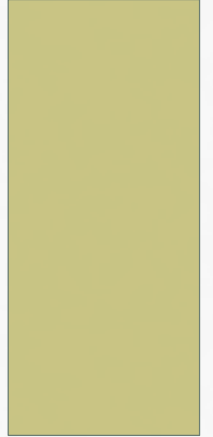


KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Arş. Gör. Dr. Fatih Aylıkçı



2. HAFTA

LİNEER PROBLEMLER İÇİN SONLU FARKLAR METODU

- Sınır-değer problemleri için lineer ve nonlinear atış metodlarının kararlılığı açısından problemleri vardır. Sonlu farklar metodu daha iyi bir stabilite karakteristiğine sahiptir, fakat belirli bir doğruluk elde etmek için daha fazla hesaplama yapmayı gerektirir.
- Sınır-değer problemlerinin çözümü için sonlu farklar içeren metodlar diferansiyel denklemdaki türevlerin yerine uygun bir fark formülü yerleştirir. Kesme hatasını belirli bir mertebede tutmak için özel bir fark formülü ve h adım uzunluğu seçilir. Yine de türev yaklaşımlarının genel kararsızlığından dolayı h çok küçük seçilemez.

AYRIK YAKLAŞIM

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

- ikinci mertebeden lineer sınır-değer problemi için sonlu fark metodu y' ve y'' 'nün her ikisine de yakınsayan fark formülü yaklaşımlarının kullanılmasını gerektirir. Önce, $N > 0$ tamsayısı seçilir ve $[a, b]$ aralığı, bitiş noktaları $i = 0, 1, \dots, N + 1$ için $x_i = a + ih$ noktaları olan $(N + 1)$ eşit alt aralığa bölünür. Burada, $h = (b - a) / (N + 1)$.
- h adım uzunluğunun bu biçimde seçilmesi $N \times N$ 'lik bir matris içeren bir lineer sistemin çözümünün matris algoritması ile yapılmasına kolaylık sağlar.

AYRIK YAKLAŞIM

- Her bir x_i ($i=1,2,\dots,N$) noktasında yaklaşık diferansiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i)$$

- y, x_i civarında üçüncü mertebeden Taylor serisine açılırsa $\left(y \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}] \text{ varsayımı altında ve bazı } \varepsilon_i^+ \in (x_i, x_{i+1}) \text{ için} \right)$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{6} y'''(x_i) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(\varepsilon_i^+)$$

- ve bazı $\varepsilon_i^- \in (x_{i-1}, x_i)$ için

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) - \frac{h^3}{6} y'''(x_i) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(\varepsilon_i^-)$$

AYRIK YAKLAŞIM

- Bu ifadeler toplandığında

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2 y''(x_i) + \frac{h^4}{24} [y''''(\varepsilon_i^+) + y''''(\varepsilon_i^-)]$$

elde edilir ve $y''(x_i)$

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2} [y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{24} [y''''(\varepsilon_i^+) + y''''(\varepsilon_i^-)]$$

ifadesine eşit olur. Hata terimi sadeleştirildiğinde yukarıdaki ifade bazı $\varepsilon_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ için

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2} [y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{12} y''''(\varepsilon_i)$$

ifadesine eşit olur. Bu ifade $y''(x_i)$ için merkezi fark formülü ismini alır.

AYRIK YAKLAŞIM

- $y'(x_i)$ için merkezi fark formülü benzer şekilde

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h} [y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{6} y'''(\eta_i)$$

biçiminde bazı $\eta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ için elde edilir.

AYRIK YAKLAŞIM

- Elde edilen bu merkezi fark formülleri diferansiyel denklemden yerine yazıldığında

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} = p(x_i) \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) - \frac{h^2}{12} [2p(x_i)y'''(\eta_i) - y''''(\varepsilon_i)]$$

elde edilir.

