}, *)$  ve  $(G, *)$  ın kendisi aşık alt gruplar adını alır.

**Tanım (Öz alt grup):** Bir grubun kendisinden ve biriminden farklı her alt grubuna grubun özalt grubu ya da hakiki alt grubu denir.

**Tanım (Grubun Mertebesi):**  $G$  sonlu bir grup ise  $G$  nin eleman sayısına grubun mertebesi denir.

**Tanım (Sonsuz Grup):** Bir  $G$  grubunun eleman sayısı sonlu değilse grup sonsuz grup olarak adlandırılır.

**Örnek:**  $(\mathbb{C}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}^*, +)$  ve  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$  sonsuz grup örnekleridir.

**Tanım (Sonlu Mertebeden Eleman):**  $G$  bir grup,  $e \in G$  nin birim elemanı ve  $a \in G$  olmak üzere  $a^n = e$  olacak şekilde bir pozitif  $n$  tamsayısı varsa,  $a$  elemanına sonlu mertebededir denir. Böyle bir  $n \in \mathbb{Z}^+$  tamsayısı yoksa elemana sonsuz mertebededir denir.

**Tanım (Bir Elemanın Mertebesi):** Eğer  $a \in G$  sonlu mertebeden olmak üzere  $a^n = e$  olacak şekilde en küçük pozitif  $n$  tamsayısına  $a$  nin mertebesi denir ve  $o(a) = n$  ya da  $|a| = n$  şeklinde gösterilir.

Eğer grup işlemi toplama ise  $n.a = e = 0$  olacak şekilde en küçük pozitif  $n$  tamsayısı aranır. Eğer grup işlemi çarpma ise  $a^n = e = 1$  olacak şekilde en küçük pozitif  $n$  tamsayısı aranır.

**Örnek:**  $(\mathbb{Z}, +)$  grubunun bir elemanı sonsuz mertebededir. Örneğin  $+$  işlemine göre  $n.2 = 0$  olacak şekilde bir en küçük pozitif  $n$  tamsayısı bulunamayacağından 2 elemanı sonsuz mertebededir.

**Örnek:**  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$  kümesi  $+$  işlemine göre bir gruptur. Bu gruptaki elemanların mertebeleri  $n.a = e$  şartını sağlayacak şekilde mertebeleri

$$n.0 = 0 \text{ için } n = 1 \Rightarrow o(0) = 1$$

$$n.1 = 0 \text{ için } n = 3 \Rightarrow o(1) = 3$$

$$n.2 = 0 \text{ için } n = 3 \Rightarrow o(2) = 3$$

elde edilir.

**Örnek:**  $G$  bir grup ve  $a, b, c \in G$  için  $a^{12} = b^8 = c^6 = e$  olsun.  $abc$  elemanının mertebesini bulunuz.  $o(abc) = ?$

**Çözüm:**  $(abc)^n = abcabcabc \dots abc$  şeklinde yazılabileceğinden,  $G$  grubu değişmeli değil ise bu çarpımın birim elemanı vermesi mümkün olmadığından sonsuz mertebeye sahiptir.

Halbuki  $G$  grubu değişmeli iken  $\text{ekok}(12, 8, 6) = 24$  olup,

$(abc)^{24} = a^{24} b^{24} c^{24} = (a^{12})^2 (b^8)^3 (c^6)^4 = e^2 e^3 e^4 = e$  olduğundan  $abc$  elemanının mertebesi 24 dır.

**Örnek:**  $G$  bir grup ve  $a \in G$  olsun. Eğer  $a^{20} = e$  ise  $a$  elemanının ve  $G$  grubunun mertebeleri neler olabilir? Açıklayınız.

**Çözüm:**  $a^{20} = e$  ise  $a$  nın mertebesi 20 nin bir pozitif böleni olmalıdır. Yani 1, 2, 4, 5, 10 veya 20 olabilir.  $G$  grubunun mertebesi de elemanın mertebesine bölüneceğinden bu sayılardan birine bölünebilen bir doğal sayıdır.

