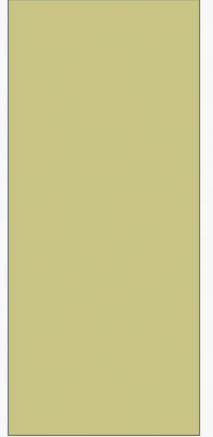


KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Arş. Gör. Dr. Fatih Aylıkçı



HİPERBOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

- Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlere örnek olarak dalga denkleminin nümerik çözümünü düşüneceğiz. Dalga denklemi aşağıdaki kısmi diferansiyel denklemle ifade edilir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, 0 < x < l, t > 0$$

- α , problemin fiziksel koşullarına bağlı bir sabittir. Probleme ait koşullar:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), 0 \leq x \leq l$$

HİPERBOLİK KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

- x eksenini grid noktalarını tanımlamak için $h = l / m$ 'i kullanarak $m > 0$ tamsayısı seçilir. Ek olarak zaman adım uzunluğu olarak $k > 0$ seçilir. (x_i, t_j) mesh noktaları $i = 0, 1, \dots, m$ ve $j = 0, 1, \dots$ için

$$x_i = ih, t_j = jk$$

- olarak tanımlanır. Herhangi bir iç (x_i, t_j) mesh noktasında dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0$$

- denklemine dönüşür.

HİPERBOLİK KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

- İkinci kısmi türevler için merkezi sonlu fark formülleri

$\mu_j \in (t_{j-1}, t_{j+1})$ için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j)$$

$\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

- kullanılarak sonlu fark metodu elde edilir.

HİPERBOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

- Hata terimi

$$\tau_{i,j} = \frac{1}{12} \left[k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \right]$$

- ihmal edilerek el edilen sonlu fark denklemi

$$\frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{k^2} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

- şeklindedir.

HİPERBOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

- $\lambda = \alpha k / h$ tanımlanırsa sonlu fark denklemi

$$w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1} - \lambda^2 w_{i+1,j} + 2\lambda^2 w_{i,j} - \lambda^2 w_{i-1,j} = 0$$

- denkleme dönüşür ve $w_{i,j+1}$ çekilirse, ileri düzey zaman-adım yaklaşımı,

$$w_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1}$$

- elde edilir. Bu denklem $i = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots$ için sağlanmaktadır.

HİPERBOLİK KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

- Sınır koşulları

$$w_{0,j} = w_{m,j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

- ve başlangıç koşulları

$$w_{i,0} = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

- şeklindedir.

HİPERBOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

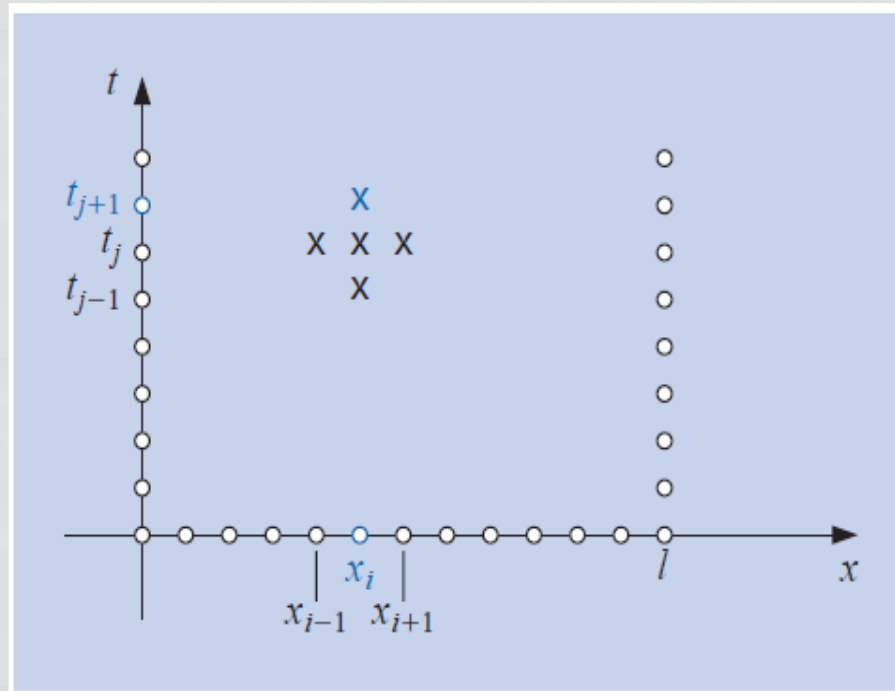
- Bu denklem seti matris formunda

$$\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}$$

- biçiminde verilir.

HİPERBOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

- Elde edilen sonlu fark denkleminde $(j+1)$. zaman adımındaki değer j . ve $(j-1)$. zaman adımlarındaki değerlerin bilinmesini gerektirmektedir.



HİPERBOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

- Bu durum sınır koşullarında yer alan $j = 0$ değerleri yüzünden minör bir başlama problemine yol açar, ama $w_{i,2}$ 'nin hesabı için gerekli olan $j = 1$ değerleri

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), 0 \leq x \leq l$$

- başlangıç-hız koşulundan elde edilmek zorundadır.
- Yaklaşımın biri $\partial u / \partial t$ 'nin yerine ileri fark yaklaşımını koymaktır:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, 0)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \bar{\mu}_i), \quad \bar{\mu}_i \in (0, t_1)$$

HİPERBOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

- $u(x_i, t_1)$ 'i çözmek için;

$$\begin{aligned} u(x_i, t_1) &= u(x_i, 0) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \bar{\mu}_i) \\ &= u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \bar{\mu}_i) \end{aligned}$$

- elde edilir. Kesme terimi silinirse yaklaşım,

$$w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

- olarak bulunur. Bununla birlikte bu yaklaşım sadece $O(k)$ mertebesinde kesme hatası içerir, oysa ki daha önceki $O(k^2)$ mertebesindeydi.

METODUN ÖZETİ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, 0 < x < L, t > 0$$

$$u(0,t) = f_{x0}(x,t), u(L,t) = f_{xL}(x,t) \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f_{t0}(x,t), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f_{t1}(x,t), 0 \leq x \leq L$$

dalga denkleminin çözüm bölgesini önce grid'lere ayıralım. Soruda $t=T$ için çözüm istendiğini varsayarsak adım uzunlukları;

$$h = \frac{L}{m}, k = \frac{T}{n} \quad \text{olmak üzere } x \text{ aralığı } m \text{ tane, } t \text{ aralığı}$$

da n tane alt aralığa bölünür.

METODUN ÖZETİ

	$x_1 = 0$	$x_2 = h$	$x_3 = 2h$	$\dots$	$x_m = (m-1)h$	$x_{m+1} = mh = L$	
$t_1 = 0$	$w_{1,1}$	$w_{2,1}$	$w_{3,1}$	$\dots$	$w_{m,1}$	$w_{m+1,1}$	3
$t_2 = k$	$w_{1,2}$	$w_{2,2}$	$w_{3,2}$	$\dots$	$w_{m,2}$	$w_{m+1,2}$	
$t_3 = 2k$	$w_{1,3}$	$w_{2,3}$	$w_{3,3}$	$\dots$	$w_{m,3}$	$w_{m+1,3}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$t_n = (n-1)k$	$w_{1,n}$	$w_{2,n}$	$w_{3,n}$	$\dots$	$w_{m,n}$	$w_{m+1,n}$	
$t_{n+1} = nk = T$	$w_{1,n+1}$	$w_{2,n+1}$	$w_{3,n+1}$	$\dots$	$w_{m,n+1}$	$w_{m+1,n+1}$	
	1					2	

Yukarıda görüldüğü gibi bir tablo yapıldığında (burada $u(x_i, t_j) \rightarrow w_{i,j}$), tabloda beyaz kutular $j = 1, 2, \dots, n+1$ için $w_{1,j} = f(x_0, t_j)$ **1** $i = 1, 2, \dots, m+1$ için $w_{i,1} = f(x_i, 0)$ **3**

$$w_{m+1,j} = f(x_L, t_j) \quad \mathbf{2}$$

görüldüğü gibi sınır koşullarını temsil etmektedir.

