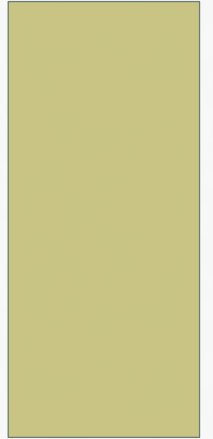


KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Arş. Gör. Dr. Fatih Aylıkçı



KAYNAK KİTAP

- **Numerical Analysis**; Richard L. Burden, J. Douglas Faires
- Aşağıdaki linkten kitabı indirebilirsiniz:
- https://fac.ksu.edu.sa/sites/default/files/numerical_analysis_9th.pdf
- Bu derste yukarıda bahsedilen kitabın 11. ve 12. bölümleri işlenecektir.

KONULAR

- **1. Sınır Değer Problemleri**
 - Lineer Atış Metodu
 - Nonlinear Problemler için Atış Metodu
 - Lineer Problemler için Sonlu Farklar Metodu
 - Nonlinear Problemler için Sonlu Farklar Metodu
- **2. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri**
 - Sınıflandırma: Eliptik, Parabolik, Hiperbolik
 - Eliptik KDD (Laplace denklemi, Poisson denklemi)
 - Parabolik KDD (Isı denklemi)
 - Hiperbolik KDD (Dalga denklemi)

MATLAB KURULUMU

- <https://ww2.mathworks.cn/en/>
- Öncelikle yukarıdaki linkten siteye yıldız e-mail'iniz ve kendiniz belirleyeceğiniz bir şifre ile kayıt olmanız gereklidir.
- Sonra <http://distro.cc.yildiz.edu.tr/> linkinden Diğer Önemli Araçlar klasöründen MATLAB'ın kurulumunu başlatmanız gereklidir.
- Kurulum yaparken sizden bir aktivasyon seçeneği seçmeniz istenecek. 'İnternet yardımıyla' seçeneği ile birlikte siteye üye olduğunuz yıldız e-mail'iniz ve şifrenizi girmeniz gereklidir. Kurulum yaklaşık olarak yarım saat sürmektedir.

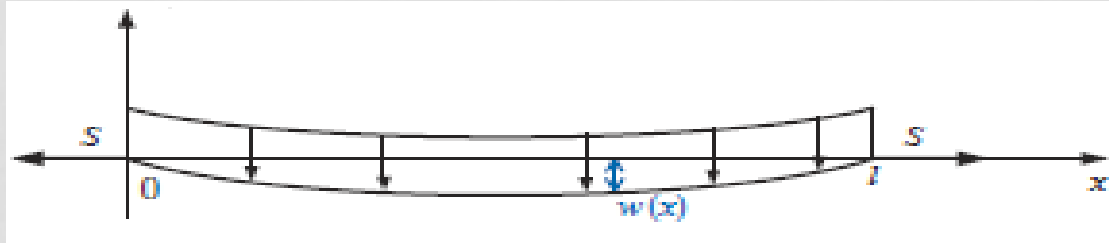
DERSTE MATLAB KULLANIMI

- Derste öncelikle nümerik çözümlerin teorisi anlatılacaktır. Tüm bu çözümlerin MATLAB algoritmaları verilecektir.
- Sınavlarda MATLAB programlama dilini ne kadar öğrendiğiniz değil nümerik çözümlerin teorisini ne kadar öğrenmiş olduğunuz ölçülecektir.
- Ama MATLAB'ı bilgisayarınıza kurmanız önemlidir. Çünkü programlama derslerinden zaten aşina olduğunuz kodlar üzerinden bir anlatım yapılacaktır.

1. HAFTA

SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ

- İnşaat mühendisliğinde sık karşılaşılan bir problem uçları saptmaya maruz kalmayacak şekilde desteklenen düzgün bir yüklemeye maruz kalan dikdörtgen kesitli bir kirişin saptmasıyla ilgilidir.



- L , q , E , S ve I sırasıyla kirişin uzunluğunu, düzgün yüklemenin yoğunluğunu, elastisite modülünü, uç noktalarındaki gerilmeyi ve merkezi atalet momentini simgelemektedir.

SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ

- Bu fiziksel duruma yaklaşan diferansiyel denklem şu şekildedir:

$$\frac{d^2\omega}{dx^2}(x) = \frac{S}{EI}\omega(x) + \frac{qx}{2EI}(x - l)$$

- Burada $\omega(x)$ kirişin sol ucundan x uzaklığı kadar olan sapmadır. Kirişin uçlarında sapma meydana gelmediğinden iki sınır koşulu vardır:

$$\omega(0) = 0 \quad \text{ve} \quad \omega(l) = 0$$

Bu bir sınır-değer problemidir.

SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ

- İki farklı noktada koşulları olan diferansiyel denklemlerin yani sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümlerine nasıl ulaşacağımızı göstereceğiz.
- Birinci mertebeden diferansiyel denklemler için yalnızca bir koşul verilebilir, bu durumda başlangıç-değer ve sınır-değer problemi arasında bir fark kalmaz. Bu yüzden iki sınır koşullu ikinci mertebeden denklemleri dikkate alacağız.

SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ

- Zamana bağlı olmaktan ziyade yola bağımlı fiziksel problemler genellikle birden fazla noktada uygulanan koşullara sahip diferansiyel denklemler olarak tanımlanır.
- İki noktalı sınır değer problemleri ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem içerir:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b$$

- ve sınır koşulları:

$$y(a) = \alpha \quad \text{ve} \quad y(b) = \beta$$

1. LİNEER ATIŞ METODU (LINEAR SHOOTING METHOD)

- **Teorem 1.1:** $y'' = f(x, y, y')$, $a \leq x \leq b$, $y(a) = \alpha$ ve $y(b) = \beta$ sınır-değer problemindeki f fonksiyonu

$$D = \{(x, y, y') \mid a \leq x \leq b \text{ için, } -\infty < y < \infty \text{ ve } -\infty < y' < \infty\}$$

kümesi üzerinde sürekli ve f_y ve $f_{y'}$ kısmi türevleri D üzerinde sürekli olsun. Eğer

- i) Tüm $(x, y, y') \in D$ için $f_y(x, y, y') > 0$ sağlanıyorsa ve
- ii) Tüm $(x, y, y') \in D$ için $|f_{y'}(x, y, y')| \leq M$ sağlayan bir M sabiti varsa sınır-değer probleminin tek çözümü vardır.

1. LİNEER ATIŞ METODU (LINEAR SHOOTING METHOD)

- **Örnek 1.** $y'' + e^{-xy} + \sin y' = 0, 1 \leq x \leq 2, y(1) = y(2) = 0$
sınır-değer probleminin tek çözümü vardır.

