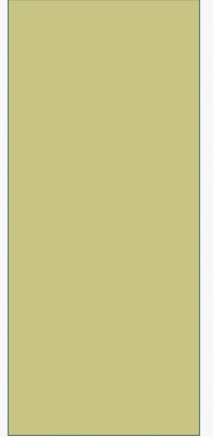


KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Arş. Gör. Dr. Fatih Aylıkçı



3. HAFTA

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM TİPLERİ

- $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)$ içeren kısmi diferansiyel denklemler **eliptik** denklemlerdir. Özel bir örnek olarak **Poisson denklemini** olarak bilinen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y)$$

eliptik denklemini verebiliriz. Bu denklemden, f , S sınırıyla R düzlem bölgesi üzerindeki probleme girişi tanımlar. Bu tip denklemler bir bölgede denge durumundaki ısı dağılımı, düzlem yerçekimi kuvvetleri ile hareket eden bir düzlemdeki bir noktanın potansiyel enerjisi, sıkıştırılmaz akışkanlar içeren iki boyutlu denge durum problemleri gibi çeşitli zamandan bağımsız fiziksel problemlerin çalışmasında ortaya çıkar.

KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEM TİPLERİ

- Poisson denklemi için tek bir çözüm elde etmek için bazı kısıtlamalar eklenmelidir. Örneğin, bir düzlem bölgesinde denge durumunda ısı dağılımı çalışması $f(x, y) = 0$ olmasını gerektirir. Bunun sonucu olarak

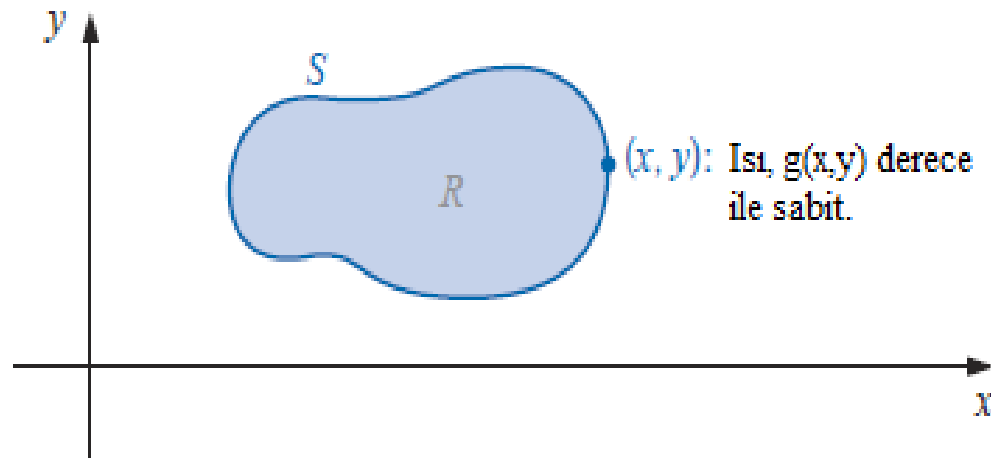
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Laplace denklemi elde edilir.

Bölge sınırlarındaki ısı dağılımından ısı elde edilmişse, kısıtlamalar

$u(x, y) = g(x, y)$ (tüm (x, y) 'ler R bölgesi sınırı olan S 'de) olarak verilen **Dirichlet sınır koşulları**dır.

KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEM TİPLERİ



KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEM TİPLERİ

Parabolik denklem olarak,

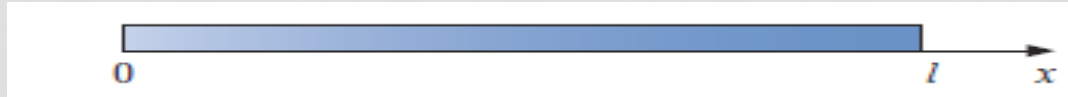
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

biçimindeki kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini inceleyeceğiz.

Buradaki fiziksel problem, her bir kesit elemanında düzgün bir ısı ya sahip olan l uzunluğundaki bir çubuğun ısı akışıdır. Çubuk, yan yüzeylerinden yalıtılmış olmalıdır.

α sabiti çubuktaki konumdan bağımsızdır ve çubuğun elde edildiği malzemenin ısı iletkenlik özelliğinden belirlenir.

KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEM TİPLERİ



Bu tipteki ısı akış problemi için alışıldık kısıtlamalardan (başlangıç ısı dağılımı) biri:

$$u(x, 0) = f(x)$$

Örneğin çubuğun iki ucu sabit U_1 ve U_2 ısıları ile tutuluyorsa sınır koşulları

$$u(0, t) = U_1, \quad u(l, t) = U_2$$

biçimindedir ve ısı dağılımı sınırlı bir ısı dağılımına yaklaşır:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l} x$$

KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEM TİPLERİ

Bunun yerine çubuk uçlarından ısı akmayacak şekilde yalıtılırsa, sınır koşulları

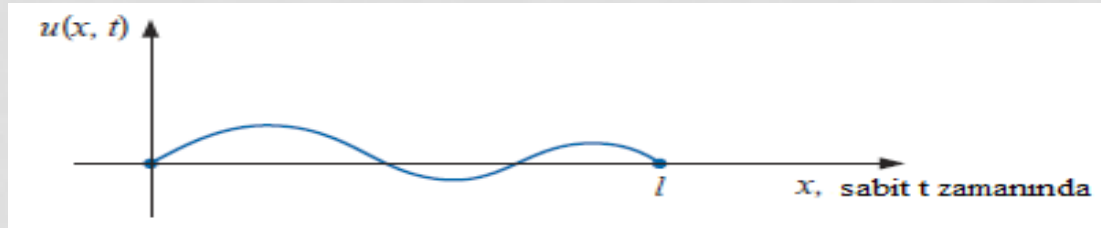
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$$

biçimindedir.

