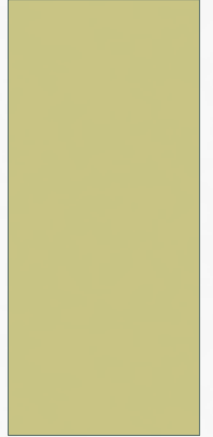


KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Arş. Gör. Dr. Fatih Aylıkçı



PARABOLİK KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < l, t > 0$$

parabolik kısmi diferansiyel denklem olan **ısı, veya difüzyon denklemini** ve

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

koşullarını düşünelim. Bu problemin çözümüne eliptik probleme uygulanan yöntemle benzer olan sonlu farklar metodu ile yaklaşacağız.

Önce $m > 0$ tamsayısını ve x için adım uzunluğu $h = l / m$ tanımlayalım. Sonra zaman adım uzunluğu k 'yi seçelim.

İLERİ SONLU FARKLAR METODU

t 'ye göre Taylor serisi açılımından (bazı $\mu_j \in (t_j, t_{j+1})$ için)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

ve x 'e göre Taylor serisi açılımından (bazı $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ için)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

elde edilir.

İLERİ SONLU FARKLAR METODU

Parabolik kısmi diferansiyel denklem her bir $i = 1, 2, \dots, m-1$ ve $j = 1, 2, \dots$ için (x_i, t_j) iç grid noktalarında sağlanan parabolik kısmi diferansiyel denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0,$$

dir ve sonlu fark formüllerinden

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

elde edilir ve burada $w_{i,j}$, $u(x_i, t_j)$ 'ye yakınsar.

İLERİ SONLU FARKLAR METODU

Burada lokal kesme hatası ise

$$\tau_{i,j} = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

dir.

$w_{i,j+1}$ yalnız bırakılırsa,

$$w_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{i,j} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (w_{i+1,j} + w_{i-1,j})$$

($i = 1, 2, \dots, m-1$ ve $j = 1, 2, \dots$ için)

elde edilir.

İLERİ SONLU FARKLAR METODU

Aşağıdaki koşulları biliyoruz:

$$w_{0,0} = f(x_0), w_{1,0} = f(x_1), \dots, w_{m,0} = f(x_m)$$

ve gelecek t satırı gelecek slayttaki gibi oluşturabiliriz:

İLERİ SONLU FARKLAR METODU

$$w_{0,1} = u(0, t_1) = 0;$$

$$w_{1,1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{1,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (w_{2,0} + w_{0,0});$$

$$w_{2,1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{2,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (w_{3,0} + w_{1,0});$$

$\vdots$

$$w_{m-1,1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{m-1,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (w_{m,0} + w_{m-2,0});$$

$$w_{m,1} = u(m, t_1) = 0;$$

İLERİ SONLU FARKLAR METODU

Sonra $w_{i,2}$ değerlerini bulmak için $w_{i,1}$ değerleri kullanılır ve bu şekilde devam edilir ve aşağıdaki tridiagonal $(m-1) \times (m-1)$ katsayılar matrisini elde ederiz.

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix},$$

Burada, $\lambda = \alpha^2 (k / h^2)$.

İLERİ SONLU FARKLAR METODU

Eğer

$$w^{(0)} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{m-1}))^t$$

ve

$$w^{(j)} = (w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{m-1,j})^t, \quad j = 1, 2, \dots$$