Çözüm:

$$f(x, y, y') = -e^{-xy} - \sin y'$$

Tüm $x \in [1, 2]$ için,

$$f_y(x, y, y') = xe^{-xy} > 0 \text{ ve } |f_{y'}(x, y, y')| = |-\cos y'| \leq 1$$

olduğundan Teorem 1.1'e göre problemin tek çözümü vardır.

LİNEER SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ

$$y'' = f(x, y, y')$$

- diferansiyel denklemi,

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

- olacak biçimde $p(x), q(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları varsa lineerdir.

LİNEER SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ

- **Sonuç 1.1:**

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), a \leq x \leq b, y(a) = \alpha \text{ ve } y(b) = \beta$$

lineer sınır-değer probleminin

i) $p(x), q(x)$ ve $r(x), [a, b]$ üzerinde sürekliyse ve

ii) $[a, b]$ üzerinde $q(x) > 0$ ise

tek çözümü vardır.

LİNEER SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ

- Bu lineer problemin tek olan sonucunu

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), a \leq x \leq b, y(a) = \alpha \text{ ve } y'(a) = 0,$$

ve

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, a \leq x \leq b, y(a) = 0 \text{ ve } y'(a) = 1.$$

başlangıç-değer problemlerini kullanarak

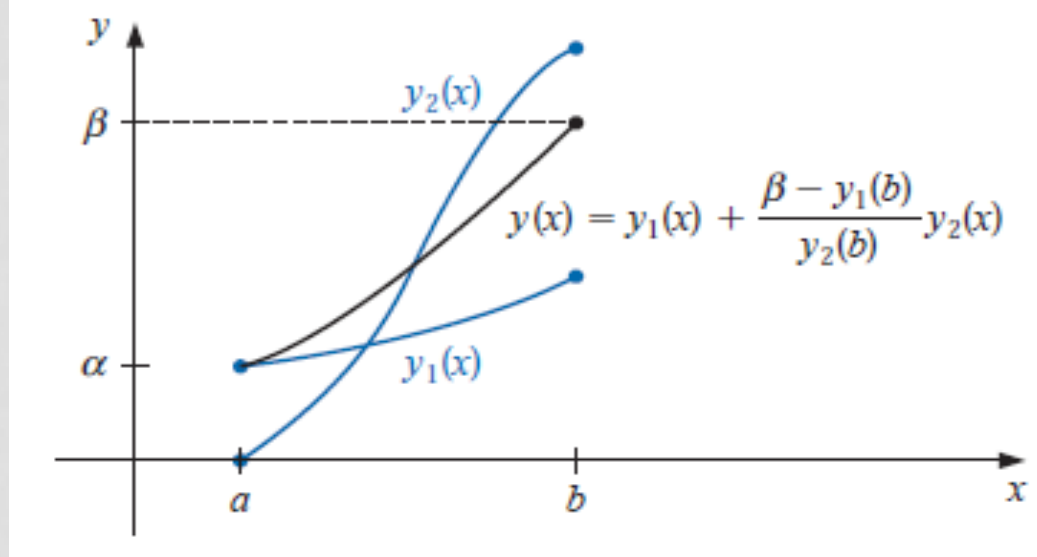
(ilk denklemin çözümü $y_1(x)$, ikinci denklemin çözümü $y_2(x)$ olmak üzere)

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x), y_2(b) \neq 0$$

biçiminde bulabiliriz.

LİNEER ATIŞ METODU

- Lineer denklemler için atış metodu lineer sınır-değer probleminin bir önceki slaytta verilen iki başlangıç-değer problemi ile yer değiştirilmesi biçiminde uygulanır.



GEREKLİ BİLGİLER 1

İKİNCİ MERTEBEDEN BİR DENKLEMİ BİRİNCİ MERTEBEDEN DENKLEM SİSTEMİNE İNDİRGEME

- İkinci basamaktan bir başlangıç değer problemi

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = r(x),$$
$$y(x_0) = b_0, y'(x_0) = b_1$$

biçiminde verilmiş olsun. Bu ikinci mertebeden başlangıç değer problemi iki adet birinci mertebeden denklem içeren bir sisteme dönüştürülebilir.

$u_1 = y$ olsun. Böylece,

$$u_1' = y' = u_2, u_1(x_0) = b_0,$$

$$u_2' = y'' = \frac{1}{a_0(x)}(r(x) - a_1(x)y'(x) - a_2(x)y(x))$$
$$= \frac{1}{a_0(x)}(r(x) - a_1(x)u_2 - a_2(x)u_1), u_2(x_0) = b_1$$

GEREKLİ BİLGİLER 1

İKİNCİ MERTEBEDEN BİR DENKLEMİ BİRİNCİ MERTEBEDEN DENKLEM SİSTEMİNE İNDİRGEME

- $f_2(x, u_1, u_2) = \frac{1}{a_0(x)}(r(x) - a_1(x)u_2 - a_2(x)u_1)$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} u_2 \\ f_2(x, u_1, u_2) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(x_0) \\ u_2(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

biçiminde verilebilir.

Örnek: i) $2y'' - 5y' + 6y = 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

ii) $x^2y'' + (2x + 1)y' + 3y = 6$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0.5$

ikinci mertebeden denklemler içeren başlangıç-değer problemlerini birinci mertebeden denklem sistemlerine dönüştürelim.

GEREKLİ BİLGİLER 1

İKİNCİ MERTEBEDEN BİR DENKLEMİ BİRİNCİ MERTEBEDEN DENKLEM SİSTEMİNE İNDİRGEME

- **Çözüm: i)** $u_1 = y$ olsun. O halde,

$$u_1' = u_2, \quad u_1(0) = 1,$$

$$u_2' = \frac{1}{2}(3x + 5y' - 6y) = \frac{1}{2}(3x + 5u_2 - 6u_1), \quad u_2(0) = 2$$

sistemi elde edilir. Bu sistem,

$$f_1(x, u_1, u_2) = u_2, \quad f_2(x, u_1, u_2) = (3x + 5u_2 - 6u_1) / 2$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} f_1(x, u_1, u_2) \\ f_2(x, u_1, u_2) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir.