Gaz difüzyonu için yapılan çalışmalarda da parabolik kısmi diferansiyel denklemler önemlidir, ve bu **difüzyon denklemini** olarak bilinmektedir.

KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEM TİPLERİ

- Bir boyutlu **dalga denklemini** çalışması **hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlere** örnektir. Aynı yatay seviyede iki destek arasına l uzunluğunda elastik bir tel uzatıldığını varsayalım.



Eğer tel, düşey bir düzlemde titreşecek şekilde ayarlanmışsa, bir t zamanında bir x noktasındaki $u(x,t)$ düşey yer değiştirmeleri aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0, 0 < x < l, 0 < t$$

KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEM TİPLERİ

- Burada sönümlleme etkisi ihmal edilir ve genlik çok büyük değildir. Bu probleme telin başlangıç konumu ve hızı ile ilgili kısıtlamalar koyulabilir:

$$u(x,0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), 0 \leq x \leq l$$

- Sınır noktaları sabitse, $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$ da eklenebilir.
- Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemleri içeren fiziksel problemlere örnek olarak; bir veya her iki ucu kenetlenmiş kırıların titreşimleri, toprağa bir miktar sızıntısı olan elektriğin uzun bir hat boyunca iletilmesi verilebilir.

ELİPTİK KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$R = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$ bölgesi üzerinde, S R bölgesinin sınırları olmak üzere $u(x, y) = g(x, y)$, $(x, y) \in S$ için

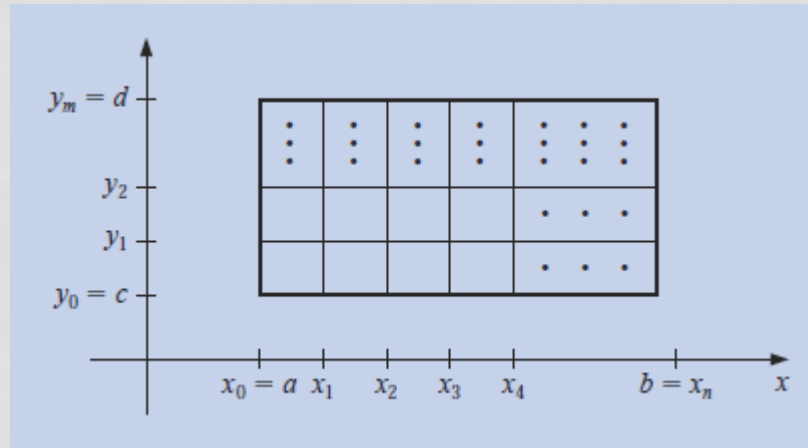
$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y)$$

eliptik kısmi diferansiyel denklem olan **Poisson denklemini** düşünelim. Eğer f ve g fonksiyonları kendi tanım kümelerinde sürekli ise bu denklemin tek bir çözümü vardır.

GRİD SEÇİMİ

- Kullanılacak olan metod lineer sınır-değer problemleri için sonlu farklar metodunun iki boyutlu problemlere uyarlanmış halidir.
- İlk adım $h = (b - a) / n$, $k = (d - c) / m$ adım uzunluklarını tanımlamak için n ve m tamsayılarının seçimidir. $[a, b]$ aralığının h uzunluğunda n eşit parçaya ve $[c, d]$ aralığının k uzunluğunda m eşit parçaya bölünmesi.

GRİD SEÇİMİ



R dikdörtgensel bölgesinde bir gridin yeri yatay ve düşey çizgilerin kesiştiği (x_i, y_j) koordinatları ile belirlenir:

$$x_i = a + ih, y_j = c + jk, (i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, m)$$

GRID SEÇİMİ

$x = x_i$ ve $y = y_j$ doğruları grid doğruları ve kesişimleri her bir gridin mesh noktalarıdır. Gridlerin her bir mesh noktası (x_i, y_j) ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$; $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$) için; x değişkenine göre x_i civarında Taylor serisi kullanılarak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j)$$

merkezi fark formülü elde edilir ($\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$). Benzer şekilde y değişkenine göre y_j civarında Taylor serisi kullanılarak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j)$$

merkezi fark formülü elde edilir ($\eta_j \in (y_{j-1}, y_{j+1})$).

GRİD SEÇİMİ

Bu formüller kullanılarak (x_i, y_j) noktalarında Poisson denklemini

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2}$$
$$= f(x_i, y_j) + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j)$$

olarak $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$; $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ için elde edilir.

