

5. Hafta-1

Matris Cebri



Nokta çarpımı
Matris-vektör çarpımı
Matris-matris çarpımı
Ters matris
Lineer sistemlerin çözümü
En küçük kareler çözümü
Determinant, rank, durum sayısı
Vektör, matris normları
Lineer sistemlerin iteratif çözümleri
Örnekler
Elektrik devreleri

6. Operatörler ve İfadeler

İşlem	Terim bazlı	Matris bazlı
Toplama	+	+
Çıkarma	-	-
Çarpma	.*	*
Bölme (sağ bölme)	./	/
Sol bölme	.\	\
Üs	.^	^

Kompleks eşleniksiz transpoze	'
Kompleks eşlenikli transpoze	'



Matris cebri işlemlerinde
kullanılırlar.

```
>> help /
>> help precedence
```

Command Window

```
>> A = [1 2; 3 4]
```

```
A =
```

```
1    2
3    4
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

```
>> [A, A.^2; A^2, A*A]
```

```
ans =
```

1	2	1	4
3	4	9	16
7	10	7	10
15	22	15	22

% alt-bloklar biçiminde

% Not: A^2 = A*A

```
>> B = 10.^A;
```

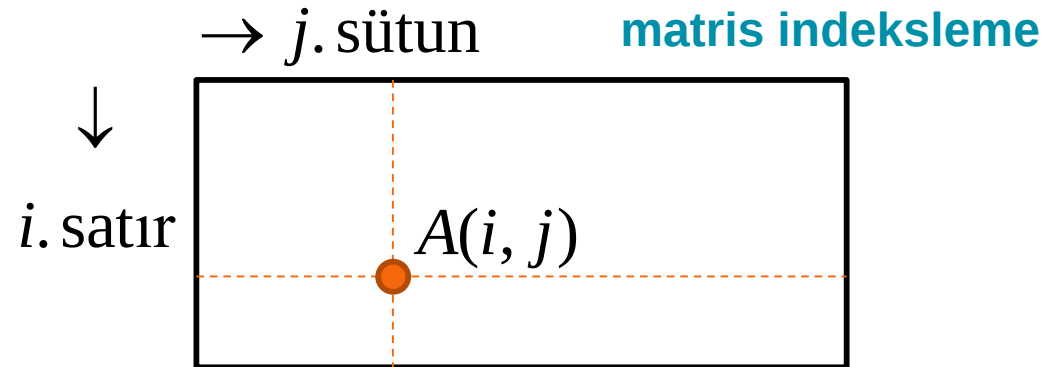
```
>> [B, log10(B)]
```

```
ans =
```

10	100	1	2
1000	10000	3	4

% $B = \begin{bmatrix} 10^1 & 10^2 \\ 10^3 & 10^4 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$



Command Window

```
>> A=[1 2 3; 2 0 4; 0 8 5]
```

```
A =
```

```

1     2     3
2     0     4
0     8     5
```

```
>> size(A)
```

% [N, M] = size(A), N x M matris

```
ans =
```

```

3     3
```

fx >>

Nokta çarpımı

Nokta çarpımı, matris-vektör ve matris-matris çarpımlarında temel bir işlemdir.

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

a ve b aynı boyutta olmalıdır.

$$a^T b = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$a^T b = a' b = a \bullet b = a.' * b$$

Matematik notasyonu

MATLAB notasyonu

Kompleks değerli vektörler için nokta çarpımı

Kompleks eşlenikli transpoze veya a 'nın hermityen eşleniği

$$a^\dagger b = \begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* & a_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + a_3^* b_3$$

$$a^\dagger b = a^H b = a' * b$$

Reel değerli vektörler için $'$ ve $*$ operatörleri eşdeğerdir.

Matematik notasyonu

MATLAB notasyonu

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \times 4 + 2 \times (-5) + (-3) \times 2 = -12$$