AYRIK YAKLAŞIM

- $O(h^2)$ mertebesinde kesme hatasına sahip sonlu farklar metodu, bir önceki slayttaki denklemi kullanarak $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$ sınır koşulları ile birlikte problemi, aşağıdaki lineer denklem sistemine dönüştürür:

$$w_0 = \alpha, w_{N+1} = \beta$$

$$\left(\frac{-w_{i+1} + 2w_i - w_{i-1}}{h^2} \right) + p(x_i) \left(\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right) + q(x_i)w_i = -r(x_i)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

AYRIK YAKLAŞIM

- Denklemler yeniden düzenlenirse

$$-\left(1 + \frac{h}{2} p(x_i)\right) w_{i-1} + \left(2 + h^2 q(x_i)\right) w_i - \left(1 - \frac{h}{2} p(x_i)\right) w_{i+1} = -h^2 r(x_i)$$

elde edilir ve elde edilen bu denklem sistemi, $N \times N$ 'lik tridiagonal bir matris formunda

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{b}$$

biçiminde gösterilebilir. Bir sonraki slaytta $\mathbf{A}$, $\mathbf{w}$ ve $\mathbf{b}$ 'nin formları gösterilmiştir:

AYRIK YAKLAŞIM

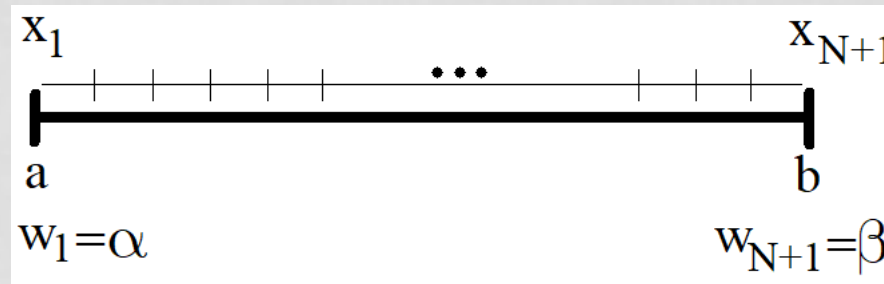
$$A = \begin{bmatrix} 2 + h^2 q(x_1) & -1 + \frac{h}{2} p(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ -1 - \frac{h}{2} p(x_2) & 2 + h^2 q(x_2) & -1 + \frac{h}{2} p(x_2) & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 + \frac{h}{2} p(x_{N-1}) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 - \frac{h}{2} p(x_N) & 2 + h^2 q(x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -h^2 r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2} p(x_1)\right) w_0 \\ -h^2 r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2 r(x_{N-1}) \\ -h^2 r(x_N) + \left(1 - \frac{h}{2} p(x_N)\right) w_{N+1} \end{bmatrix}$$

METODUN ÖZETİ

- $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$
sınır-değer problemi için



x tanım aralığı N eşit alt aralığa bölünür. Burada sayısal çözüm w olarak modellenmiştir.

Burada $h = \frac{b-a}{N}$ dir.

METODUN ÖZETİ

$$w''(x_i) = p(x_i)w'(x_i) + q(x_i)w(x_i) + r(x_i), a \leq x \leq b,$$

$$w(x_1) = w_1 = \alpha, w(x_{N+1}) = w_{N+1} = \beta$$

- sınır değer probleminde

$$w''(x_i) \approx \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2}$$

$$w'(x_i) \approx \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}$$

merkezi sonlu fark formülleri kullanılırsa,

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} = p(x_i) \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} + q(x_i)w_i + r(x_i)$$

$$w_1 = \alpha, w_{N+1} = \beta$$

METODUN ÖZETİ

- Bu denklem düzenlenirse,

$$\left(-1 - \frac{h}{2} p(x_i)\right) w_{i-1} + \left(2 + h^2 q(x_i)\right) w_i + \left(-1 + \frac{h}{2} p(x_i)\right) w_{i+1} = -h^2 r(x_i)$$

$$w_1 = \alpha, w_{N+1} = \beta$$

elde edilir. Bu denklemde $i=2,3,\dots,N$ yazılırsa bir sonraki slayttan da görüleceği üzere $N-1$ bilinmeyenli $w_2, w_3, \dots, w_N$ $N-1$ tane cebirsel denklem elde edilir.