GEREKLİ BİLGİLER 1

İKİNCİ MERTEBEDEN BİR DENKLEMİ BİRİNCİ MERTEBEDEN DENKLEM SİSTEMİNE İNDİRGEME

- **Çözüm: ii)** $u_1 = y$ olsun. O halde,

$$u_1' = u_2, \quad u_1(1) = 2,$$

$$u_2' = \frac{1}{x^2} (6 - (2x+1)y' - 3y) = \frac{1}{x^2} (6 - (2x+1)u_2 - 3u_1), \quad u_2(1) = 0.5$$

sistemi elde edilir. Bu sistem,

$$f_1(x, u_1, u_2) = u_2, \quad f_2(x, u_1, u_2) = (6 - (2x+1)u_2 - 3u_1) / x^2$$

olmak üzere

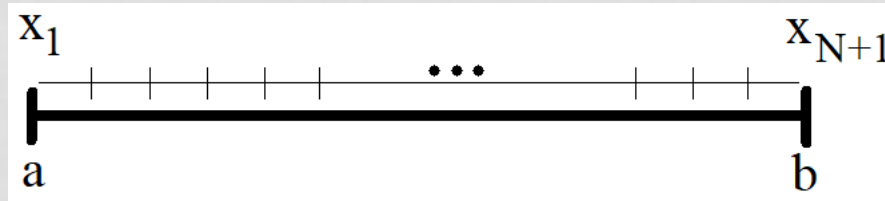
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} f_1(x, u_1, u_2) \\ f_2(x, u_1, u_2) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir.

GEREKLİ BİLGİLER 2

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN RUNGE KUTTA METODU

- Öncelikle çözüm aralığı N tane alt aralığa bölünür.



Adım uzunluğu $h = (b - a) / N$ olmak üzere dördüncü mertebeden Runge Kutta metodu ($y' = f(x, y)$)

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3),$$

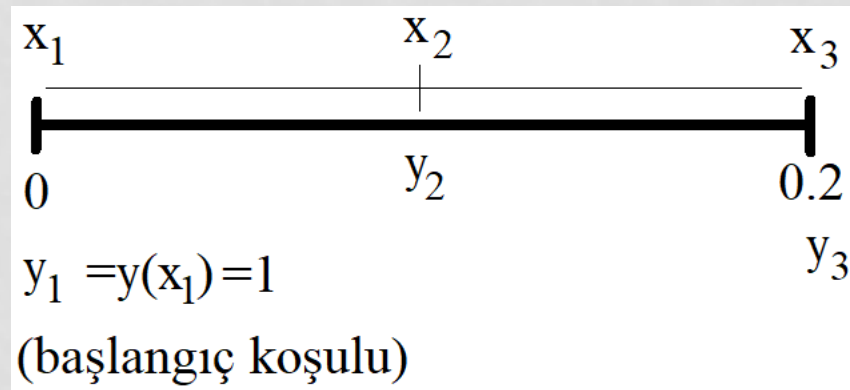
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

biçiminde tanımlıdır.

GEREKLİ BİLGİLER 2

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN RUNGE KUTTA METODU

- **Örnek:** $y' = x^2 - y$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemi için $h = 0.1$, $N = 2$ alarak dördüncü mertebeden Runge Kutta metodunu uygulayalım. Elde edilen sonuçları $y(x) = -e^{-x} + x^2 - 2x + 2$ analitik çözüm sonuçları ile kıyaslayalım.
- **Çözüm:**



GEREKLİ BİLGİLER 2

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN RUNGE KUTTA METODU

$$k_1 = 0.1(x_1^2 - y_1) = -0.1, \quad k_2 = 0.1((x_1 + 0.05)^2 - (y_1 + (-0.05))) = -0.0948,$$

$$k_3 = 0.1((x_1 + 0.05)^2 - (y_1 + (-0.0474))) = -0.0950,$$

$$k_4 = 0.1((x_1 + 0.1)^2 - (y_1 + (-0.52375))) = -0.0895,$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.9052$$

$$k_1 = 0.1(x_2^2 - y_2) = -0.0895, \quad k_2 = 0.1((x_2 + 0.05)^2 - (y_2 + (-0.0448))) = -0.0838,$$

$$k_3 = 0.1((x_2 + 0.05)^2 - (y_2 + (-0.0419))) = -0.0841,$$

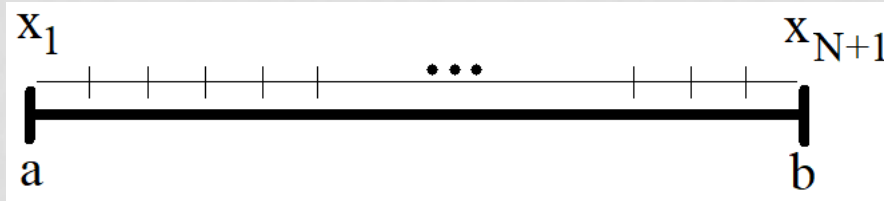
$$k_4 = 0.1((x_2 + 0.1)^2 - (y_2 + (-0.52375))) = -0.0781,$$

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.8213$$

LİNEER ATIŞ METODU

- 1. $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$, $a \leq x \leq b$, $y(a) = \alpha$ ve $y'(a) = 0$,
 $u_1 = y$, $u_2 = y'$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ p(x)u_2 + q(x)u_1 + r(x) \end{bmatrix}, \quad u_1(a) = \alpha, u_2(a) = 0$$



$$h = \frac{b-a}{N}$$

LİNEER ATIŞ METODU

$$k_{11,i} = hu_{2,i},$$

$$k_{21,i} = h \left(u_{2,i} + \frac{k_{12,i}}{2} \right),$$

$$k_{31,i} = h \left(u_{2,i} + \frac{k_{22,i}}{2} \right),$$

$$k_{41,i} = h(u_{2,i} + k_{32,i}),$$

$$u_{1,i+1} = u_{1,i} + \frac{1}{6}(k_{11,i} + 2k_{21,i} + 2k_{31,i} + k_{41,i})$$

$$k_{12,i} = h(p(x_i)u_{2,i} + q(x_i)u_{1,i} + r(x_i))$$

$$k_{22,i} = h \left(p \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \left(u_{2,i} + \frac{k_{12,i}}{2} \right) + q \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \left(u_{1,i} + \frac{k_{11,i}}{2} \right) + r \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \right)$$

$$k_{32,i} = h \left(p \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \left(u_{2,i} + \frac{k_{22,i}}{2} \right) + q \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \left(u_{1,i} + \frac{k_{21,i}}{2} \right) + r \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \right)$$

$$k_{42,i} = h(p(x_i + h)(u_{2,i} + k_{32,i}) + q(x_i + h)(u_{1,i} + k_{31,i}) + r(x_i + h))$$

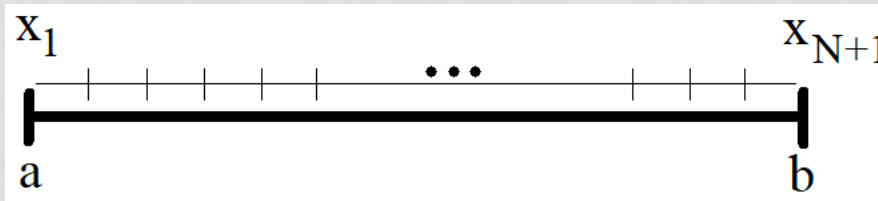
$$u_{2,i+1} = u_{2,i} + \frac{1}{6}(k_{12,i} + 2k_{22,i} + 2k_{32,i} + k_{42,i})$$

LİNEER ATIŞ METODU

- **2.** $y'' = p(x)y' + q(x)y$, $a \leq x \leq b$, $y(a) = 0$ ve $y'(a) = 1$.