Sınır koşulları:

$$u(x_0, y_j) = g(x_0, y_j), \quad u(x_n, y_j) = g(x_n, y_j), \quad j = 0, 1, \dots, m$$

$$u(x_i, y_0) = g(x_i, y_0), \quad u(x_i, y_m) = g(x_i, y_m), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

SONLU FARKLAR METODU

$u(x_i, y_j)$ için yaklaşım çözüm w_{ij} olmak üzere sonlu farklar metodu sonucu

$$2 \left[\left(\frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] w_{ij} - (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - \left(\frac{h}{k} \right)^2 (w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j)$$

elde edilir ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$; $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$) ve

$$w_{0j} = g(x_0, y_j), \quad w_{nj} = g(x_n, y_j), \quad j = 0, 1, \dots, m$$

$$w_{i0} = g(x_i, y_0), \quad w_{im} = g(x_i, y_m), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

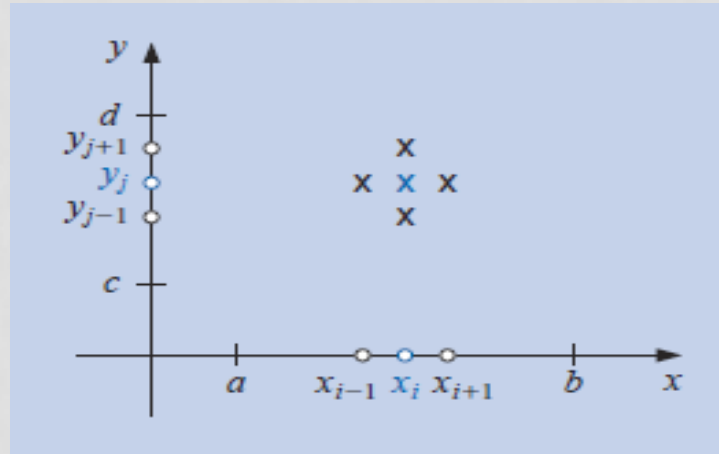
Bu metodun lokal kesme hatası $O(h^2 + k^2)$ mertebesinde.

SONLU FARKLAR METODU

Sonlu farklar denklemi $u(x, y)$ 'nin

$$(x_{i-1}, y_j), (x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j-1}), (x_i, y_{j+1})$$

noktalarındaki yaklaşımlarını içermektedir.



Sınır koşullarından gelen bilgileri kullanarak sonlu farklar denklem sisteminden (x_i, y_j) mesh noktalarındaki değerler elde edilecektir.

SONLU FARKLAR METODU

w_{ij} yaklaşımları olan bilinmeyenleri içeren bir $(n-1)(m-1) \times (n-1)(m-1)$ 'lik lineer sistem elde edilir. Bilinmeyenleri içeren bu lineer denklem sisteminin çözümünde mesh noktalarının tekrar isimlendirilmesi, matris hesaplamaları için çok daha etkilidir:

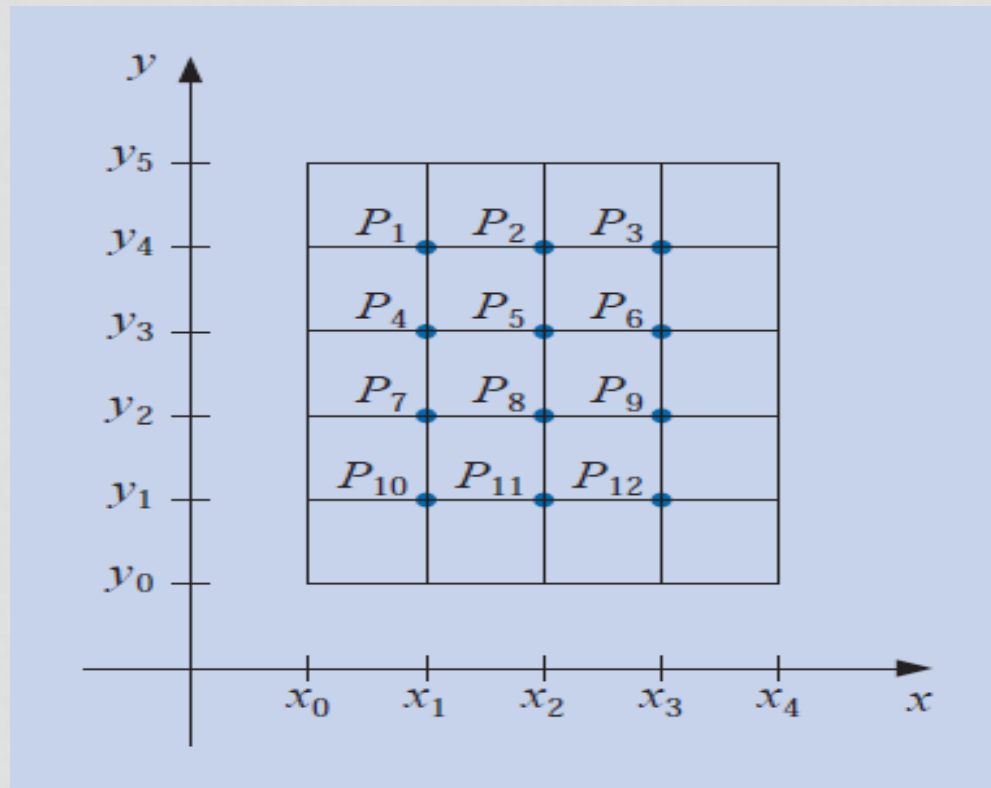
$$P_l = (x_i, y_j), w_l = w_{ij}$$

$$(l = i + (m-1-j)(n-1), \quad i = 1, 2, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, m-1)$$

Bu, mesh noktalarını arka arkaya soldan sağa ve yukarıdan aşağıya etiketler. Noktaarın bu şekilde etiketlenmesi w_{ij} 'nin belirlenmesinde gerekli olan sistemin, bant genişliği en fazla $2n-1$ olan bir bant matris olmasını sağlar.