METODUN ÖZETİ

$$i = 2 \text{ için} \quad \left(2 + h^2 q(x_2)\right) w_2 + \left(-1 + \frac{h}{2} p(x_2)\right) w_3 = -h^2 r(x_2) + \left(1 + \frac{h}{2} p(x_2)\right) \alpha$$

$$i = 3 \text{ için} \quad \left(-1 - \frac{h}{2} p(x_3)\right) w_2 + \left(2 + h^2 q(x_3)\right) w_3 + \left(-1 + \frac{h}{2} p(x_3)\right) w_4 = -h^2 r(x_3)$$

$$i = 4 \text{ için} \quad \left(-1 - \frac{h}{2} p(x_4)\right) w_3 + \left(2 + h^2 q(x_4)\right) w_4 + \left(-1 + \frac{h}{2} p(x_4)\right) w_5 = -h^2 r(x_4)$$

$\vdots$

$$i = N - 1 \text{ için} \quad \left(-1 - \frac{h}{2} p(x_{N-1})\right) w_{N-2} + \left(2 + h^2 q(x_{N-1})\right) w_{N-1} + \left(-1 + \frac{h}{2} p(x_{N-1})\right) w_N = -h^2 r(x_{N-1})$$

$$i = N \text{ için} \quad \left(-1 - \frac{h}{2} p(x_N)\right) w_{N-1} + \left(2 + h^2 q(x_N)\right) w_N = -h^2 r(x_N) + \left(1 - \frac{h}{2} p(x_N)\right) \beta$$

METODUN ÖZETİ

- Bu denklemler matris formatında yazılırsa,

$$A = \begin{bmatrix} 2+h^2q(x_2) & \left(-1+\frac{h}{2}p(x_2)\right) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \left(-1-\frac{h}{2}p(x_3)\right) & 2+h^2q(x_3) & \left(-1+\frac{h}{2}p(x_3)\right) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(-1-\frac{h}{2}p(x_4)\right) & 2+h^2q(x_4) & \left(-1+\frac{h}{2}p(x_4)\right) & 0 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \left(-1-\frac{h}{2}p(x_{N-1})\right) & 2+h^2q(x_{N-1}) & \left(-1+\frac{h}{2}p(x_{N-1})\right) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \left(-1-\frac{h}{2}p(x_N)\right) & 2+h^2q(x_N) \end{bmatrix}$$

METODUN ÖZETİ

$$w = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -h^2 r(x_2) + \left(1 + \frac{h}{2} p(x_2)\right) \alpha \\ -h^2 r(x_3) \\ -h^2 r(x_4) \\ -h^2 r(x_5) \\ \vdots \\ -h^2 r(x_{N-1}) \\ -h^2 r(x_N) + \left(1 - \frac{h}{2} p(x_N)\right) \beta \end{bmatrix}$$

olmak üzere $Aw = B$ 'nin çözümü bilinmeyen vektörünü verecektir.

METODUN ÖZETİ

- A matrisinde ve B vektöründe elemanların yerlerini iyi tanımlamak gerekmektedir. O yüzden A matrisinde ve B vektöründe elemanların yerleşimi

$$i = 1, \dots, N - 1 \text{ için } A(i, i) = 2 + h^2 q(x_{i+1})$$

$$i = 1, \dots, N - 2 \text{ için } A(i + 1, i) = \left(-1 - \frac{h}{2} p(x_{i+2}) \right)$$

$$A(i, i + 1) = \left(-1 + \frac{h}{2} p(x_{i+1}) \right)$$

$$B(1, 1) = -h^2 r(x_2) + \left(1 + \frac{h}{2} p(x_2) \right) \alpha$$

$$B(N - 1, 1) = -h^2 r(x_N) + \left(1 - \frac{h}{2} p(x_N) \right) \beta$$

$$i = 2, \dots, N - 2 \text{ için } B(i, 1) = -h^2 r(x_{i+1})$$

bu biçimlerde dir.

LİNEER SONLU FARKLAR ALGORİTMASI

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

sınır-değer probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için

Girdi: a, b sınır noktaları; α, β sınır koşulları; $N \geq 2$.