$v_1 = y$, $v_2 = y'$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ p(x)v_2 + q(x)v_1 \end{bmatrix}, \quad v_1(a) = 0, v_2(a) = 1$$



$$h = \frac{b-a}{N}$$

LİNEER ATIŞ METODU

$$k_{11,i}^* = h v_{2,i},$$

$$k_{21,i}^* = h \left(v_{2,i} + \frac{k_{12,i}^*}{2} \right),$$

$$k_{31,i}^* = h \left(v_{2,i} + \frac{k_{22,i}^*}{2} \right),$$

$$k_{41,i}^* = h \left(v_{2,i} + k_{32,i}^* \right),$$

$$v_{1,i+1} = v_{1,i} + \frac{1}{6} (k_{11,i}^* + 2k_{21,i}^* + 2k_{31,i}^* + k_{41,i}^*)$$

$$k_{12,i}^* = h \left(p(x_i) v_{2,i} + q(x_i) v_{1,i} \right)$$

$$k_{22,i}^* = h \left(p \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \left(v_{2,i} + \frac{k_{12,i}^*}{2} \right) + q \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \left(v_{1,i} + \frac{k_{11,i}^*}{2} \right) \right)$$

$$k_{32,i}^* = h \left(p \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \left(v_{2,i} + \frac{k_{22,i}^*}{2} \right) + q \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \left(v_{1,i} + \frac{k_{21,i}^*}{2} \right) \right)$$

$$k_{42,i}^* = h \left(p(x_i + h) (v_{2,i} + k_{32,i}^*) + q(x_i + h) (v_{1,i} + k_{31,i}^*) \right)$$

$$v_{2,i+1} = v_{2,i} + \frac{1}{6} (k_{12,i}^* + 2k_{22,i}^* + 2k_{32,i}^* + k_{42,i}^*)$$

LİNEER ATIŞ METODU

- Metoda göre N tane iterasyon yapılır. Burada 1. denklemin çözümündeki $u_1, y_1(x)$ 'tir. 2. denklemin çözümündeki $v_1, y_2(x)$ 'tir. Aynı şekilde $u_2, y_1'(x)$ 'tir; v_2 de $y_2'(x)$ 'tir. O halde $w_{1,i} = y(x_i)$ ve $w_{2,i} = y'(x_i)$ olmak üzere

$$w_{1,i} = u_{1,i} + \frac{\beta - u_{1,N+1}}{v_{1,N+1}} v_{1,i}$$
$$w_{2,i} = u_{2,i} + \frac{\beta - u_{1,N+1}}{v_{1,N+1}} v_{2,i}$$

olacaktır.

METODUN ALGORİTMASI

$$-y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0, a \leq x \leq b, y(a) = \alpha \text{ ve } y(b) = \beta$$

sınır değer probleminin çözümü için 4. mertebeden Runge Kutta tekniği kullanılacak.

GİRDİ: a, b sınır noktaları; α, β sınır koşulları; N alt aralık sayısı

ÇIKTI: $y(x_i)$ için $w_{1,i}$ yaklaşımı; $y'(x_i)$ için $w_{2,i}$ yaklaşımı
(her bir $i = 0, 1, \dots, N$ için)

Adım 1 $h = (b - a) / N;$

$$u_{1,0} = \alpha; u_{2,0} = 0; v_{1,0} = 0; v_{2,0} = 1.$$

METODUN ALGORİTMASI

Adım 2 $i = 0, \dots, N - 1$ için Adım 3 ve Adım 4 yapılır.

Adım 3 $x = a + ih$.

Adım 4

$$k_{1,1} = hu_{2,i};$$
$$k_{1,2} = h(p(x)u_{2,i} + q(x)u_{1,i} + r(x));$$
$$k_{2,1} = h\left(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right);$$
$$k_{2,2} = h\left(p(x + h/2)\left(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right) + q(x + h/2)\left(u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{1,1}\right) + r(x + h/2)\right);$$
$$k_{3,1} = h\left(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}\right);$$
$$k_{3,2} = h\left(p(x + h/2)\left(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}\right) + q(x + h/2)\left(u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{2,1}\right) + r(x + h/2)\right);$$
$$k_{4,1} = h(u_{2,i} + k_{3,2});$$
$$k_{4,2} = h(p(x + h)(u_{2,i} + k_{3,2}) + q(x + h)(u_{1,i} + k_{3,1}) + r(x + h));$$
$$u_{1,i+1} = u_{1,i} + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1});$$
$$u_{2,i+1} = u_{2,i} + \frac{1}{6}(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2});$$

METODUN ALGORİTMASI

$$k'_{1,1} = hv_{2,i};$$

$$k'_{1,2} = h \left(p(x)v_{2,i} + q(x)v_{1,i} \right);$$

$$k'_{2,1} = h \left(v_{2,i} + \frac{1}{2} k'_{1,2} \right);$$

$$k'_{2,2} = h \left(p(x + h/2) \left(v_{2,i} + \frac{1}{2} k'_{1,2} \right) + q(x + h/2) \left(v_{1,i} + \frac{1}{2} k'_{1,1} \right) \right);$$

$$k'_{3,1} = h \left(v_{2,i} + \frac{1}{2} k'_{2,2} \right);$$

$$k'_{3,2} = h \left(p(x + h/2) \left(v_{2,i} + \frac{1}{2} k'_{2,2} \right) + q(x + h/2) \left(v_{1,i} + \frac{1}{2} k'_{2,1} \right) \right);$$

$$k'_{4,1} = h \left(v_{2,i} + k'_{3,2} \right);$$

$$k'_{4,2} = h \left(p(x + h) \left(v_{2,i} + k'_{3,2} \right) + q(x + h) \left(v_{1,i} + k'_{3,1} \right) \right);$$

$$v_{1,i+1} = v_{1,i} + \frac{1}{6} \left(k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1} \right);$$

$$v_{2,i+1} = v_{2,i} + \frac{1}{6} \left(k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2} \right);$$

METODUN ALGORİTMASI

- **Adım 5** $w_{1,0} = \alpha;$

$$w_{2,0} = \frac{\beta - u_{1,N}}{v_{1,N}};$$

çıktı: $(a, w_{1,0}, w_{2,0}).$

- **Adım 6** $i = 1, \dots, N$

$$W1 = u_{1,i} + w_{2,0}v_{1,i};$$

$$W2 = u_{2,i} + w_{2,0}v_{2,i};$$

$$x = a + ih;$$

çıktı: $(x, W1, W2).$ (Çıktı $x_i, w_{1,i}, w_{2,i}$ dir.)