**Örnek:**  $G$  bir grup olsun.  $a, b \in G$  için  $a$  nın ve  $b$  nin mertebesi sırasıyla 3 ve 6 ise  $ab$  elemanının mertebesi hakkında ne söylenebilir? Açıklayınız.

**Çözüm:**  $G$  grubu değişmeli değilse  $ab$  elemanının mertebesi sonsuzdur. Çünkü  $a^3 = b^6 = e$  olduğunu kullanabilmek için 3 tane  $a$  elemanını ve 6 tane  $b$  elemanını yanyana getirmek gerekir. Bu ise mümkün değildir.

Halbuki  $G$  grubu değişmeli ise  $ab$  elemanının mertebesi 6 dır. Çünkü  $\text{ekok}(3, 6) = 6$  olup,

$(ab)^6 = abababababab = aaaaaa bbbbbb = (a^3)^2 b^6 = e^2 e = e$  elde edilir.

**Tanım (Grubun Merkezi):**  $(G, *)$  bir grup olmak üzere,

$$M(G) = \text{mer } G = \{a \in G \mid \forall x \in G \text{ için } x * a = a * x\}$$

şeklinde tanımlanan  $M$  kümesine  $G$  grubunun merkezi denir.

**Önerme 3.1.4**  $(\text{mer } G, *)$ ,  $(G, *)$  grubunun bir alt grubudur.  $\text{mer } G < G$  dir.

**İspat:**  $M$  kümesi boş kümeden farklıdır. Çünkü en azından birim elemanı içerir. Yani,  $e \in \text{mer } G$  dir.

$a, b \in \text{mer } G$  olsun.  $\forall x \in G$  için  $a * x = x * a$  ve  $b * x = x * b$  dir.

$a * b^{-1} \in \text{mer } G$  olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
(a * b^{-1}) * x &= a * (b^{-1} * x) \\
&= a * (x * b^{-1}) \\
&= (a * x) * b^{-1} \\
&= (x * a) * b^{-1} \\
&= x * (a * b^{-1})
\end{aligned}$$

bulunur. O halde  $\text{mer}G < G$  dir.

**Tanım (Çarpım Küme):**  $(G, *)$  bir grup ve  $\emptyset \neq H, K \subset G$  olsun.  $H$  ve  $K$  kümelerinin çarpımı

$$H * K = \{ h * k \mid h \in H, k \in K \}$$

şeklinde tanımlanır ve  $H * K$  ile gösterilir.

**Tanım (Toplam Küme):** Eğer  $G$  toplamsal bir grup yani, gruptaki işlem  $(+)$  ise,  $H$  ve  $K$  kümelerinin toplamı

$$H + K = \{ h + k \mid h \in H, k \in K \}$$

şeklinde tanımlanır.

**Önerme 3.1.5** Eğer  $(G, *)$  nin iki alt grubu  $(H, *)$  ve  $(K, *)$  olsun.  $H * K = K * H$  olması için g.v.y.k  $(H * K, *) < G$  olmasıdır.

**İspat:**  $\forall a, b \in H * K$  olsun.  $\exists h, h_1 \in H$  ve  $\exists k, k_1 \in K$  için  $a = h * k$  ve  $b = h_1 * k_1$  olmak üzere  $a * b^{-1} \in H * K$  olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
a * b^{-1} &= (h * k) * (h_1 * k_1)^{-1} = (h * k) * (k_1^{-1} * h_1^{-1}) \\
&= h * \underbrace{\left[ (k * k_1^{-1}) * h_1^{-1} \right]}_{\in K * H}
\end{aligned}$$

Köşeli parantez içindeki ifadede  $H * K = K * H$  hipotezi kullanılırsa,

$$= h * \underbrace{\left[ h_1^{-1} * (k * k_1^{-1}) \right]}_{\in H * K} = \underbrace{(h * h_1^{-1})}_{\in H} * \underbrace{(k * k_1^{-1})}_{\in K} \in H * K$$

elde edilir.  $(H, *)$  ve  $(K, *)$  grupları  $(G, *)$  grubunun alt gruplarıdır ve  $*$  işlemine göre kapalıdır.  $a * b^{-1} \in H * K$  olduğundan  $(H * K, *) < G$  dir.