Çıktı: Her $i = 0, 1, \dots, N + 1$ için $y(x_i)$ 'ye w_i yaklaşımları

LİNEER SONLU FARKLAR ALGORİTMASI

- Adım 1** $h = (b - a)/(N + 1);$
 $x = a + h;$
 $a_1 = 2 + h^2 q(x);$
 $b_1 = -1 + (h/2)p(x);$
 $d_1 = -h^2 r(x) + (1 + (h/2)p(x))\alpha.$
- Adım 2** $i = 2, \dots, N - 1$
 $x = a + ih;$
 $a_i = 2 + h^2 q(x);$
 $b_i = -1 + (h/2)p(x);$
 $c_i = -1 - (h/2)p(x);$
 $d_i = -h^2 r(x).$
- Adım 3** $x = b - h;$
 $a_N = 2 + h^2 q(x);$
 $c_N = -1 - (h/2)p(x);$
 $d_N = -h^2 r(x) + (1 - (h/2)p(x))\beta.$
- Adım 4** $l_1 = a_1;$ (Adım 4-8 tridiagonal lineer sistemi çözer.)
 $u_1 = b_1/a_1;$
 $z_1 = d_1/l_1.$
- Adım 5** $i = 2, \dots, N - 1$ $l_i = a_i - c_i u_{i-1};$
 $u_i = b_i/l_i;$
 $z_i = (d_i - c_i z_{i-1})/l_i.$
- Adım 6** $l_N = a_N - c_N u_{N-1};$
 $z_N = (d_N - c_N z_{N-1})/l_N.$
- Adım 7** $w_0 = \alpha;$
 $w_{N+1} = \beta.$
 $w_N = z_N.$
- Adım 8** $i = N - 1, \dots, 1$ $w_i = z_i - u_i w_{i+1}.$
- Adım 9** $i = 0, \dots, N + 1$ $x = a + ih;$
Çıktı $(x, w_i).$
- Adım 10** (İşlem tamamlanmıştır.)

LİNEER SONLU FARKLAR ALGORİTMASI

Örnek 4.

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 1, y(2) = 2$$

lineer sınır-değer probleminin yaklaşık çözümünü $N=9$ kullanarak çözelim ve sonuçları atış metodundan elde edilen sonuçlarla karşılaştıralım.

LİNEER SONLU FARKLAR ALGORİTMASI

Bu örnek için $N=9$ kullanacağız ve bundan dolayı $h=0.1$ 'dir. Ve böylece atış metodu ile çözdüğümüz zaman aldığımız aynı aralık sayısına ulaşırız. Aşağıdaki tabloda sonuçlar ve karşılaştırması yer almaktadır.

x_i	w_i	$y(x_i)$	$ w_i - y(x_i) $
1.0	1.00000000	1.00000000	
1.1	1.09260052	1.09262930	2.88×10^{-5}
1.2	1.18704313	1.18708484	4.17×10^{-5}
1.3	1.28333687	1.28338236	4.55×10^{-5}
1.4	1.38140205	1.38144595	4.39×10^{-5}
1.5	1.48112026	1.48115942	3.92×10^{-5}
1.6	1.58235990	1.58239246	3.26×10^{-5}
1.7	1.68498902	1.68501396	2.49×10^{-5}
1.8	1.78888175	1.78889853	1.68×10^{-5}
1.9	1.89392110	1.89392951	8.41×10^{-6}
2.0	2.00000000	2.00000000	

LİNEER SONLU FARKLAR ALGORİTMASI

- Bu sonuçlar atış metodu ile elde edilen sonuçlardan önemli ölçüde daha az doğrudur. Bunun sebebi atış metoduyla elde edilen sonuçlar $O(h^4)$ kesme hatası ile Runge Kutta metodu kullanılarak elde edilirken burada kullanılan sonlu fark metodu ile elde edilen sonuçlar $O(h^2)$ kesme hatası ile edilmiştir.

LİNEER SONLU FARKLAR ALGORİTMASI

- Daha yüksek doğruluklu bir sonlu fark metodu elde etmek için çeşitli yollar vardır.
- $y''(x_i)$ ve $y'(x_i)$ 'ye yaklaşmak için beşinci mertebeden Taylor serisini kullanmak kesme hatasını $O(h^4)$ mertebesine getirir. Bununla birlikte bu işlem, $y''(x_i)$ ve $y'(x_i)$ için yaklaşım formüllerinde sadece $y(x_{i+1})$ ve $y(x_{i-1})$ çarpımlarını değil $y(x_{i+2})$ ve $y(x_{i-2})$ 'nin çarpımlarını da gerektirir. Bu, $i=0$ ve $i=N$ 'de zorluk yaratır, çünkü w_{-1} ve w_{N+2} 'yi bilmiyoruz. Dahası, denklemlerin son hali tridiagonal formda olmaz, bu da daha fazla işlem gerektirir.