METODUN ALGORİTMASI

- **ÖRNEK 2.**

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 1, y(2) = 2$$

sınır-değer problemine N=10 için lineer atış metodu uygulayalım ve sonuçları analitik çözüm ile karşılaştıralım. Analitik çözüm;

$$y = c_1x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln x) - \frac{1}{10}\cos(\ln x),$$

$$c_2 = \frac{1}{70}(8 - 12\sin(\ln 2) - 4\cos(\ln 2)) \approx -0.03920701320$$

$$c_1 = \frac{11}{10} - c_2 \approx 1.1392070132$$

METODUN ALGORİTMASI

- Problemin çözümü için aşağıdaki başlangıç-değer problemlerinin çözümü yapılacaktır:

$$y_1'' = -\frac{2}{x} y_1' + \frac{2}{x^2} y_1 + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, 1 \leq x \leq 2, \quad y_1(1) = 1, y_1'(1) = 0,$$

$$y_2'' = -\frac{2}{x} y_2' + \frac{2}{x^2} y_2, 1 \leq x \leq 2, \quad y_2(1) = 0, y_2'(1) = 1.$$

- $N=10$ ve $h=0.1$ için bir sonraki slayttaki tablo oluşturulabilir:

$$y(x_i) = y_1(x_i) + \frac{2 - y_1(2)}{y_2(2)} y_2(x_i).$$

METODUN ALGORİTMASI

x_i	$u_{1,i} \approx y_1(x_i)$	$v_{1,i} \approx y_2(x_i)$	$w_i \approx y(x_i)$	$y(x_i)$	$ y(x_i) - w_i $
1.0	1.00000000	0.00000000	1.00000000	1.00000000	
1.1	1.00896058	0.09117986	1.09262917	1.09262930	1.43×10^{-7}
1.2	1.03245472	0.16851175	1.18708471	1.18708484	1.34×10^{-7}
1.3	1.06674375	0.23608704	1.28338227	1.28338236	9.78×10^{-8}
1.4	1.10928795	0.29659067	1.38144589	1.38144595	6.02×10^{-8}
1.5	1.15830000	0.35184379	1.48115939	1.48115942	3.06×10^{-8}
1.6	1.21248372	0.40311695	1.58239245	1.58239246	1.08×10^{-8}
1.7	1.27087454	0.45131840	1.68501396	1.68501396	5.43×10^{-10}
1.8	1.33273851	0.49711137	1.78889854	1.78889853	5.05×10^{-9}
1.9	1.39750618	0.54098928	1.89392951	1.89392951	4.41×10^{-9}
2.0	1.46472815	0.58332538	2.00000000	2.00000000	

2. NONLINEER PROBLEMLER İÇİN ATIŞ METODU

- $y'' = f(x, y, y'), a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta, \quad *$
nonlinear ikinci mertebeden sınır-değer problemleri için atış tekniği, nonlinear probleme ait çözümün iki başlangıç-değer probleminin çözümlerinin lineer bir kombinasyonu biçiminde ifade edilemediği durumlar hariç, lineer atış tekniği ile benzerdir. Bunun yerine, bir t parametresi içeren başlangıç değer problemi dizisi çözümünü kullanarak sınır-değer probleminin çözümüne yaklaşabiliriz. Bu problemler

$$y'' = f(x, y, y'), a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, y'(a) = t \quad **$$

formundadır.

NONLİNEER PROBLEMLER İÇİN ATIŞ METODU

** başlangıç-değer probleminin çözümü $y(x, t_k)$
ve * sınır-değer probleminin çözümü $y(x)$ olmak üzere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(b, t_k) = y(b) = \beta$$

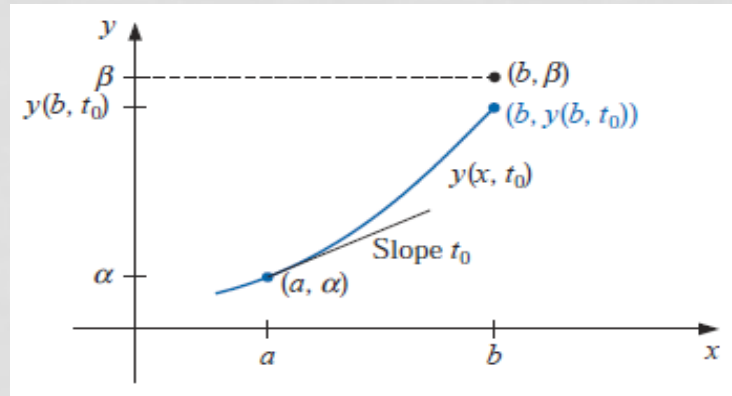
sağlayan $t = t_k$ parametreleri seçilebilir.

(a, α) noktasından başlayan ve

$$y'' = f(x, y, y'), a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, y'(a) = t_0$$

başlangıç-değer probleminin çözüm eğrisi üzerinde tanımlı başlangıç eğimini belirten t_0 parametresi ile başlanır.

NONLINEER PROBLEMLER İÇİN ATIŞ METODU



Eğer $y(b, t_0), \beta$ 'ya yeterince yakın değilse yaklaşımlara t_1, t_2 eğimlerini seçerek devam edilir, ta ki $y(b, t_k), \beta$ 'ya yeterince yaklaşıncaya kadar.