Tersine,  $(H * K, *) < G$  olsun.  $H * K = K * H$  olduğunu göstermeliyiz.

$x \in H * K$  alalım.  $x^{-1} = h * k \in H * K$  dır.  $x = (h * k)^{-1} = k^{-1} * h^{-1} \in K * H$  olduğundan  $H * K \subset K * H$  elde edilir. Böylece  $H * K = K * H$  yazabiliriz.

## 3.2 Alt Grup Örnekleri

**Örnek 1**  $G$  bir grup,  $H < G$  ve  $a \in G$  olsun.  $a * H * a^{-1} = \{a * h * a^{-1} \mid h \in H\}$  kümesinin de  $G$  nin bir alt grubu olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Her  $a * h_1 * a^{-1}$  ve  $a * h_2 * a^{-1} \in a * H * a^{-1}$  için,

$$\begin{aligned} (a * h_1 * a^{-1}) * (a * h_2 * a^{-1})^{-1} &= a * h_1 * \underbrace{a^{-1} * a}_e * h_2^{-1} * a^{-1} \\ &= a * \underbrace{h_1 * h_2^{-1}}_{\in H} * a^{-1} \in a * H * a^{-1} \end{aligned}$$

olduğundan,  $a * H * a^{-1} < G$  elde edilir.

**Örnek 2**  $G$  bir grup ve  $a \in G$  olsun.  $G$  nin  $H = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  alt kümesinin  $G$  nin bir alt grubu olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $e = a^0$  olacak şekilde  $0 \in \mathbb{Z}$  olduğundan  $e \in H$  dır. Yani  $H \neq \Phi$  dir.

$x, y \in H$  ise  $x = a^m$  ve  $y = a^n$  olacak şekilde  $m, n \in \mathbb{Z}$  vardır.

$xy^{-1} = a^m (a^n)^{-1} = a^m a^{-n} = a^{m-n}$  olduğundan  $xy^{-1} \in H$  dır.

**Örnek 3**  $3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  kümesini gözönüne alalım.  $3\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $0 = 3 \cdot 0$  olacak şekilde  $0 \in \mathbb{Z}$  var olduğundan,  $0 \in 3\mathbb{Z}$  dir. Bu nedenle  $3\mathbb{Z} \neq \Phi$  dır.

$x, y \in 3\mathbb{Z}$  için  $x = 3k_1$  ve  $y = 3k_2$  olacak şekilde  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$  vardır.

$x - y = 3k_1 - 3k_2 = 3(k_1 - k_2) \in 3\mathbb{Z}$

olduğundan  $3\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$  dir.

**Örnek 4**  $G = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\} \subseteq \mathbb{Z}_7$  çarpma işlemine göre bir grup olduğuna göre  $H = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\} < G$  alt grup mudur?

**Çözüm:**  $H = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\} \subseteq G$  alt kümesi sonlu olup, çarpma işlemine göre kapalıdır. Böylece  $H = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\} < G$  dir.

$$\begin{array}{cccc} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{4} & 1 \\ \bar{4} & \bar{4} & 1 & \bar{2} \end{array}$$

**Örnek 5**  $(S(A), o)$  grubunu gözönüne alalım. ( $S(A)$ ,  $A \neq \Phi$  olmak üzere  $A$  dan  $A$  ya giden 1-1 ve örten fonksiyonların kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur.)

$a \in A$  için  $H_a = \{f \in S(A) \mid f(a) = a\} < S(A)$  olduğunu gösterelim:

$$H_a \neq \Phi \text{ olup, } f, g \in H_a \text{ için } f \circ g^{-1}(a) = f(g^{-1}(a)) = f(a) = a$$

olduğundan  $f \circ g^{-1} \in H_a$  dır. Önerme 2.1.2 gereğince  $H_a < S(A)$  dır.