SONLU FARKLAR METODU

Örnek olarak $n=4$ ve $m=5$ için



SONLU FARKLAR METODU

Örnek 1. $n=m=4$ kullanarak boyutları 0.5 m 'ye 0.5 m olan ince kare metal plakanın denge durumu ısı dağılımını inceleyiniz. İki komşu sınır 0°C de tutulur ve diğer sınırlardaki ısı 0°C den 100°C ye lineer olarak artmaktadır.

Çözüm: Sıfır sınır koşullarına sahip kenarları x ve y eksenleri boyunca yerleştirelim.

SONLU FARKLAR METODU

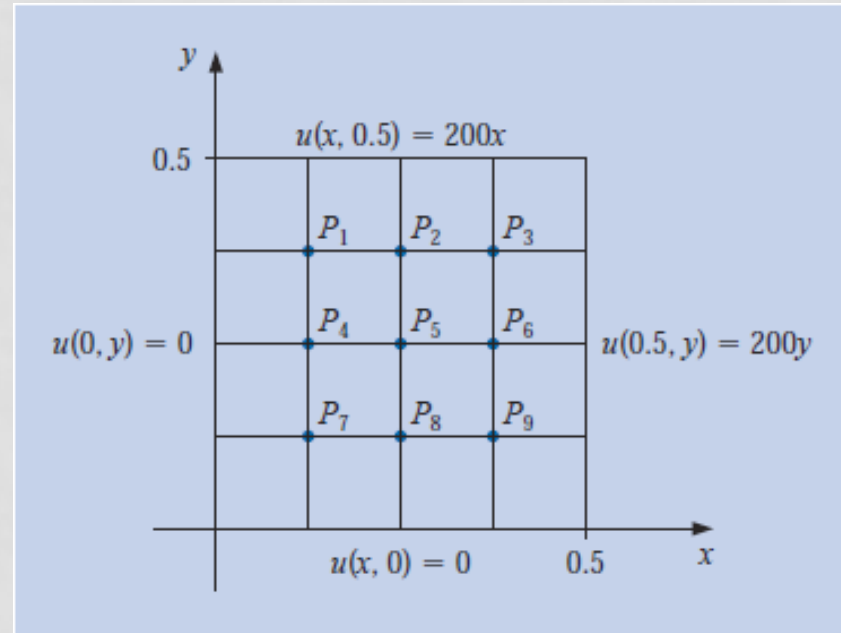
Çözüm: Sıfır sınır koşullarına sahip kenarları x ve y eksenleri boyunca yerleştirelim. Problem şu şekildedir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, R = \{(x, y) \mid 0 < x < 0.5, 0 < y < 0.5\}$$

Sınır koşulları: $u(0, y) = 0, u(x, 0) = 0, u(x, 0.5) = 200x, u(0.5, y) = 200y$

SONLU FARKLAR METODU

- $n=m=4$ ise,



- Sonlu fark formülleri kullanıldığında,

$$4w_{i,j} - w_{i+1,j} - w_{i-1,j} - w_{i,j-1} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

SONLU FARKLAR METODU

- Yeniden etiketlenirilmiş $w_i = u(P_i)$ grid noktaları terimleri cinsinden ifade edilirse her P_i noktasında sağlanan denklemler: (Sağ taraflar sınır koşullarından elde edilmektedir.)

$$P_1 : \quad 4w_1 - w_2 - w_4 \quad = w_{0,3} + w_{1,4}$$

$$P_2 : \quad 4w_2 - w_3 - w_1 - w_5 \quad = w_{2,4}$$

$$P_3 : \quad 4w_3 - w_2 - w_6 \quad = w_{4,3} + w_{3,4}$$

$$P_4 : \quad 4w_4 - w_5 - w_1 - w_7 \quad = w_{0,2}$$

$$P_5 : \quad 4w_5 - w_6 - w_4 - w_2 - w_8 \quad = 0$$

$$P_6 : \quad 4w_6 - w_5 - w_3 - w_9 \quad = w_{4,2}$$

$$P_7 : \quad 4w_7 - w_8 - w_4 \quad = w_{0,1} + w_{1,0}$$

$$P_8 : \quad 4w_8 - w_9 - w_7 - w_5 \quad = w_{2,0}$$

$$P_9 : \quad 4w_9 - w_8 - w_6 \quad = w_{3,0} + w_{4,1}$$

SONLU FARKLAR METODU

Sınır koşullarından: $w_{1,0} = w_{2,0} = w_{3,0} = w_{0,1} = w_{0,3} = 0$,
 $w_{1,4} = w_{4,1} = 25, w_{2,4} = w_{4,2} = 50, w_{3,4} = w_{4,3} = 75$

Bu probleme ait lineer sistem:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}$$

SONLU FARKLAR METODU

$w_1, w_2, \dots, w_9$ değerleri, bu matrise Gauss-Seidel metodu uygulanarak elde edilebilir.

Bu sonuçlar doğrudur, çünkü analitik çözüm

$$u(x, y) = 400xy$$

dir ve

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

olduğundan her adımda kesme hatası sıfırdır.

i	w_i
1	18.75
2	37.50
3	56.25
4	12.50
5	25.00
6	37.50
7	6.25
8	12.50
9	18.75

METODUN ÖZETİ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y), a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$$

$$u(a, y) = f_{xa}(a, y), u(x, c) = f_{yc}(x, c)$$

$$u(b, y) = f_{xb}(b, y), u(x, d) = f_{yd}(x, d)$$

Poisson kısmi diferansiyel denklemini için önce çözüm bölgesini grid'lere ayıralım.