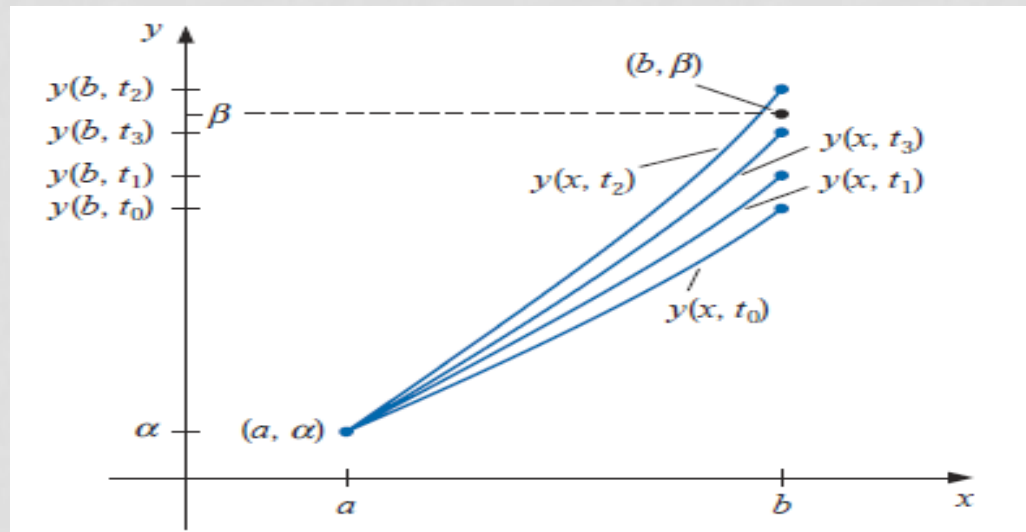
$$y(b, t) - \beta = 0$$

NONLİNEER PROBLEMLER İÇİN ATIŞ METODU

Problemın çözümü için Sekant metodunu kullanmak için t_0, t_1 başlangıç yaklaşımlarını seçmek gereklidir ve geri kalan terimler

$$t_k = t_{k-1} - \frac{(y(b, t_{k-1}) - \beta)(t_{k-1} - t_{k-2})}{y(b, t_{k-1}) - y(b, t_{k-2})}, k = 2, 3, \dots$$

ile üretilir.



NEWTON İTERASYONU

$\{t_k\}$ dizisini üretmek için daha güçlü olan Newton metodunu kullanmak için yalnızca t_0 başlangıç yaklaşımına ihtiyacımız vardır. İterasyonlar

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{\frac{dy}{dt}(b, t_{k-1})}$$

formundadır ve $(dy / dt)(b, t_{k-1})$ terimini bilmeyi gerektirir. Bu durum, $y(b, t)$ 'nin açık gösterimi bilinmediğinden zorluk yaratmaktadır. Sadece $y(b, t_0), y(b, t_1), \dots, y(b, t_{k-1})$ 'i biliyoruz.

NEWTON İTERASYONU

** başlangıç-değer problemini, çözümün hem x hem de t parametrelerine bağlı olduğunu vurgulayarak tekrar yazalım:

$$y''(x,t) = f(x, y(x,t), y'(x,t)), a \leq x \leq b, \quad y(a,t) = \alpha, y'(a,t) = t \quad ***$$

$t = t_{k-1}$ için $(dy/dt)(b,t)$ 'yi hesaplamamız gerekiyor, bu yüzden ilk olarak t 'ye göre kısmi türev alacağız:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y''}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(x, y(x,t), y'(x,t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x,t), y'(x,t)) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x,t), y'(x,t)) \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x,t), y'(x,t)) \frac{\partial y'}{\partial t}(x,t) \end{aligned}$$

NEWTON İTERASYONU

x ve t bağımsız olduğundan dolayı $\partial x / \partial t = 0$ 'dır;

$$\frac{\partial y''}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y'}{\partial t}(x, t) \quad ****$$

Başlangıç koşulları;

$$\frac{\partial y}{\partial t}(a, t) = 0, \frac{\partial y'}{\partial t}(a, t) = 1$$

$(\partial y / \partial t)(x, t)$ yerine $z(x, t)$ yazılırsa **** başlangıç-değer problemi aşağıdaki formda olur. (Türevlerin sırası değişebilir.)

$$z''(x, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')z(x, t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')z'(x, t), a \leq x \leq b, \quad *****$$

$$z(a, t) = 0, z'(a, t) = 1$$

NEWTON İTERASYONU

Bu yüzden Newton metodu iki başlangıç-değer probleminin (***, *****) her bir iterasyon için çözülmesini gerektirir. En başta verilen iterasyonlar da

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{z(b, t_{k-1})}$$

formuna dönüşür.

METODUN ÖZETİ

$$y'' = f(x, y, y'), y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

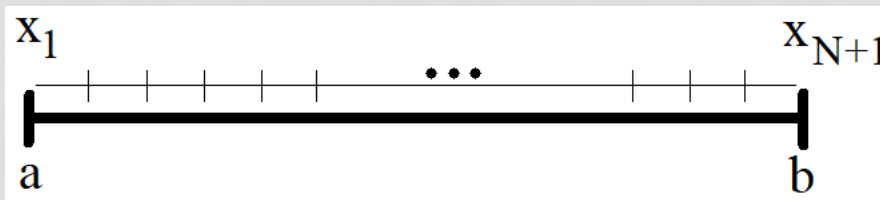
nonlinear sınır-değer probleminin çözümü için

1. $y''(x, t) = f(x, y(x, t), y'(x, t)), y(a, t) = \alpha, y'(a, t) = t_0$

$$t_0 = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \text{ ile başlanır.}$$

$w_1 = y, w_2 = y'$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ f(x, w_1, w_2) \end{bmatrix}, \quad w_1(a) = \alpha, w_2(a) = t_0$$



$$h = \frac{b - a}{N}$$

METODUN ÖZETİ

$$k_{11,i} = hw_{2,i},$$

$$k_{21,i} = h \left(w_{2,i} + \frac{k_{12,i}}{2} \right),$$

$$k_{31,i} = h \left(w_{2,i} + \frac{k_{22,i}}{2} \right),$$

$$k_{41,i} = h \left(w_{2,i} + k_{32,i} \right),$$

$$k_{12,i} = hf \left(x_i, w_{1,i}, w_{2,i} \right)$$

$$k_{22,i} = hf \left(x_i + \frac{h}{2}, w_{1,i} + \frac{k_{11,i}}{2}, w_{2,i} + \frac{k_{12,i}}{2} \right)$$

$$k_{32,i} = hf \left(x_i + \frac{h}{2}, w_{1,i} + \frac{k_{21,i}}{2}, w_{2,i} + \frac{k_{22,i}}{2} \right)$$

$$k_{42,i} = hf \left(x_i + h, w_{1,i} + k_{31,i}, w_{2,i} + k_{32,i} \right)$$

$$w_{1,i+1} = w_{1,i} + \frac{1}{6}(k_{11,i} + 2k_{21,i} + 2k_{31,i} + k_{41,i}) \quad w_{2,i+1} = w_{2,i} + \frac{1}{6}(k_{12,i} + 2k_{22,i} + 2k_{32,i} + k_{42,i})$$