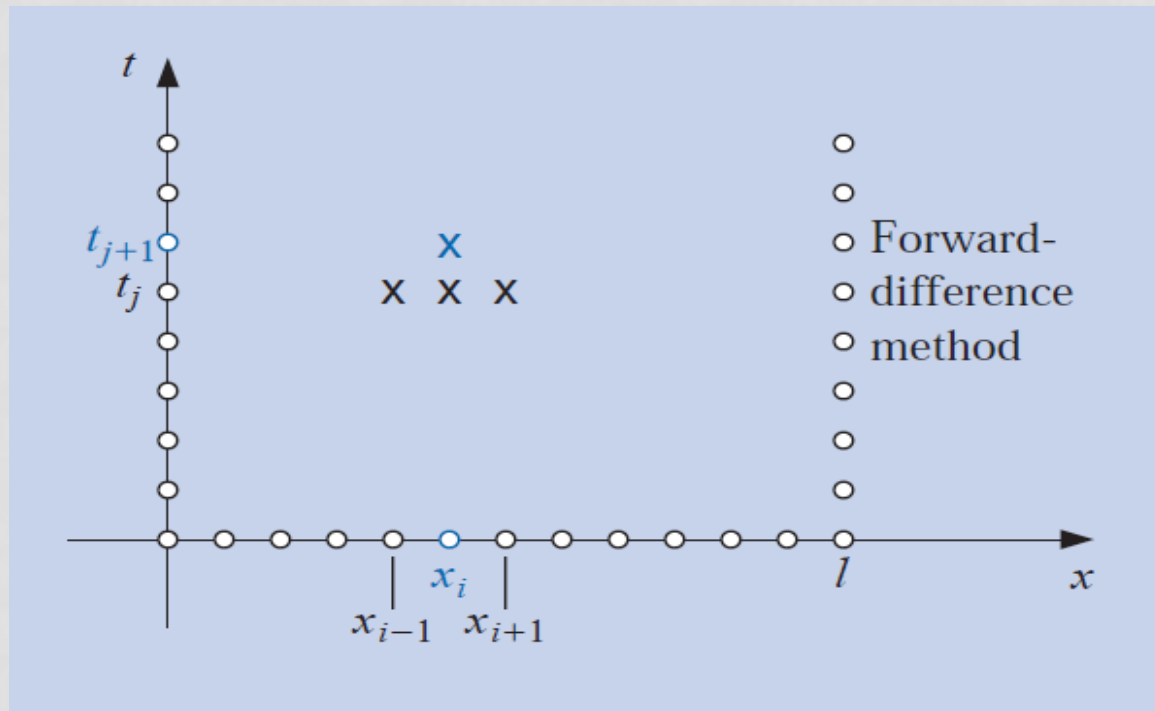
yazıldığında yaklaşık çözüm

$$w^{(j)} = Aw^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots$$

olarak elde edilir ve $w^{(j)}$, $w^{(j-1)}$ 'den basit bir matris çarpımıyla elde edilir. Bu metod **ileri sonlu fark metodudur**.

İLERİ SONLU FARKLAR METODU

Bu metodun uygulanışı aşağıdaki şekilde gösterilmiştir ve bu metod $O(k + h^2)$ mertebesinde dir:



METODUN ÖZETİ

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, t > 0$$

$$u(0, t) = f_{x0}(0, t), u(L, t) = f_{xL}(L, t)$$

$$u(x, 0) = f_{t0}(x, 0)$$

ısı denkleminin önce çözüm bölgesini grid'lere ayıralım. Soruda $t=T$ için çözüm istendiğini varsayalım. Adım uzunlukları;

$$h = \frac{L}{m}, k = \frac{T}{n} \text{ olmak üzere } x \text{ aralığını } m \text{ tane, } t$$

aralığını k tane alt aralığa böleceğiz.

METODUN ÖZETİ

	$x_1 = 0$	$x_2 = h$	$x_3 = 2h$	$\dots$	$x_m = (m-1)h$	$x_{m+1} = mh = L$	
$t_1 = 0$	$w_{1,1}$	$w_{2,1}$	$w_{3,1}$	$\dots$	$w_{m,1}$	$w_{m+1,1}$	3
$t_2 = k$	$w_{1,2}$	$w_{2,2}$	$w_{3,2}$	$\dots$	$w_{m,2}$	$w_{m+1,2}$	
$t_3 = 2k$	$w_{1,3}$	$w_{2,3}$	$w_{3,3}$	$\dots$	$w_{m,3}$	$w_{m+1,3}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$t_n = (n-1)k$	$w_{1,n}$	$w_{2,n}$	$w_{3,n}$	$\dots$	$w_{m,n}$	$w_{m+1,n}$	
$t_{n+1} = nk = T$	$w_{1,n+1}$	$w_{2,n+1}$	$w_{3,n+1}$	$\dots$	$w_{m,n+1}$	$w_{m+1,n+1}$	
	1					2	