NONLINEER PROBLEMLER İÇİN SONLU FARKLAR METODU

$$y'' = f(x, y, y'), a \leq x \leq b, y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

- genel nonlinear sınır-değer problemi için sonlu farklar metodu lineer problemlere uygulanan metod ile benzerdir. Bununla birlikte, denklem sistemi lineer değildir, bu yüzden çözüm için iteratif işlem gereklidir.
- İşlemi geliştirebilmek için f fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığı varsayılmaktadır:

i) f ve f 'in kısmi türevleri f_y ve $f_{y'}$

$$D = \{(x, y, y') \mid a \leq x \leq b, -\infty \leq y \leq \infty, -\infty \leq y' \leq \infty\}$$

üzerinde süreklidir.

NONLINEER PROBLEMLER İÇİN SONLU FARKLAR METODU

ii) Bazı $\delta > 0$ için D üzerinde $f_y(x, y, y') \geq \delta$ dır.

iii) $k = \max_{(x,y,y') \in D} |f_y(x, y, y')|$ ve $L = \max_{(x,y,y') \in D} |f_{y'}(x, y, y')|$

olmak üzere k ve L sabitleri vardır.

Teorem 1.1'e göre bu koşullar altında problemin tek çözümü vardır.

Lineer durumda olduğu gibi bitiş noktaları $x_i = a + ih$ olmak üzere $[a, b]$ aralığı $(N + 1)$ eşit alt aralığa bölünür. Gerçek çözümün dördüncü türev ile sınırlı oluşu varsayımı,

$$y''(x_i) = f(x, y, y')$$

denkleminde türevlerin yerine uygun merkezi fark formüllerinin yazılmasına izin verir.

NONLINEER PROBLEMLER İÇİN SONLU FARKLAR METODU

- Yani,

(x_{i-1}, x_{i+1}) aralığındaki bazı ξ_i ve η_i ler için $(i = 1, 2, \dots, N)$

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6} y'''(\eta_i)\right) + \frac{h^2}{12} y'''(\xi_i)$$

Lineer durumda olduğu gibi, hata terimlerinin silinmesi ve sınır koşullarının uygulanması ile sonlu farklar metodu sonuçları:

$$w_0 = \alpha, w_{N+1} = \beta,$$

$$-\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) = 0, i = 1, 2, \dots, N$$

NONLİNEER PROBLEMLER İÇİN SONLU FARKLAR METODU

- Bu metoddan elde edilen NxN'lik nonlineer sistem;

$$2w_1 - w_2 + h^2 f\left(x_1, w_1, \frac{w_2 - \alpha}{2h}\right) - \alpha = 0,$$

$$-w_1 + 2w_2 - w_3 + h^2 f\left(x_2, w_2, \frac{w_3 - w_1}{2h}\right) = 0,$$

⋮

$$-w_{N-2} + 2w_{N-1} - w_N + h^2 f\left(x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N - w_{N-2}}{2h}\right) = 0,$$

$$-w_{N-1} + 2w_N + h^2 f\left(x_N, w_N, \frac{\beta - w_{N-1}}{2h}\right) - \beta = 0$$

- $h < 2/L$ için tek çözüme sahiptir.

*

İTERASYONLAR İÇİN NEWTON METODU

- Nonlineer sistemin çözümüne yaklaşabilmek için Newton metodu kullanılabilir.

$$\left\{ \left(w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \dots, w_N^{(k)} \right)^t \right\}$$

iterasyonlar dizisi, başlangıç yaklaşımı

$$\left\{ \left(w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \dots, w_N^{(0)} \right)^t \right\}$$

nın $(w_1, w_2, \dots, w_N)^t$ çözümüne yeteri kadar yakın olması ve sistemler için Jacobian matrisinin singüler olmaması koşulu altında sonlu farklar metodu * çözümüne yakınsayacak biçimde oluşturulur.

İTERASYONLAR İÇİN NEWTON METODU

- * sistemi için $J(w_1, w_2, \dots, w_N)$ Jacobian matrisi tridiagonaldır:

$$J(w_1, w_2, \dots, w_N)_{ij} = \begin{cases} -1 + \frac{h}{2} f_{y'} \left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right), & i = j-1, j = 2, \dots, N \\ 2 + h^2 f_y \left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right), & i = j, j = 1, \dots, N \\ -1 - \frac{h}{2} f_{y'} \left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right), & i = j+1, j = 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$w_0 = \alpha, w_{N+1} = \beta.$$

