Soru.

x	1	2	3
y	2	7	25

a) Tablodaki verilen datalara uyan $f(x) = a \cdot x^b$ formundaki fonksiyonu en küçük kareler yöntemi ile bulunuz.

$$\underbrace{\ln f(x)}_{Y} = \ln a + b \cdot \underbrace{\ln x}_{X} \quad (2)$$

X	0	0.6931	1.0986	$\bar{X} = 0.5973$
Y	0.6931	1.9459	3.2189	$\bar{Y} = 1.9526$

(3)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{3} Y_i (X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{3} X_i (X_i - \bar{X})} = \frac{0.6931 \cdot (-0.5673) + 1.9459 \cdot 0.0959 + 3.2189 \cdot 0.5014}{0 \cdot (-0.5673) + 0.6931 \cdot 0.0959 + 1.0986 \cdot 0.5014}$$

$$= \frac{1.3864}{0.6173} = 2.2459 \quad (6)$$

$$\ln a = \bar{Y} - b\bar{X} = 0.6113 \quad (4) \rightarrow a = e^{0.6113} = 1.8428 \quad (3)$$

$$\Rightarrow f(x) = 1.8428 \cdot x^{2.2459} \quad (2)$$

b) $x = 3$ için bağıl hatayı hesaplayınız.

$$f(3) = 1.8428 \cdot 3^{2.2459} = 21.7293 \quad (3)$$

$$\text{Bağıl Hata} : \% \frac{|25 - 21.72931|}{|25|} \times 100 = \% 13.0828 \quad (2)$$

Soru2. $-x_1 + 3x_2 + x_3 = 20$

$3x_1 + 5x_2 - x_3 = 32$

$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 34$

lineer denklem sistemini LU ayrışımı kullanarak çözünüz.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-(-4)R_1]{R_2-(-3)R_1} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 14 & 2 \\ 0 & 15 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-\frac{15}{14}R_2} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 27/7 \end{bmatrix}}_{U}$$

(2) (2) (2) (2)

$L_{21} = -3$

$L_{31} = -4$

$L_{32} = \frac{15}{14}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 15/14 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 27/7 \end{bmatrix} \quad (3) \Rightarrow \underbrace{LU}_{z} x = y$$

i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 15/14 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 32 \\ 34 \end{bmatrix}$

$z_1 = 20$ (2)

$-3z_1 + z_2 = 32 \rightarrow z_2 = 92$ (2)

$-4z_1 + \frac{15z_2}{14} + z_3 = 34 \rightarrow z_3 = \frac{108}{7}$ (2)

ii) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 27/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 92 \\ 108/7 \end{bmatrix}$

$\frac{27}{7}x_3 = \frac{108}{7} \rightarrow x_3 = 4$ (2)

$14x_2 + 2x_3 = 92 \rightarrow x_2 = 6$ (2)

$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 20 \rightarrow x_1 = 2$ (2)

Soru: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ integralinin yaklaşık değerini Romberg yöntemi ile bulunuz.

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{4}\left[\cos 0 + \cos\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4} \approx 0.785399 \quad (4)$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}\right] \approx \frac{1}{2}\left[0.785399 + 1.110720\right] = 0.948059 \quad (4)$$

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{1}{3}\left[R_{2,1} - R_{1,1}\right] \quad (4)$$

$$= 0.948059 + \frac{1}{3}\left[0.948059 - 0.785399\right] = 1.002279$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[R_{2,1} + \frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8}\right)\right] \approx 0.987116 \quad (4)$$

$$R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{1}{3}\left[R_{3,1} - R_{2,1}\right] \quad (4)$$

$$= 0.987116 + \frac{1}{3}\left[0.987116 - 0.948059\right] = 1.000135$$

$$R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{1}{15}\left[R_{3,2} - R_{2,2}\right] \quad (5)$$

$$= 1.000135 + \frac{1}{15}\left[1.000135 - 1.002279\right) = 0.999992$$

— o —

$R_{1,1} = 0.785399$

$R_{2,1} = 0.948059$ $\qquad R_{2,2} = 1.002279$

$R_{3,1} = 0.987116$ $\qquad R_{3,2} = 1.000135$ $\qquad R_{3,3} = 0.999992$

Soru: Bir $y=f(x)$ fonksiyonunun bazı değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

x	-4	-2	0	2	4	6	8
f(x)	1	3	4	4	6	9	14

a) $n=6$ için Simpson kuralını kullanarak $\int_{-4}^{8} f(x)\,dx$ integralinin değerini yaklaşık olarak hesaplayınız. (13 puan)

b) $n=4$ için Yamuk kuralını kullanarak $\int_{0}^{8} f(x)\,dx$ integralinin değerini yaklaşık olarak hesaplayınız. (12 puan)

Çözüm:

a) $A = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+4f(x_5)+f(x_6)\right]$ (5)

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{8-(-4)}{6} = 2$ (2), $x_i = \{-4,-2,0,2,4,6,8\}$ (2)

$A = \frac{2}{3}\left[1+4.3+2.4+4.4+2.6+4.9+14\right]$ (4)

$= \frac{2}{3}\left[1+12+8+16+12+36+14\right] = \frac{2}{3}\cdot 99 = 66$

b) $A = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+f(x_4)\right]$ (5)

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{8-0}{4} = 2$ (2), $x_i = \{0,2,4,6,8\}$ (2)

$A = \frac{2}{2}\left[4+2.4+2.6+2.9+14\right] = 4+8+12+18+14$ (3)

$= 56$