```
a = [1; 2; -3]; b = [4; -5; 2];  
a'*b  
ans =  
    -12  
  
dot(a,b)           % hazır fonksiyon  
ans =              % sum(a.*b) ile aynı  
    -12
```

Matris-vektör çarpımı

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} = -1$$

Üç tane nokta çarpım işlemini tek bir matris-vektör çarpımı ile birleştirdik.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Matris-vektör çarpımı

Üç tane nokta çarpım işlemini tek bir matris-vektör çarpımı ile birleştirdik.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

A x = b

Matris-matris çarpımı

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Üç tane matris-vektör çarpımını tek bir matris-matris çarpımı ile birleştirdik.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \\ -7 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = [4 \ 1 \ 2; \ 1 \ -1 \ 1; \ 2 \ 1 \ 1]$$

$$A =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = [5 \ -1 \ -3; \ -4 \ 3 \ 1; \ -7 \ 2 \ 6]$$

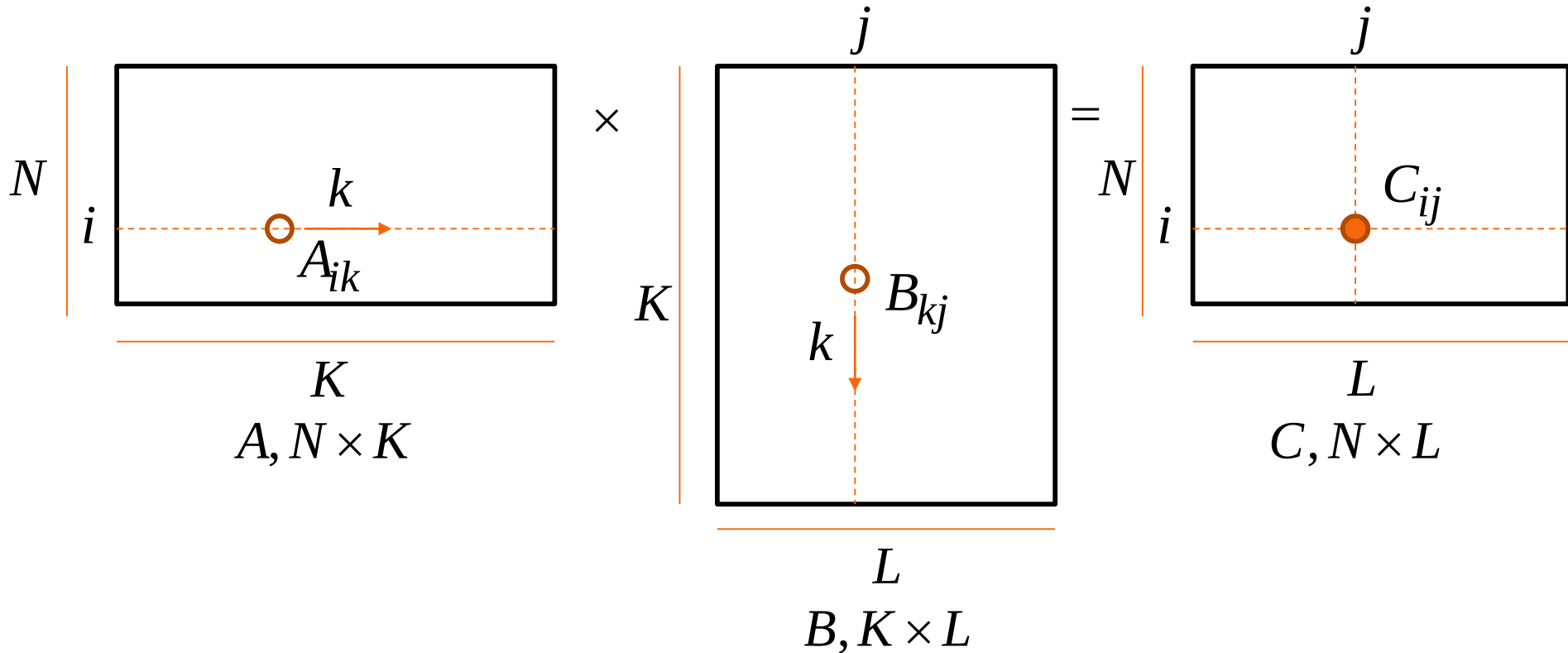
$$B =$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \\ -7 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = A * B$$

$$C =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$



$$C_{ij} = \sum_{k=1}^K A_{ik} B_{kj}, \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq L$$

C(i,j) A'nın i. satırı ile B'nin j. sütununun nokta çarpımıdır.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$(N \times K) \times (K \times L) \rightarrow N \times L$

A, $N \times K$

B, $K \times L$

$A * B$, $N \times M$

Vektör-vektör çarpımı

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

(1x3)x(3x1) → 1x1 skaler
satır * sütun = skaler

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}$$

(3x1)x(1x3) → 3x3 skaler
sütun * satır = matris

Vektör-vektör çarpımı