İTERASYONLAR İÇİN NEWTON METODU

- Nonlineer sistemler için Newton metodu her bir iterasyonda

$$\begin{aligned} J(w_1, \dots, w_N)(v_1, \dots, v_N)^t = & \\ & - \left(2w_1 - w_2 - \alpha + h^2 f \left(x_1, w_1, \frac{w_2 - \alpha}{2h} \right), \right. \\ & - w_1 + 2w_2 - w_3 + h^2 f \left(x_2, w_2, \frac{w_3 - w_1}{2h} \right), \dots, \\ & - w_{N-2} + 2w_{N-1} - w_N + h^2 f \left(x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N - w_{N-2}}{2h} \right), \\ & \left. - w_{N-1} + 2w_N + h^2 f \left(x_N, w_N, \frac{\beta - w_{N-1}}{2h} \right) - \beta \right)^t \end{aligned}$$

İTERASYONLAR İÇİN NEWTON METODU

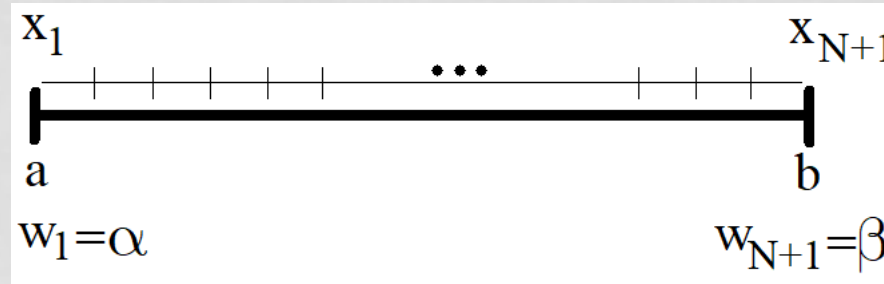
- NxN lineer sisteminin $v_1, v_2, \dots, v_N$ çözülmesini gerektirir. Çünkü;

$$w_i^{(k)} = w_i^{(k-1)} + v_i, \quad \text{her bir } i = 1, 2, \dots, N \text{ için}$$

- J tridiagonal olduğundan problem görüldüğü kadar zor değildir.

METODUN ÖZETİ

- $y'' = f(x, y, y'), a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$
sınır-değer problemi için



x tanım aralığı N eşit alt aralığa bölünür. Burada sayısal çözüm w olarak modellenmiştir.

Burada $h = \frac{b-a}{N}$ dir.

METODUN ÖZETİ

$$w''(x_i) = f(x_i, w(x_i), w'(x_i)), a \leq x \leq b,$$

$$w(x_1) = w_1 = \alpha, w(x_{N+1}) = w_{N+1} = \beta$$

- sınır değer probleminde

$$w''(x_i) \approx \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2}$$

$$w'(x_i) \approx \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}$$

merkezi sonlu fark formülleri kullanılırsa,

$$-\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) = 0$$

$$w_1 = \alpha, w_{N+1} = \beta$$

METODUN ÖZETİ

- Bu denklem düzenlenirse,

$$-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1} + h^2 f\left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) = 0$$

$$w_1 = \alpha, w_{N+1} = \beta$$

elde edilir. Bu denklemde $i=2,3,\dots,N$ yazılırsa bir sonraki slayttan da görüleceği üzere $N-1$ bilinmeyenli $w_2, w_3, \dots, w_N$ $N-1$ tane cebirsel denklem elde edilir.

METODUN ÖZETİ

$$i = 2 \text{ için } 2w_2 - w_3 + h^2 f\left(x_2, w_2, \frac{w_3 - w_1}{2h}\right) - \alpha = 0$$

$$i = 3 \text{ için } -w_2 + 2w_3 - w_4 + h^2 f\left(x_3, w_3, \frac{w_4 - w_2}{2h}\right) = 0$$

$$i = 4 \text{ için } -w_3 + 2w_4 - w_5 + h^2 f\left(x_4, w_4, \frac{w_5 - w_3}{2h}\right) = 0$$

⋮

$$i = N - 1 \text{ için } -w_{N-2} + 2w_{N-1} - w_N + h^2 f\left(x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N - w_{N-2}}{2h}\right) = 0$$

$$i = N \text{ için } -w_{N-1} + 2w_N + h^2 f\left(x_N, w_N, \frac{\beta - w_{N-1}}{2h}\right) - \beta = 0$$

METODUN ÖZETİ

GEREKLİ BİLGİLER

DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN NEWTON METODU

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

n boyutlu denklem sisteminin çözümü için öncelikle f_i 'nin Taylor serisi yazılır.

$$f_i(x + \Delta x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Delta x_j + O(\Delta x^2)$$

$$\Rightarrow J(x)\Delta x = -f(x), \quad J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \text{ (Jacobian matrisi)}$$

METODUN ÖZETİ

- Metoda göre öncelikle w 'lar için başlangıç değerleri belirlemek gereklidir. Bu başlangıç değerleri;

$$i = 2, 3, \dots, N \text{ için } w_i = \alpha + i \left(\frac{\beta - \alpha}{b - a} \right) h$$

olarak belirlenecektir.