METODUN ÖZETİ

- 2. 1. denklemden her iki tarafta t 'ye göre türev alınırsa ve $dy''/dt = z$ kısaltması yapılırsa

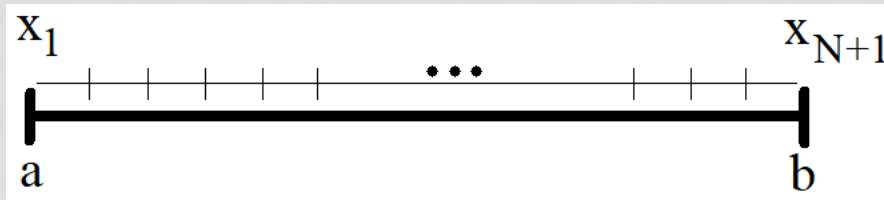
$$z''(x,t) = f_y(x, y(x,t), y'(x,t))z(x,t) + f_{y'}(x, y(x,t), y'(x,t))z'(x,t)$$

$$z(a,t) = 0, z'(a,t) = 1$$

başlangıç-değer problemi elde edilir.

$u_1 = z, u_2 = z'$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ f_y(x, w_1, w_2)u_1 + f_{y'}(x, w_1, w_2)u_2 \end{bmatrix}, \quad u_1(a) = 0, u_2(a) = 1$$



$$h = \frac{b-a}{N}$$

METODUN ÖZETİ

$$k_{11,i}^* = hu_{2,i},$$

$$k_{21,i}^* = h \left(u_{2,i} + \frac{k_{12,i}^*}{2} \right),$$

$$k_{31,i}^* = h \left(u_{2,i} + \frac{k_{22,i}^*}{2} \right),$$

$$k_{41,i}^* = h(u_{2,i} + k_{32,i}^*),$$

$$u_{1,i+1} = u_{1,i} + \frac{1}{6}(k_{11,i}^* + 2k_{21,i}^* + 2k_{31,i}^* + k_{41,i}^*)$$

$$k_{12,i}^* = h \left(f_y(x_i, w_{1,i}, w_{2,i})u_{1,i} + f_{y'}(x_i, w_{1,i}, w_{2,i})u_{2,i} \right)$$

$$k_{22,i}^* = h \left(f_y \left(x_i + \frac{h}{2}, w_{1,i}, w_{2,i} \right) \left(u_{1,i} + \frac{k_{11,i}^*}{2} \right) + f_{y'} \left(x_i + \frac{h}{2}, w_{1,i}, w_{2,i} \right) \left(u_{2,i} + \frac{k_{12,i}^*}{2} \right) \right)$$

$$k_{32,i}^* = h \left(f_y \left(x_i + \frac{h}{2}, w_{1,i}, w_{2,i} \right) \left(u_{1,i} + \frac{k_{21,i}^*}{2} \right) + f_{y'} \left(x_i + \frac{h}{2}, w_{1,i}, w_{2,i} \right) \left(u_{2,i} + \frac{k_{22,i}^*}{2} \right) \right)$$

$$k_{42,i}^* = h \left(f_y(x_i + h, w_{1,i}, w_{2,i})(u_{1,i} + k_{31,i}^*) + f_{y'}(x_i + h, w_{1,i}, w_{2,i})(u_{2,i} + k_{32,i}^*) \right)$$

$$u_{2,i+1} = u_{2,i} + \frac{1}{6}(k_{12,i}^* + 2k_{22,i}^* + 2k_{32,i}^* + k_{42,i}^*)$$

METODUN ÖZETİ

- Metoda göre $y(b,t) - \beta$ değerinin yeterince küçük olması gereklidir. Bu değeri tolerans yani TOL parametresi ile ifade edersek çözümde w_1 'in y 'yi simgelediği gerçeği ile birlikte

$$|w_1(N+1) - \beta| < TOL$$

olana kadar iterasyonlara devam etmeliyiz.

İterasyona devamı ise t parametresine Newton metodu uygulayarak sağlarız, yani

$$t(k) = t(k-1) - \frac{w_1(N+1) - \beta}{u_1(N+1)}$$

İterasyona devam şartlarından bir diğeri de iterasyon sayısıdır (M). Yani $k > M$ olunca iterasyonlar durmalıdır.

NEWTON METODU İLE NONLİNEER ATIŞIN ALGORİTMASI

$$y'' = f(x, y, y'), a \leq x \leq b, y(a) = \alpha \text{ ve } y(b) = \beta$$

sınır değer probleminin çözümü için *** ve *****
problemleri birinci mertebeden sistemlere
dönüştürülüp çözülecek.

GİRDİ: a, b sınır noktaları; α, β sınır koşulları; $N \geq 2$ alt aralık sayısı;

TOL tolerans; M maksimum iterasyon sayısı

ÇIKTI: $y(x_i)$ için $w_{1,i}$ yaklaşımı; $y'(x_i)$ için $w_{2,i}$ yaklaşımı

(her bir $i = 0, 1, \dots, N$ için veya maksimum iterasyon
sayısının aşıldığı mesajı)

NEWTON METODU İLE NONLİNEER ATIŞIN ALGORİTMASI

- **Adım 1** $h = (b - a) / N;$
 $k = 1;$
 $TK = (\beta - \alpha) / (b - a).$
- **Adım 2** $(k \leq M)$ oldukça Adım 3 - Adım 10 tekrarlanır.
- **Adım 3** $w_{1,0} = \alpha;$
 $w_{2,0} = TK;$
 $u_1 = 0;$
 $u_2 = 1.$

NEWTON METODU İLE NONLİNEER ATIŞIN ALGORİTMASI

- **Adım 4** $i = 1, \dots, N$ için Adım 5 - Adım 6 yapılır
(Adım 5 - Adım 6'da sistemler için Runge Kutta metodu kullanılır.)
- **Adım 5** $x = a + (i - 1)h.$