Adım uzunlukları;

$$h = \frac{b-a}{n}, k = \frac{d-c}{m} \text{ olmak üzere } x \text{ aralığını } n \text{ tane, } y$$

aralığını m tane alt aralığa böleceğiz.

METODUN ÖZETİ

	$x_1 = a$	$x_2 = a + h$	$x_3 = a + 2h$	$\dots$	$x_n = a + (n-1)h$	$x_{n+1} = a + nh = b$	
$y_1 = c$	$w_{1,1}$	$w_{2,1}$	$w_{3,1}$	$\dots$	$w_{n,1}$	$w_{n+1,1}$	3
$y_2 = c + k$	$w_{1,2}$	$w_{2,2}$	$w_{3,2}$	$\dots$	$w_{n,2}$	$w_{n+1,2}$	
$y_3 = c + 2k$	$w_{1,3}$	$w_{2,3}$	$w_{3,3}$	$\dots$	$w_{n,3}$	$w_{n+1,3}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$y_m = c + (m-1)k$	$w_{1,m}$	$w_{2,m}$	$w_{3,m}$	$\dots$	$w_{n,m}$	$w_{n+1,m}$	
$y_{m+1} = c + mk = d$	$w_{1,m+1}$	$w_{2,m+1}$	$w_{3,m+1}$	$\dots$	$w_{n,m+1}$	$w_{n+1,m+1}$	4
	1					2	

Yukarıda görüldüğü gibi bir tablo yapıldığında
(burada $u(x_i, y_j) \rightarrow w_{i,j}$), tabloda beyaz kutular

$j = 1, 2, \dots, m+1$ için $w_{1,j} = f_{xa}(a, y_j)$ **1** $i = 1, 2, \dots, n+1$ için $w_{i,1} = f_{yc}(x_i, c)$ **3**

$w_{n+1,j} = f_{xb}(b, y_j)$ **2**

$w_{i,m+1} = f_{yd}(x_i, d)$ **4**

görüldüğü gibi sınır koşullarını temsil etmektedir.

METODUN ÖZETİ

Tabloda ortada görülen sarı kutu ise bilinmeyenleri içermektedir. Toplamda $(m-1) \times (n-1)$ tane bilinmeyen vardır.

Merkezi sonlu fark formülleri;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{k^2}$$

olmak üzere bu formüller denklemde yerine yazılırsa

METODUN ÖZETİ

$\frac{h^2}{k^2} = \lambda$ (lambda), $2(1 + \lambda) = \mu$ (mu) olmak üzere

$$\mu w_{i,j} - (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) - \lambda(w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j)$$

sonlu fark formülü elde edilir.

Şimdi bu formülde $j=2, \dots, m$ ve $i=2, \dots, n$ yerlerine konularak bir cebirsel denklem takımı elde edilecek.

METODUN ÖZETİ

$$i = 2, j = 2 \quad \mu w_{2,2} - w_{3,2} - \lambda w_{2,3} = -h^2 f(x_2, y_2) + w_{1,2} + \lambda w_{2,1}$$

$$i = 2, j = 3, \dots, m-1 \quad \mu w_{2,j} - w_{3,j} - \lambda w_{2,j+1} - \lambda w_{2,j-1} = -h^2 f(x_2, y_j) + w_{1,j}$$

$$i = 2, j = m \quad \mu w_{2,m} - w_{3,m} - \lambda w_{2,m-1} = -h^2 f(x_2, y_m) + w_{1,m} + \lambda w_{2,m+1}$$

$$i = 3, j = 2 \quad \mu w_{3,2} - w_{4,2} - w_{2,2} - \lambda w_{3,3} = -h^2 f(x_3, y_2) + \lambda w_{3,1}$$

$$i = 3, j = 3, \dots, m-1 \quad \mu w_{3,j} - w_{4,j} - w_{2,j} - \lambda w_{3,j+1} - \lambda w_{3,j-1} = -h^2 f(x_3, y_j)$$

$$i = 3, j = m \quad \mu w_{3,m} - w_{4,m} - w_{2,m} - \lambda w_{3,m-1} = -h^2 f(x_3, y_m) + \lambda w_{3,m+1}$$

⋮

METODUN ÖZETİ

⋮

$$i = n-1, j = 2 \quad \mu w_{n-1,2} - w_{n,2} - w_{n-2,2} - \lambda w_{n-1,3} = -h^2 f(x_{n-1}, y_2) + \lambda w_{n-1,1}$$

$$i = n-1, j = 3, \dots, m-1 \quad \mu w_{n-1,j} - w_{n,j} - w_{n-2,j} - \lambda w_{n-1,j+1} - \lambda w_{n-1,j-1} = -h^2 f(x_{n-1}, y_j)$$

$$i = n-1, j = m \quad \mu w_{n-1,m} - w_{n,m} - w_{n-2,m} - \lambda w_{n-1,m-1} = -h^2 f(x_{n-1}, y_m) + \lambda w_{n-1,m+1}$$