METODUN ÖZETİ

- Newton metoduna göre Jacobian matrisi J_{ij}

$$\begin{bmatrix} 2+h^2 f_y \left(x_2, w_2, \frac{w_3-w_1}{2h} \right) & -1+\frac{h}{2} f_{y'} \left(x_2, w_2, \frac{w_3-w_1}{2h} \right) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1-\frac{h}{2} f_{y'} \left(x_3, w_3, \frac{w_4-w_2}{2h} \right) & 2+h^2 f_y \left(x_3, w_3, \frac{w_4-w_2}{2h} \right) & -1+\frac{h}{2} f_{y'} \left(x_3, w_3, \frac{w_4-w_2}{2h} \right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1-\frac{h}{2} f_{y'} \left(x_4, w_4, \frac{w_5-w_3}{2h} \right) & 2+h^2 f_y \left(x_4, w_4, \frac{w_5-w_3}{2h} \right) & -1+\frac{h}{2} f_{y'} \left(x_4, w_4, \frac{w_5-w_3}{2h} \right) & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & -1-\frac{h}{2} f_{y'} \left(x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N-w_{N-2}}{2h} \right) & 2+h^2 f_y \left(x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N-w_{N-2}}{2h} \right) & -1+\frac{h}{2} f_{y'} \left(x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N-w_{N-2}}{2h} \right) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1-\frac{h}{2} f_{y'} \left(x_N, w_N, \frac{w_{N+1}-w_{N-1}}{2h} \right) & 2+h^2 f_y \left(x_N, w_N, \frac{w_{N+1}-w_{N-1}}{2h} \right) \end{bmatrix}$$

METODUN ÖZETİ

- Karşı taraf vektörü ise F_i

$$\begin{bmatrix} -2w_2 + w_3 - h^2 f\left(x_2, w_2, \frac{w_3 - w_1}{2h}\right) + \alpha \\ w_2 - 2w_3 + w_4 - h^2 f\left(x_3, w_3, \frac{w_4 - w_2}{2h}\right) \\ w_3 - 2w_4 + w_5 - h^2 f\left(x_4, w_4, \frac{w_5 - w_3}{2h}\right) \\ \vdots \\ w_{N-2} - 2w_{N-1} + w_N - h^2 f\left(x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N - w_{N-2}}{2h}\right) \\ w_{N-1} - 2w_N - h^2 f\left(x_N, w_N, \frac{\beta - w_{N-1}}{2h}\right) + \beta \end{bmatrix}$$

METODUN ÖZETİ

- Δx vektörü de $\begin{bmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \\ \vdots \\ \Delta x_{N-1} \\ \Delta x_N \end{bmatrix}$ olmak üzere
- $J_{ij}\Delta x_i = F_i$ cebirsel denklem takımı çözülür. Burada bulunan Δx vektörü $w^{(k)} = w^{(k-1)} + \Delta x$ şeklinde bilinmeyen w vektörünü bulmakta kullanılır. Burada iterasyonların durma şartı $\|\Delta x\|_2 < TOL$ veya $k > M$ dir. Yani tolerans (TOL) ve maksimum iterasyon sayısı (M) parametre olarak eklenecektir.

METODUN ÖZETİ

- Burada Jacobian matrisi (J) ve karşı taraf vektörü (F) 'de elemanlar;

$$i = 1, 2, \dots, N - 1 \text{ için } J(i, i) = 2 + h^2 f_y \left(x_{i+1}, w_{i+1}, \frac{w_{i+2} - w_i}{2h} \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 2 \text{ için } J(i + 1, i) = -1 - \frac{h}{2} f_y' \left(x_{i+2}, w_{i+2}, \frac{w_{i+3} - w_{i+1}}{2h} \right)$$

$$J(i, i + 1) = -1 + \frac{h}{2} f_y' \left(x_{i+1}, w_{i+1}, \frac{w_{i+2} - w_i}{2h} \right)$$