```
[1, 2, 3] * [2 -3 -1]'
```

```
% ans =
```

```
%      -7
```

← **satır * sütun = skaler**

```
B = [1, 2, 3]' * [2 -3 -1]
```

```
% ans =
```

```
%      2      -3      -1
```

```
%      4      -6      -2
```

```
%      6      -9      -3
```

← **sütun * satır = matris**

Lineer sistemlerin çözümü

$$Ax = b$$

Lineer denklemler çok sayıda mühendislik, bilim, sosyal bilim ve ekonomi uygulamalarında kullanılmaktadır.

Lineer programlama, Yönetim bilimi

Bilgisayar destekli tasarım, Arabaların ve uçakların aerodinamiği

Sinyal işleme, Komünikasyon, Kontrol, Radar

Sonar, Elektromanyetik, Petrol arama

Yapay görü, Desen ve yüz tanıma

Çip tasarımı, bir çip üzerindeki milyonlarca transistör

Ekonomik modeller, Finans, İstatistiksel modeller

Veri madenciliği, Sosyal modeller, Finans mühendisliği

Markov modelleri, Dil, Biyoloji, Google Pagerank

Bilimsel hesaplama, çok büyük problemlerin çözümü

Linear sistemlerin çözümü

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Ters matris

$$Ax = b$$

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b = A \setminus b$$

Bir lineer sistemi çözmek için $\text{inv}(A)$ yerine daima ters slash operatörünü kullanın.

Lineer sistemlerin çözümü (ters slash kullanarak)

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & = & 4 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 & = & 8 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 9 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

```
A = [2 1 0; 1 5 -1; 1 -2 4];
```

```
b = [4 8 9]';
```

```
x = A\b
```

```
x =
```

```
1
```

```
2
```

```
3
```

```
norm(A*x - b)
```

```
ans =
```

```
0
```

```
% Ax=b 'nin çözümü
```

```
% x = A^(-1) * b
```

```
% x = inv(A) * b
```

```
% test - sifıra eşit olmalı
```

```
% ya da eps mertebesinden
```

Lineer sistemlerin çözümü (inv kullanarak)

```
A = [2 1 0; 1 5 -1; 1 -2 4];  
b = [4 8 9]';  
inv(A) % A^(-1) ile aynı
```

```
ans =  
    0.5806    -0.1290    -0.0323  
   -0.1613     0.2581     0.0645  
   -0.2258     0.1613     0.2903
```

```
x = inv(A) * b % ters slash tercih edilir  
x = % x = A^(-1) * b ile aynı
```

```
    1.0000  
    2.0000  
    3.0000  
norm(A*x-b)  
ans =  
    1.8310e-015
```

```
inv(sym(A))  
ans =  
    [18/31, -4/31, -1/31]  
    [-5/31,  8/31,  2/31]  
    [-7/31,  5/31,  9/31]
```

Lineer sistemlerin çözümü (ters slash ve slash)

A, NxN ve tersi alınabilir

X, NxK

B, NxK

eşdeğer

$$AX = B \rightarrow X = A \backslash B = \text{inv}(A) * B$$

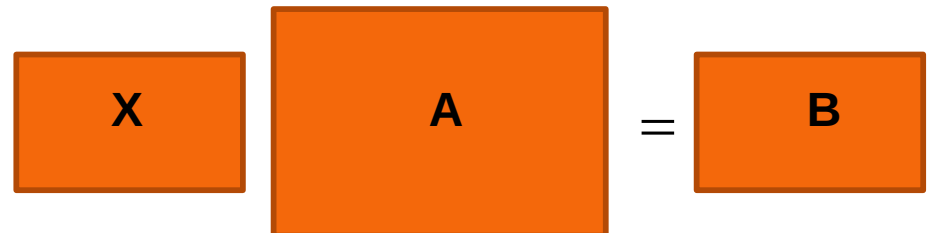
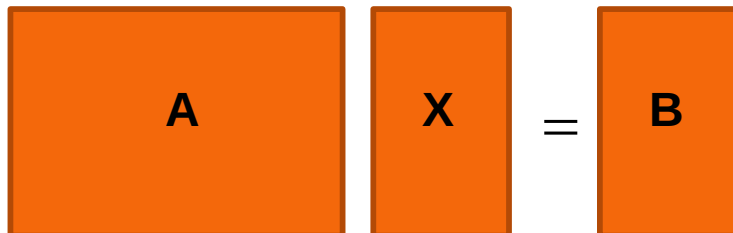
A, NxN ve tersi alınabilir

X, KxN

B, KxN

eşdeğer

$$XA = B \rightarrow X = B / A = B * \text{inv}(A)$$



Lineer sistemlerin çözümü – en küçük kareler çözümü

A , $N \times M$
 x , $M \times 1$ sütun
 b , $N \times 1$ sütun

$$x = A \setminus b$$

pseudo ters



$$x = \text{pinv}(A) \setminus b$$