METODUN ÖZETİ

Diğer başlangıç koşulu olan

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_1(x, t)$$

koşulu için ileri sonlu fark formülünü kullanacağız.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) \approx \frac{w_{i,2} - w_{i,1}}{k} = f_1(x_i, t_1)$$

$$\Rightarrow w_{i,2} = w_{i,1} + k f_1(x_i, t_1), \quad 2 \leq i \leq m$$

METODUN ÖZETİ

Tabloda ortada görülen sarı kutu ise bilinmeyenleri içermektedir. Toplamda $(m-1) \times n$ tane bilinmeyen vardır.

Merkezi sonlu fark formülleri;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) \approx \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{k^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2}$$

olmak üzere bu formüller denklemden yerine yazılırsa

METODUN ÖZETİ

$\alpha \frac{k}{h} = \lambda$ (lambda) olmak üzere

$$w_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1}$$

sonlu fark formülü elde edilir.

Şimdi bu formülde $j = 2, \dots, n$ yerine konulup her bir j için $i=2, \dots, m$ de yerlerine konulursa her bir bilinmeyen iterasyonlar yardımıyla elde edilir.

METODUN ÖZETİ

$j = 2$ için

$$i = 2 \quad w_{2,3} = 2(1-\lambda^2)w_{2,2} + \lambda^2(w_{3,2} + w_{1,2}) - w_{2,1}$$

$$i = 3 \quad w_{3,3} = 2(1-\lambda^2)w_{3,2} + \lambda^2(w_{4,2} + w_{2,2}) - w_{3,1}$$

$\vdots$

$$i = m \quad w_{m,3} = 2(1-\lambda^2)w_{m,2} + \lambda^2(w_{m+1,2} + w_{m-1,2}) - w_{m,1}$$

Yukarıda $j=2$ için $w_{2,3}, w_{3,3}, \dots, w_{m,3}$ bilinmeyenleri elde edilir. Çünkü sağ tarafta yer alan tüm değerler ya başlangıç koşullarından ya da sınır koşullarından zaten bilinmektedir. Bu hesaplamalar $j=2$ 'den $j=n$ 'e kadar devam ettirilip bu iterasyonlarla tüm bilinmeyenler elde edilir.

ALGORİTMA

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, 0 < x < l, 0 < t < T$$

dalga denkleminin çözümüne

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, 0 < t < T$$

$$u(x,0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), 0 \leq x \leq l$$

sınır ve başlangıç koşulları ile birlikte yaklaşmak için:

GİRDİ: l sınırı; T maksimum zaman; α sabiti;

$m \geq 2, N \geq 2$ tamsayıları

ÇIKTI: Her bir $i = 0, \dots, m$ ve $j = 0, \dots, N$ için

$u(x_i, t_j)$ 'ye $w_{i,j}$ yaklaşımları

ALGORITMA

Step 1 Set $h = l/m$;
 $k = T/N$;
 $\lambda = k\alpha/h$.

Step 2 For $j = 1, \dots, N$ set $w_{0,j} = 0$;
 $w_{m,j} = 0$;

Step 3 Set $w_{0,0} = f(0)$;
 $w_{m,0} = f(l)$.

Step 4 For $i = 1, \dots, m - 1$ (*Initialize for $t = 0$ and $t = k$.*)
set $w_{i,0} = f(ih)$;
$$w_{i,1} = (1 - \lambda^2)f(ih) + \frac{\lambda^2}{2}[f((i+1)h) + f((i-1)h)] + kg(ih).$$

Step 5 For $j = 1, \dots, N - 1$ (*Perform matrix multiplication.*)
for $i = 1, \dots, m - 1$
set $w_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)w_{i,j} + \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - w_{i,j-1}$.

Step 6 For $j = 0, \dots, N$
set $t = jk$;
for $i = 0, \dots, m$
set $x = ih$;
OUTPUT $(x, t, w_{i,j})$.

Step 7 STOP. (*The procedure is complete.*)

ALGORİTMA

- **ÖRNEK:**
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, 0 < x < 1, 0 < t < T$$

hiperbolik problemin çözümüne

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, 0 < t < T$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, 0 \leq x \leq 1$$

sınır ve başlangıç koşullarını kullanarak ve $h=0.1$, $k=0.05$ kullanarak yaklaşın. Sonuçları

$$u(x,t) = \sin(\pi x) \cos(2\pi t)$$

analitik çözümümüyle karşılaştırın.