**Örnek 6**  $G$  bir değişmeli grup ve  $H = \{a \in G \mid \text{bir } x \in G \text{ için } x^n = a\}$  olsun.  $H$  nın  $G$  nin bir alt grubu olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $a, b \in H$  için  $a = x^n$  ve  $b = y^n$  olacak şekilde  $G$  grubunda iki tane  $x$  ve  $y$  elemanı mevcuttur.

$$a \cdot b = (x \cdot y)^n \text{ ve } a^{-1} = (x^{-1})^n \text{ olduğunu göstermeliyiz.}$$

$$a \cdot b = x^n \cdot y^n \text{ olup, } G \text{ değişmeli olduğundan } a \cdot b = x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n \in G \text{ dir.}$$

$$x \cdot y \in G \text{ ve } a \cdot b \in H \text{ olur.}$$

$$a^{-1} = (x^n)^{-1} = (x^{-1})^n \in G \text{ dır. } x^{-1} \in G \text{ ve } a^{-1} \in H \text{ olur.}$$

Yani  $H < G$  dir.

**Örnek 7**  $G$  bir değişmeli grup ve  $H = \{a \in G \mid a^2 = e\}$  olsun.  $H$  nın  $G$  nin bir alt grubu olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $a, b \in H$  için  $(a \cdot b^{-1})^2 = e$  olduğunu göstermeliyiz.

$$a^2 = b^2 = e \Rightarrow a = a^{-1} \text{ ve } b = b^{-1} \text{ olup, değişme özelliği kullanılarak,}$$

$$(a b^{-1})^2 = a b^{-1} a b^{-1} = a b a b = a a b b = a^2 b^2 = e e = e$$

elde edilir. O halde  $H < G$  dir.

**Örnek 8**  $G$  bir değişmeli grup ve  $H = \{ a \in G \mid a^3 = e \}$  olsun.  $H$  nin  $G$  nin bir alt grubu olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $a, b \in H$  için  $(a b^{-1})^3 = e$  olduğunu göstermeliyiz.

$a^3 = b^3 = e$  olup, değişme özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} (a b^{-1})^3 &= a b^{-1} a b^{-1} a b^{-1} = a b^{-1} a a b^{-1} b^{-1} = a a b^{-1} a b^{-1} b^{-1} \\ &= a a a b^{-1} b^{-1} b^{-1} = a^3 b^{-3} = a^3 (b^3)^{-1} = e e^{-1} = e \end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $H < G$  dir.

**Örnek 9** Bir  $G$  grubunda ve  $\forall a \in G$  için  $a^3 = a$  ise  $G$  nin değişmeli olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**  $a, b \in G$  için  $(a b)^3 = a b$  olduğunu göstermeliyiz.

$a^3 = a \Rightarrow a^2 = e \Rightarrow a = a^{-1}$  ve  $b^3 = b \Rightarrow b^2 = e \Rightarrow b = b^{-1}$  kullanılarak,

$$\begin{aligned} (a b)^3 &= a b \Rightarrow a b a b a b = a b \Rightarrow a b a b = e \\ \Rightarrow a b &= (a b)^{-1} = b^{-1} a^{-1} \Rightarrow a b = b^{-1} a^{-1} = b a \end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $G$  değişmelidir.

**Örnek 10**  $G = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$  grubunun merkezini bulunuz.

**Çözüm:**  $\text{mer } G = \{a \in G \mid \forall x \in G \text{ için } x.a = a.x\}$  şeklinde tanımlandığına göre,  $G$  nin öyle elemanlarını seçmeliyiz ki bunlar  $G$  nin diğer tüm elemanları ile değişmeli olmalıdır. Bu koşulu sağlayan elemanlar ise sadece 1 ve -1 dir.

O halde  $\text{mer } G = \{1, -1\}$  dir.