```
>> help \  
>> help pinv
```

$x = A \setminus b$, $Ax = b$ 'nin en küçük kareler ile çözümüdür, yani x hataların ($e = b - A*x$) karelerinin normunu minimize etmektedir:

$$(b - Ax)' * (b - Ax) = \min$$

x , $Ax = b$ lineer sisteminin önceden belirlenmesine (overdetermined), eksik belirlenmesine (underdetermined) veya A 'nın rankının boyutuyla aynı (full rank) olup olmamasına bağlı olarak tek olabilir veya olmayabilir.

En küçük kareler çözümü - özet

A , $N \times M$ matris	$A' = M \times N$ matris
x , $M \times 1$ sütun	$A' * A = M \times M$ matris
b , $N \times 1$ sütun	$A' * b = M \times 1$ sütun

A' 'nin rankı boyutuna eşit (full rank) ise aşağıdaki durumlar geçerlidir:

1. $N > M$, önceden belirli durum (overdetermined)
 $x = A \backslash b =$ tek en küçük kareler çözümü
 $x = \text{pinv}(A) * b$ ile ve
 $x = (A' * A)^{-1} * (A' * b)$ ile aynıdır.
2. $N < M$, eksik belirtilmiş durum (underdetermined)
(birden fazla çözüm vardır)
 $x = A \backslash b$, $x = \text{pinv}(A) * b$
3. $N = M$, karesel ters çevrilebilir durum, x tektir
 $x = A \backslash b$, $x = A^{-1} * b$ ile eşdeğerdir.

En küçük kareler çözümü - örnek

```
% overdetermined  
% full rank  
  
A = [1 2; 3 4; 5 6]  
b = [4, 3, 8]';  
  
x = A\b  
% x = pinv(A)*b  
% x = (A'*A)\(A'*b)  
  
x =  
    -1  
     2
```

overdetermined

(3 denklem, 2 bilinmeyen)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 3 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 8\end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}e = b - Ax &= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 - x_1 - 2x_2 \\ 3 - 3x_1 - 4x_2 \\ 8 - 5x_1 - 6x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{hata}\end{aligned}$$

En küçük kareler çözümü - örnek

$$J = e^T e = (b - Ax)^T (b - Ax) = x^T (A^T A)x - 2x^T (A^T b) + b^T b = \min$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 2A^T (Ax - b) = 0 \Rightarrow x_{opt} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

tersi var, çünkü A full rank

$$J_{\min} = J|_{x=x_{opt}} = b^T b - b^T A(A^T A)^{-1} A^T b$$

J'nin minimize edilmiş değeri

$$J = (x - x_{opt})^T (A^T A)(x - x_{opt}) + J_{\min} \geq J_{\min}$$

A full rank olduğu için kesinlikle pozitif tanımlı karesel

En küçük kareler çözümü - örnek

```
A = [1 2; 3 4; 5 6]
b = [4, 3, 8]';
```

```
x_opt = (A'*A) \ (A'*b)
```

```
J_min = b'*b -  
b'*A*inv(A'*A)*A'*b
```

```
x_opt =  
    -1  
     2  
J_min =  
     6
```

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 \\ 68 \end{bmatrix}$$

$$b^T b = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} = 89$$

$$x_{opt} = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad J_{min} = b^T b - b^T A^T (A^T A)^{-1} A b = 6$$

En küçük kareler çözümü - örnek

$$e = b - Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - x_1 - 2x_2 \\ 3 - 3x_1 - 4x_2 \\ 8 - 5x_1 - 6x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{hata}$$

$$J = (4 - x_1 - 2x_2)^2 + (3 - 3x_1 - 4x_2)^2 + (8 - 5x_1 - 6x_2)^2$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 53 \\ 68 \end{bmatrix} + 89$$

$$= 35x_1^2 + 88x_1x_2 + 56x_2^2 - 106x_1 - 136x_2 + 89$$

$$= 35(x_1 + 1)^2 + 88(x_1 + 1)(x_2 - 2) + 56(x_2 - 2)^2 + 6$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + 1 & x_2 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} + 6, \quad x - x_{opt} = \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}$$

En küçük kareler çözümü - örnek

$$J = 35(x_1 + 1)^2 + 88(x_1 + 1)(x_2 - 2) + 56(x_2 - 2)^2 + 6 \geq 6$$

J $x_1 = -1, x_2 = 2$ de minimize edilmiştir, minimum değeri $J = 6$ dır.