NEWTON METODU İLE NONLİNEER ATIŞIN ALGORİTMASI

Adım 6

$$k_{1,1} = hw_{2,i-1};$$

$$k_{1,2} = hf(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1});$$

$$k_{2,1} = h\left(w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right);$$

$$k_{2,2} = hf\left(x + h/2, w_{1,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right);$$

$$k_{3,1} = h\left(w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,2}\right);$$

$$k_{3,2} = hf\left(x + h/2, w_{1,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,2}\right);$$

$$k_{4,1} = h(w_{2,i-1} + k_{3,2});$$

$$k_{4,2} = hf(x + h, w_{1,i-1} + k_{3,1}, w_{2,i-1} + k_{3,2});$$

$$w_{1,i} = w_{1,i-1} + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1});$$

$$w_{2,i} = w_{2,i-1} + \frac{1}{6}(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2});$$

NEWTON METODU İLE NONLİNEER ATIŞIN ALGORİTMASI

$$k'_{1,1} = hu_2;$$

$$k'_{1,2} = h \left(f_y(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})u_1 + f_{y'}(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})u_2 \right);$$

$$k'_{2,1} = h \left(u_2 + \frac{1}{2}k'_{1,2} \right);$$

$$k'_{2,2} = h \left(f_y \left(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1} \right) \left(u_1 + \frac{1}{2}k'_{1,1} \right) + f_{y'} \left(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1} \right) \left(u_2 + \frac{1}{2}k'_{1,2} \right) \right);$$

$$k'_{3,1} = h \left(u_2 + \frac{1}{2}k'_{2,2} \right);$$

$$k'_{3,2} = h \left(f_y \left(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1} \right) \left(u_1 + \frac{1}{2}k'_{2,1} \right) + f_{y'} \left(x + h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1} \right) \left(u_2 + \frac{1}{2}k'_{2,2} \right) \right);$$

$$k'_{4,1} = h \left(u_2 + k'_{3,2} \right);$$

$$k'_{4,2} = h \left(f_y \left(x + h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1} \right) \left(u_1 + k'_{3,1} \right) + f_{y'} \left(x + h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1} \right) \left(u_2 + k'_{3,2} \right) \right);$$

$$u_1 = u_1 + \frac{1}{6} \left(k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1} \right);$$

$$u_2 = u_2 + \frac{1}{6} \left(k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2} \right);$$

NEWTON METODU İLE NONLİNEER ATIŞIN ALGORİTMASI

- **Adım 7** Eğer $|w_{1,N} - \beta| \leq TOL$ ise Adım 8 ve Adım 9 yapılır.
- **Adım 8** $i = 0, 1, \dots, N$ için
 - $x = a + ih;$
 - çıktı: $(x, w_{1,i}, w_{2,i})$
- **Adım 9** İşlem tamamlandı.
- **Adım 10** $TK = TK - \frac{w_{1,N} - \beta}{u_1};$
(TK'yı hesaplamak için Newton metodu kullanılır.)
 $k = k + 1.$
- **Adım 11** Çıktı: ('Maksimum iterasyon sayısı aşıldı');
(işlem başarısız.)

NEWTON METODU İLE NONLİNEER ATIŞIN ALGORİTMASI

Adım 1'de seçilen $t_0 = TK$ değeri, (a, α) ve (b, β) noktalarından geçen doğrunun eğimidir. Eğer problem Teorem 1.1'i sağlarsa herhangi bir t_0 seçimi yakınsaklığı verecektir, fakat iyi bir t_0 seçimi yakınsaklığı geliştirebilir ve prosedür bu hipotezleri sağlamayan çoğu problem için düzgün çalışır.

NEWTON METODU İLE NONLİNEER ATIŞIN ALGORİTMASI

- **ÖRNEK 2.**

$$y'' = \frac{1}{8} \left(32 + 2x^3 - yy' \right), 1 \leq x \leq 3, \quad y(1) = 17, y(3) = \frac{43}{3}$$

sınır-değer problemine Newton metodu ile atış metodunu uygulayalım.

$N = 20, M = 10, TOL = 10^{-5}$ olsun ve sonuçları $y(x) = x^2 + 16/x$ analitik çözümle karşılaştıralım.

NEWTON METODU İLE NONLİNEER ATIŞIN ALGORİTMASI

- Aşağıdaki başlangıç-değer problemlerinin her bir iterasyon adımı için yaklaşık çözümlerine ihtiyacımız var:

$$y'' = \frac{1}{8} (32 + 2x^3 - yy'), 1 \leq x \leq 3, \quad y(1) = 17, y'(1) = t_k$$

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y} z + \frac{\partial f}{\partial y'} z' = -\frac{1}{8} (y'z + yz'), 1 \leq x \leq 3, z(1) = 0, z'(a, t) = 1$$

İterasyonları durdurmak için

$$|w_{1,N}(t_k) - y(3)| \leq 10^{-5}$$

gerektiğinden 4 iterasyona ihtiyacımız var ve

$$t_4 = -14.000203.$$

Bu değer için elde edilen sonuçlar tablodadır.

NEWTON METODU İLE NONLİNEER ATIŞIN ALGORİTMASI

x_i	$w_{1,i}$	$y(x_i)$	$ w_{1,i} - y(x_i) $
1.0	17.000000	17.000000	
1.1	15.755495	15.755455	4.06×10^{-5}
1.2	14.773389	14.773333	5.60×10^{-5}
1.3	13.997752	13.997692	5.94×10^{-5}
1.4	13.388629	13.388571	5.71×10^{-5}
1.5	12.916719	12.916667	5.23×10^{-5}
1.6	12.560046	12.560000	4.64×10^{-5}
1.7	12.301805	12.301765	4.02×10^{-5}
1.8	12.128923	12.128889	3.14×10^{-5}
1.9	12.031081	12.031053	2.84×10^{-5}
2.0	12.000023	12.000000	2.32×10^{-5}
2.1	12.029066	12.029048	1.84×10^{-5}
2.2	12.112741	12.112727	1.40×10^{-5}
2.3	12.246532	12.246522	1.01×10^{-5}
2.4	12.426673	12.426667	6.68×10^{-6}
2.5	12.650004	12.650000	3.61×10^{-6}
2.6	12.913847	12.913845	9.17×10^{-7}
2.7	13.215924	13.215926	1.43×10^{-6}
2.8	13.554282	13.554286	3.46×10^{-6}
2.9	13.927236	13.927241	5.21×10^{-6}
3.0	14.333327	14.333333	6.69×10^{-6}

NEWTON METODU İLE NONLİNEER ATIŞIN ALGORİTMASI

- Atış tekniği ile birlikte kullanılan Newton metodu ek başlangıç-değer problemlerinin çözümünü gerektirmesine rağmen genel olarak Sekant metodundan daha hızlı bir yakınsaklık vermektedir. Yine de her iki metod da sadece lokal olarak yakınsaktır, çünkü iyi başlangıç yaklaşımı gerektirmektedirler.