$$i = n, j = 2 \quad \mu w_{n,2} - w_{n-1,2} - \lambda w_{n,3} = -h^2 f(x_n, y_2) + w_{n+1,2} + \lambda w_{n,1}$$

$$i = n, j = 3, \dots, m-1 \quad \mu w_{n,j} - w_{n-1,j} - \lambda w_{n,j+1} - \lambda w_{n,j-1} = -h^2 f(x_n, y_j) + w_{n+1,j}$$

$$i = n, j = m \quad \mu w_{n,m} - w_{n-1,m} - \lambda w_{n,m-1} = -h^2 f(x_n, y_m) + w_{n+1,m} + \lambda w_{n,m+1}$$

biçiminde $(n-1) \times (m-1)$ bilinmeyenli $(n-1) \times (m-1)$ tane denklem elde edilir. Bu denklem takımı yine matris formunda $(Kw = F)$ yazılacaktır. Burada K katsayılar matrisi, w bilinmeyenler vektörü, F sağ taraf vektörüdür.

METODUN ÖZETİ

A matrisi

$$\begin{bmatrix} \mu & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & \mu & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \mu & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & \mu & -\lambda & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\lambda & \mu & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \mu \end{bmatrix}$$

B matrisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$(m-1) \times (m-1)$ 'lik matrisler olmak üzere katsayılar matrisi;

METODUN ÖZETİ

$$K = \begin{bmatrix} A & B & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} & \cdots & [0]_{(m-1) \times m-1} \\ B & A & B & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} & \cdots & [0]_{(m-1) \times m-1} \\ [0]_{(m-1) \times m-1} & B & A & B & [0]_{(m-1) \times m-1} & \cdots & [0]_{(m-1) \times m-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ [0]_{(m-1) \times m-1} & \cdots & [0]_{(m-1) \times m-1} & B & A & B & [0]_{(m-1) \times m-1} \\ [0]_{(m-1) \times m-1} & \cdots & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} & B & A & B \\ [0]_{(m-1) \times m-1} & \cdots & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} & B & A \end{bmatrix}$$

$((m-1) \times (n-1)) \times ((m-1) \times (n-1))$ 'lik bir K katsayılar matrisi elde edilir.

METODUN ÖZETİ

Burada;

$$i = 1, m - 1 \text{ için } A(i, i) = \mu$$

$$i = 1 : m - 2 \text{ için } A(i, i + 1) = -\lambda$$

$$A(i + 1, i) = -\lambda$$

$$i = 1 : m - 1 \text{ için } B(i, i) = -1$$

$$K(1 : m - 1, 1 : 2(m - 1)) = [A, B]$$

$$i = 1 : n - 3 \text{ için } K((m - 1)i + 1 : (m - 1)(i + 1), (m - 1)(i - 1) + 1 : (m - 1)(i + 2)) = [B, A, B]$$

$$K((n - 2)(m - 1) + 1 : (m - 1)(n - 1), (n - 3)(m - 1) + 1 : (m - 1)(n - 1)) = [B, A]$$

METODUN ÖZETİ

Sağ taraf vektörü F;

$$\begin{bmatrix} -h^2 f(x_i, y_2) + \lambda w_{i,1} \\ -h^2 f(x_i, y_3) \\ \vdots \\ -h^2 f(x_i, y_{m-1}) \\ -h^2 f(x_i, y_m) + \lambda w_{i,m+1} \end{bmatrix}$$

$$i = 3, \dots, n-1$$

$$\begin{bmatrix} -h^2 f(x_2, y_2) + w_{1,2} + \lambda w_{2,1} \\ -h^2 f(x_2, y_3) + w_{1,3} \\ \vdots \\ -h^2 f(x_2, y_{m-1}) + w_{1,m-1} \\ -h^2 f(x_2, y_m) + w_{1,m} + \lambda w_{2,m+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -h^2 f(x_n, y_2) + w_{n+1,2} + \lambda w_{n,1} \\ -h^2 f(x_n, y_3) + w_{n+1,3} \\ \vdots \\ -h^2 f(x_n, y_{m-1}) + w_{n+1,m-1} \\ -h^2 f(x_n, y_m) + w_{n+1,m} + \lambda w_{n,m+1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere
 $(m-1) \times (n-1)$
 satırlı bir
 sütun vektördür.

METODUN ÖZETİ

- Burada;

$$F(1,1) = -h^2 f(x_2, y_2) + f_{xa}(a, y_2) + \lambda f_{yc}(x_2, c)$$

$$i = 2, \dots, m-2 \text{ için } F(i,1) = -h^2 f(x_2, y_{i+1}) + f_{xa}(a, y_{i+1})$$

$$F(m-1,1) = -h^2 f(x_2, y_m) + f_{xa}(a, y_m) + \lambda f_{yd}(x_2, d)$$

$$i = 3, \dots, n-1 \text{ için } F((m-1)(i-2)+1,1) = -h^2 f(x_i, y_2) + \lambda f_{yc}(x_i, c)$$

$$F((m-1)(i-1),1) = -h^2 f(x_i, y_m) + \lambda f_{yd}(x_i, d)$$

$$j = 3 : m-1 \text{ için } F((m-1)(i-2) + j-1,1) = -h^2 f(x_i, y_j)$$

$$F((n-2)(m-1)+1,1) = -h^2 f(x_n, y_2) + f_{xb}(b, y_2) + \lambda f_{yc}(x_n, c)$$

$$i = 2, \dots, m-2 \text{ için } F((n-2)(m-1)+i,1) = -h^2 f(x_n, y_{i+1}) + f_{xb}(b, y_{i+1})$$

$$F((n-1)(m-1),1) = -h^2 f(x_n, y_m) + f_{xb}(b, y_m) + \lambda f_{yd}(x_n, d)$$

METODUN ÖZETİ

K katsayılar matrisi ve F sağ taraf vektörü oluşturulduktan sonra bilinmeyenler vektörü $w = K \setminus F$ ile bulunur;

w bilinmeyenler vektörü sağda görüldüğü üzere $(m-1) \times (n-1)$ satırlı bir sütun vektördür.