Yukarıda görüldüğü gibi bir tablo yapıldığında (burada $u(x_i, t_j) \rightarrow w_{i,j}$), tabloda beyaz kutular $j = 1, 2, \dots, n+1$ için $w_{1,j} = f_{x0}(0, t_j)$ **1** $i = 1, 2, \dots, m+1$ için $w_{i,1} = f_{t0}(x_i, 0)$ **3**

$$w_{m+1,j} = f_{xL}(L, t_j) \quad \mathbf{2}$$

görüldüğü gibi sınır koşullarını temsil etmektedir.

METODUN ÖZETİ

Tabloda ortada görülen sarı kutu ise bilinmeyenleri içermektedir. Toplamda $(m-1) \times n$ tane bilinmeyen vardır.

Birinci türev için ileri sonlu fark formülü;

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k}$$

İkinci türev için merkezi sonlu fark formülü;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2}$$

olmak üzere bu formüller denklemde yerine yazılırsa

METODUN ÖZETİ

$$\alpha^2 \frac{k}{h^2} = \lambda \text{ (lambda)}, 1 - 2\lambda = \mu \text{ (mu)} \text{ olmak üzere}$$
$$w_{i,j+1} = \mu w_{i,j} + \lambda(w_{i+1,j} + w_{i-1,j})$$

sonlu fark formülü elde edilir.

Şimdi bu formülde $j = 1, \dots, n$ ve $i = 2, \dots, m$ yerlerine konularak bilinmeyen değerler elde edilir. $j = n$ için soruda $t = T$ için istenen bilinmeyen değerler elde edilmiş olur.

METODUN ÖZETİ

$$\begin{array}{ll} i = 2 & w_{2,2} = \mu w_{2,1} + \lambda(w_{3,1} + w_{1,1}) \\ j = 1 \text{ için } i = 3 & w_{3,2} = \mu w_{3,1} + \lambda(w_{4,1} + w_{2,1}) \\ & \vdots \\ i = m & w_{m,2} = \mu w_{m,1} + \lambda(w_{m+1,1} + w_{m-1,1}) \end{array}$$

Buradan $w_{2,2}, w_{3,2}, \dots, w_{m,2}$ bilinmeyenleri elde edilir. Bu değerler kullanılarak

$$\begin{array}{ll} i = 2 & w_{2,3} = \mu w_{2,2} + \lambda(w_{3,2} + w_{1,2}) \\ j = 2 \text{ için } i = 3 & w_{3,3} = \mu w_{3,2} + \lambda(w_{4,2} + w_{2,2}) \\ & \vdots \\ i = m & w_{m,3} = \mu w_{m,2} + \lambda(w_{m+1,2} + w_{m-1,2}) \end{array}$$

$w_{2,2}, w_{3,2}, \dots, w_{m,2}$ bilinmeyenleri elde edilir.

METODUN ÖZETİ

Bu iterasyonlara devam edilirse $t=T$ için

$$\begin{array}{ll} i = 2 & w_{2,n+1} = \mu w_{2,n} + \lambda(w_{3,n} + w_{1,n}) \\ j = n \text{ için } i = 3 & w_{3,n+1} = \mu w_{3,n} + \lambda(w_{4,n} + w_{2,n}) \\ & \vdots \\ i = m & w_{m,n+1} = \mu w_{m,n} + \lambda(w_{m+1,n} + w_{m-1,n}) \end{array}$$

$w_{2,n+1}, w_{3,n+1}, \dots, w_{m,n+1}$ bilinmeyenleri elde edilir.

İLERİ SONLU FARKLAR METODU

Örnek 1. (a) $h = 0.1$ ve $k = 0.0005$

(b) $h = 0.1$ ve $k = 0.01$

adım uzunluklarını kullanarak

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, t \geq 0$$

ısı denklemini $u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0$ sınır koşulları ve $u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$ başlangıç koşulları ile birlikte yaklaşık olarak çözünüz.

$t = 0.5$ için analitik çözüm ile karşılaştırma yapınız.

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$$