```
% J'yi fminsearch ile minimize edebiliriz,  
% yani, fminbnd'nin çok değişkenli halidir.  
  
J= @(x) 35*(x(1)+1).^2 + 88*(x(1)+1).*(x(2)-2)+...  
      56*(x(2)-2).^2 + 6;  
x0 = [0,0]'; % keyfi başlangıç arama noktası  
  
[xmin,Jmin] = fminsearch(J,x0)  
  
% xmin =                % Jmin = 6  
%      -1.0000  
%      2.0000
```

Ters çevrilebilirlik, rank, determinant, durum numarası (condition number)

$N \times N$ 'lik bir A kare matrisinin tersi ($\text{inv}(A)$), eğer determinantı sıfıra eşit değilse ya da eşdeğer olarak full rank'a sahipse vardır. Full rank: rankı N 'ye eşit.

```
a = [1 2 3]'; b = [4 5 6]';  
A = [a, a+b, b]
```

```
A =  
     1     5     4  
     2     7     5  
     3     9     6
```

```
det(A) = 0
```

```
det(A)  
ans =  
      0  
  
rank(A)  
ans =  
      2
```

```
>> doc inv  
>> doc det  
>> doc rank  
>> doc cond
```

Ters çevrilebilirlik, rank, determinant, durum numarası (condition number)

cond(A) ne kadar büyük olursa lineer sistem o kadar kötü koşulludur ve çözüm o kadar az güvenilirdir.

```
A = [1, 5, 4  
      2, 7 + 1e-8, 5  
      3, 9, 6]
```

```
cond(A)  
ans =  
      3.2227e+009
```

```
A\[1; 2; 3]
```

```
ans =  
      1  
      0  
      0
```

```
A\[1.001; 2.0002; 3.000003]
```

```
ans =  
      30150.999185  
     -30150.000183  
      30150.000683
```

```
det(A) = -6.0000e-008
```

2x2'lik bir matrisin determinantı ve tersi

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

Örnek: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$

Matrisin kuvvetleri

Genellikle lineer dinamik sistemlerin çözümünde kullanılır

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

```
A = [1 2; 3 4];  
expm(A)           % matris kuvveti  
ans =  
    51.9690    74.7366  
   112.1048   164.0738  
  
exp(A)            % terim terime kuvveti  
ans =  
    2.7183    7.3891  
   20.0855   54.5982
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

```
>> doc expm  
>> doc exp
```

Vektör & matris normu

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Bir vektörün L_1 , L_2 ve L_∞ normları

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_N]$$

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^N |x_n|$$

L_1 norm

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^N |x_n|^2}$$

L_2 norm

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|)$$

İki vektör veya matris arasında uzaklık ölçümü için kullanılır.

```
x = [1, 4, -5, 3]; p = inf;
```

```
% p = 1;
```

```
% p = 2;
```

```
switch p
```

```
case 1
```

```
    N = sum(abs(x));
```

```
% N = norm(x,1);
```

```
case 2
```

```
    N = sqrt(sum(abs(x).^2));
```

```
% N = norm(x,2);
```

```
case inf
```

```
    N = max(abs(x));
```

```
% N = norm(x,inf);
```

```
otherwise
```

```
    N = sqrt(sum(abs(x).^2));
```

```
% N = norm(x,2)
```

```
end
```

norm hazır fonksiyonunu
kullanarak eşdeğer hesaplamalar



İki vektör veya matrisi karşılaştırmak için kullanışlıdır:

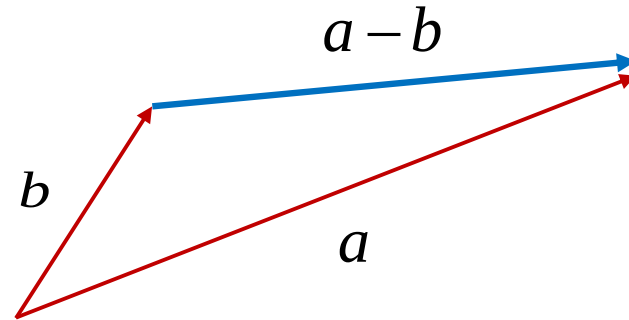
```
norm(a-b)
```

```
% a,b aynı boyutta iki vektör
```

```
norm(A-B)
```

```
% A,B aynı boyutta iki matris
```