$$\begin{bmatrix} w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ \vdots \\ w_{2,m} \\ w_{3,2} \\ w_{3,3} \\ \vdots \\ w_{3,m} \\ \vdots \\ w_{n,2} \\ w_{n,3} \\ \vdots \\ w_{n,m} \end{bmatrix}$$

POISSON DENKLEMİ İÇİN SONLU FARKLAR METODU ALGORİTMASI

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y), a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$$

Poisson denkleminin

$$u(x, y) = g(x, y), x = a \text{ ya da } x = b \text{ ve } c \leq y \leq d$$

$$u(x, y) = g(x, y), y = c \text{ ya da } y = d \text{ ve } a \leq x \leq b$$

sınır koşulları ile birlikte yaklaşık çözümünü bulmak için:

Girdi: a, b, c, d sınır noktaları; $m \geq 3, n \geq 3$ tamsayıları; TOL tolerans;
 N maksimum iterasyon sayısı

Çıktı: $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ve $j = 1, 2, \dots, m - 1$ için $u(x_i, y_j)$ 'ye $w_{i,j}$ yaklaşımları
veya maksimum iterasyon sayısının aşıldığı mesajı

POISSON DENKLEMİ İÇİN SONLU FARKLAR METODU ALGORİTMASI

Adım 1 $h = (b - a)/n;$
 $k = (d - c)/m.$

Adım 2 $i = 1, \dots, n - 1$ set $x_i = a + ih.$ Adım 2-Adım 3 mesh noktalarını

Adım 3 $j = 1, \dots, m - 1$ set $y_j = c + jk.$ oluşturur.

Adım 4 $i = 1, \dots, n - 1$
for $j = 1, \dots, m - 1$ $w_{i,j} = 0.$

Adım 5 $\lambda = h^2/k^2;$
 $\mu = 2(1 + \lambda);$
 $l = 1.$

Adım 6 $l \leq N$ iken Adım 7-Adım 20 yapılır (Adım 7-Adım 20 Gauss-Seidel iterasyonları)

Adım 7 $z = (-h^2 f(x_1, y_{m-1}) + g(a, y_{m-1}) + \lambda g(x_1, d) + \lambda w_{1,m-2} + w_{2,m-1}) / \mu;$
 $NORM = |z - w_{1,m-1}|;$
 $w_{1,m-1} = z.$

Adım 8 $i = 2, \dots, n - 2$
 $z = (-h^2 f(x_i, y_{m-1}) + \lambda g(x_i, d) + w_{i-1,m-1} + w_{i+1,m-1} + \lambda w_{i,m-2}) / \mu;$
eğer $|w_{i,m-1} - z| > NORM$ ise $NORM = |w_{i,m-1} - z|;$
 $w_{i,m-1} = z.$

POISSON DENKLEMİ İÇİN SONLU FARKLAR METODU ALGORİTMASI

Adım 9 $z = (-h^2 f(x_{n-1}, y_{m-1}) + g(b, y_{m-1}) + \lambda g(x_{n-1}, d) + w_{n-2, m-1} + \lambda w_{n-1, m-2}) / \mu;$
eğer $|w_{n-1, m-1} - z| > NORM$ ise $NORM = |w_{n-1, m-1} - z|;$
 $w_{n-1, m-1} = z.$

Adım 10 $j = m - 2, \dots, 2$ Adım 11, 12, 13 yapılır.

Adım 11 $z = (-h^2 f(x_1, y_j) + g(a, y_j) + \lambda w_{1, j+1} + \lambda w_{1, j-1} + w_{2, j}) / \mu;$
eğer $|w_{1, j} - z| > NORM$ ise $NORM = |w_{1, j} - z|;$
 $w_{1, j} = z.$

Adım 12 $i = 2, \dots, n - 2$
 $z = (-h^2 f(x_i, y_j) + w_{i-1, j} + \lambda w_{i, j+1} + w_{i+1, j} + \lambda w_{i, j-1}) / \mu;$
eğer $|w_{i, j} - z| > NORM$ ise $NORM = |w_{i, j} - z|;$
 $w_{i, j} = z.$

Adım 13 $z = (-h^2 f(x_{n-1}, y_j) + g(b, y_j) + w_{n-2, j} + \lambda w_{n-1, j+1} + \lambda w_{n-1, j-1}) / \mu;$
eğer $|w_{n-1, j} - z| > NORM$ ise $NORM = |w_{n-1, j} - z|;$
 $w_{n-1, j} = z.$

Adım 14 $z = (-h^2 f(x_1, y_1) + g(a, y_1) + \lambda g(x_1, c) + \lambda w_{1, 2} + w_{2, 1}) / \mu;$
eğer $|w_{1, 1} - z| > NORM$ ise $NORM = |w_{1, 1} - z|;$
 $w_{1, 1} = z.$

Adım 15 $i = 2, \dots, n - 2$
 $z = (-h^2 f(x_i, y_1) + \lambda g(x_i, c) + w_{i-1, 1} + \lambda w_{i, 2} + w_{i+1, 1}) / \mu;$
eğer $|w_{i, 1} - z| > NORM$ ise $NORM = |w_{i, 1} - z|;$
 $w_{i, 1} = z.$

POISSON DENKLEMİ İÇİN SONLU FARKLAR METODU ALGORİTMASI

Adım 16 $z = (-h^2 f(x_{n-1}, y_1) + g(b, y_1) + \lambda g(x_{n-1}, c) + w_{n-2,1} + \lambda w_{n-1,2}) / \mu$;
eğer $|w_{n-1,1} - z| > NORM$ ise $NORM = |w_{n-1,1} - z|$;
 $w_{n-1,1} = z$.

Adım 17 $NORM \leq TOL$ ise Adım 18-Adım 19 yapılır.

Adım 18 $i = 1, \dots, n-1$
 $j = 1, \dots, m-1$ ÇIKTI(x_i, y_j, w_{ij}).

Adım 19 STOP. (İşlem başarılı)

Adım 20 $l = l + 1$.

Adım 21 ÇIKTI('Maksimum iterasyon sayısı aşıldı.')
(İşlem başarısız)
STOP.

Küçük sistemler (100 veya daha az dereceli) için Gauss-Seidel metodu yerine direkt metod olan Gauss eliminasyon metodu kullanılması tavsiye edilir. Özel olarak Crout ayrıştırması da kullanılabilir.

İTERATİF METOD SEÇİMİ

Büyük sistemler için iteratif metod (Özellikle SOR metodu) kullanılmalıdır. Bu durumda optimal w seçimi A , köşegeni D ve üst ve alt üçgen kısımları U ve L 'ye ayrılmasından gelmektedir:

$$A = D - L - U$$

ve Jacobi metodu için B matrisi: $B = D^{-1}(L + U)$

Spektral yarıçap:
$$\rho(B) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \right]$$

Sonuç olarak w değerleri,

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(B)]^2}} = \frac{4}{2 + \sqrt{4 - \left[\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \right]^2}}$$

İTERATİF METOD SEÇİMİ

Örnek 2. $n=6$, $m=5$ ile Poisson sonlu fark metodunu kullanın ve 10^{-10} toleransı ile aşağıdaki problemin yaklaşık çözümünü yapın:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = xe^y, 0 < x < 2, 0 < y < 1$$

$$\text{Sınır koşulları: } u(0, y) = 0, u(2, y) = 2e^y, 0 < y < 1$$

$$u(x, 0) = x, u(x, 1) = ex, 0 < x < 2$$

ve sonuçları analitik çözüm $u(x, y) = xe^y$ ile karşılaştırın.

İTERATİF METOD SEÇİMİ

Maksimum iterasyon sayısı $N=100$ kullanılarak verilen algoritmaya göre sonuçlar aşağıda yer almaktadır. Gauss Seidel metodu için durma kriteri (Adım 17)

$$\left| w_{i,j}^{(l)} - w_{i,j}^{(l-1)} \right| \leq 10^{-10}, \quad i = 1, 2, \dots, 5; j = 1, \dots, 4$$

biçimindedir. İşlem $l=61$ 'de durmaktadır. Sonuçlar bir sonraki slaytta verilmiştir.

İTERATİF METOD SEÇİMİ

i	j	x_i	y_j	$w_{ij}^{(61)}$	$u(x_i, y_j)$	$ u(x_i, y_j) - w_{ij}^{(61)} $
1	1	0.3333	0.2000	0.40726	0.40713	1.30×10^{-4}
1	2	0.3333	0.4000	0.49748	0.49727	2.08×10^{-4}
1	3	0.3333	0.6000	0.60760	0.60737	2.23×10^{-4}
1	4	0.3333	0.8000	0.74201	0.74185	1.60×10^{-4}
2	1	0.6667	0.2000	0.81452	0.81427	2.55×10^{-4}
2	2	0.6667	0.4000	0.99496	0.99455	4.08×10^{-4}
2	3	0.6667	0.6000	1.2152	1.2147	4.37×10^{-4}
2	4	0.6667	0.8000	1.4840	1.4837	3.15×10^{-4}
3	1	1.0000	0.2000	1.2218	1.2214	3.64×10^{-4}
3	2	1.0000	0.4000	1.4924	1.4918	5.80×10^{-4}
3	3	1.0000	0.6000	1.8227	1.8221	6.24×10^{-4}
3	4	1.0000	0.8000	2.2260	2.2255	4.51×10^{-4}
4	1	1.3333	0.2000	1.6290	1.6285	4.27×10^{-4}
4	2	1.3333	0.4000	1.9898	1.9891	6.79×10^{-4}
4	3	1.3333	0.6000	2.4302	2.4295	7.35×10^{-4}
4	4	1.3333	0.8000	2.9679	2.9674	5.40×10^{-4}
5	1	1.6667	0.2000	2.0360	2.0357	3.71×10^{-4}
5	2	1.6667	0.4000	2.4870	2.4864	5.84×10^{-4}
5	3	1.6667	0.6000	3.0375	3.0369	6.41×10^{-4}
5	4	1.6667	0.8000	3.7097	3.7092	4.89×10^{-4}