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$



$$\|a - b\|_2 = \text{norm}(a - b)$$

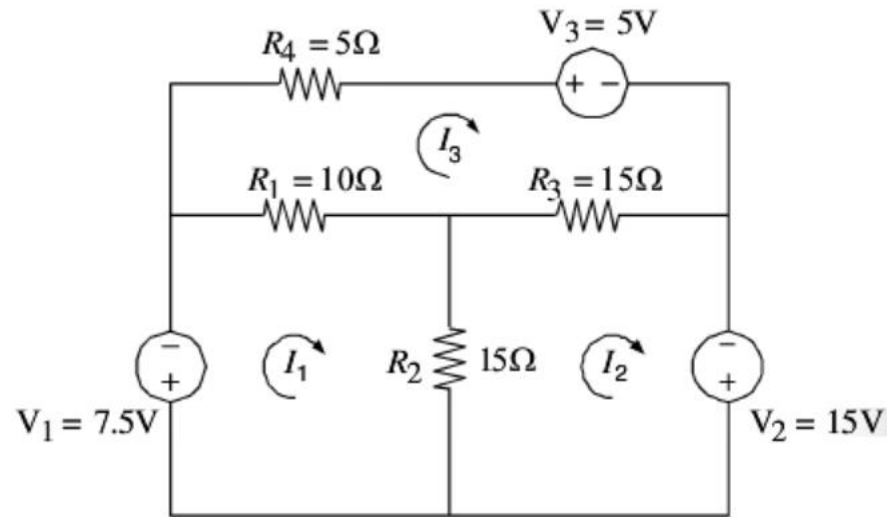
$$= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

$$= \sqrt{(a - b)'(a - b)}$$

Nokta çarpımı

Öklidyen uzaklık

Elektrik devreleri



Kirchhoff gerilim kanunu

$$R_1(I_1 - I_3) + R_2(I_1 - I_2) + V_1 = 0$$

$$R_2(I_2 - I_1) + R_3(I_2 - I_3) - V_2 = 0$$

$$R_4 I_3 + R_3(I_3 - I_2) + R_1(I_3 - I_1) + V_3 = 0$$

Elektrik devreleri

$$(R_1 + R_2)I_1 - R_2I_2 - R_1I_3 = -V_1$$

$$-R_2I_1 + (R_2 + R_3)I_2 - R_3I_3 = V_2$$

$$-R_1I_1 - R_3I_2 + (R_1 + R_3 + R_4)I_3 = -V_3$$

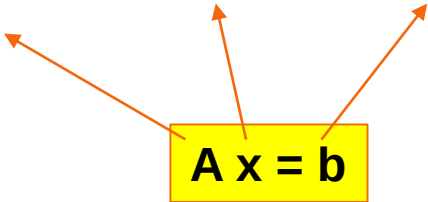
$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_1 & -R_3 & R_1 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_1 \\ V_2 \\ -V_3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = 10, R_2 = 15, R_3 = 15, R_4 = 5$$

$$V_1 = 7.5, V_2 = 15, V_3 = 10$$

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_1 & -R_3 & R_1 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_1 \\ V_2 \\ -V_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 25 & -15 & -10 \\ -15 & 30 & -15 \\ -10 & -15 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.5 \\ 15 \\ -5 \end{bmatrix}$$



A x = b

```
A = [25, -15, -10; -15, 30, -15; -10, -15, 30]
```

```
b = [-7.5; 15; -5]
```

```
A =
```

```
    25    -15    -10  
   -15     30    -15  
   -10    -15     30
```

```
b =
```

```
   -7.5000  
   15.0000  
   -5.0000
```

```
x = A\b
```

```
x =
```

```
    0.5000  
    1.0000  
    0.5000
```

$$x = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

```
inv(A)
```

```
ans =
```

```
0.2571    0.2286    0.2000  
0.2286    0.2476    0.2000  
0.2000    0.2000    0.2000
```

```
inv(sym(A)) --> (1/105) * [27    24    21  
                          24    26    21  
                          21    21    21]
```

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{105} \begin{bmatrix} 27 & 24 & 21 \\ 24 & 26 & 21 \\ 21 & 21 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.5 \\ 15 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$