METODUN ÖZETİ

$$F(1,1) = -2w_2 + w_3 - h^2 f\left(x_2, w_2, \frac{w_3 - w_1}{2h}\right) + \alpha$$

$$F(N-1,1) = w_{N-1} - 2w_N - h^2 f\left(x_N, w_N, \frac{\beta - w_{N-1}}{2h}\right) + \beta$$

$$i = 2, 3, \dots, N-2 \text{ için } F(i,1) = w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2} - h^2 f\left(x_{i+1}, w_{i+1}, \frac{w_{i+2} - w_i}{2h}\right)$$

NONLINEER SONLU FARKLAR ALGORİTMASI

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$

nonlinear sınır-değer probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için

Girdi: a, b sınır noktaları; α, β sınır koşulları;

$N \geq 2$; tolerans (TOL); maksimum iterasyon sayısı M .

Çıktı: Her $i = 0, 1, \dots, N + 1$ için $y(x_i)$ 'ye w_i yaklaşımları veya maksimum iterasyon sayısının aşıldığı mesajı

NONLİNEER SONLU FARKLAR ALGORİTMASI

Adım 1 $h = (b - a)/(N + 1);$
 $w_0 = \alpha;$
 $w_{N+1} = \beta.$

Adım 2 $i = 1, \dots, N:$ $w_i = \alpha + i \left(\frac{\beta - \alpha}{b - a} \right) h.$

Adım 3 $k = 1.$

Adım 4 $k \leq M$ iken Adım 5-16 yapılır.

Adım 5 $x = a + h;$
 $t = (w_2 - \alpha)/(2h);$
 $a_1 = 2 + h^2 f_y(x, w_1, t);$
 $b_1 = -1 + (h/2) f_{y'}(x, w_1, t);$
 $d_1 = -(2w_1 - w_2 - \alpha + h^2 f(x, w_1, t)).$

Adım 6 $i = 2, \dots, N - 1$
 $x = a + ih;$
 $t = (w_{i+1} - w_{i-1})/(2h);$
 $a_i = 2 + h^2 f_y(x, w_i, t);$
 $b_i = -1 + (h/2) f_{y'}(x, w_i, t);$
 $c_i = -1 - (h/2) f_{y'}(x, w_i, t);$
 $d_i = -(2w_i - w_{i+1} - w_{i-1} + h^2 f(x, w_i, t)).$

Adım 7 $x = b - h;$
 $t = (\beta - w_{N-1})/(2h);$
 $a_N = 2 + h^2 f_y(x, w_N, t);$
 $c_N = -1 - (h/2) f_{y'}(x, w_N, t);$
 $d_N = -(2w_N - w_{N-1} - \beta + h^2 f(x, w_N, t)).$

NONLINEER SONLU FARKLAR ALGORİTMASI

Adım 8 $l_1 = a_1;$ Adım 8-12 tridiagonal lineer sistemi
çözmektedir.

$$u_1 = b_1/a_1;$$
$$z_1 = d_1/l_1.$$

Adım 9 $i = 2, \dots, N - 1$ $l_i = a_i - c_i u_{i-1};$
 $u_i = b_i/l_i;$
 $z_i = (d_i - c_i z_{i-1})/l_i.$

Adım 10 $l_N = a_N - c_N u_{N-1};$
 $z_N = (d_N - c_N z_{N-1})/l_N.$

Adım 11 $v_N = z_N;$
 $w_N = w_N + v_N.$

Adım 12 $i = N - 1, \dots, 1$ $v_i = z_i - u_i v_{i+1};$
 $w_i = w_i + v_i.$

Adım 13 $\|v\| \leq TOL$ ise Adım 14 ve Adım 15 yapılır.

Adım 14 $i = 0, \dots, N + 1$ $x = a + ih;$
 $\text{ÇIKTI}(x, w_i).$

Adım 15 DUR. (İşlem başarılıdır.)

Adım 16 $k = k + 1.$

Adım 17 ÇIKTI ('Maksimum iterasyon sayısı aşıldı');
(İşlem başarısızdır.)
DUR.

NONLİNEER SONLU FARKLAR ALGORİTMASI

- Başlangıçta verilen koşullar sağlanamazsa iyi bir başlangıç yaklaşımı yapmak gereklidir, bu nedenle iterasyon sayısı için bir üst sınır belirtilmeli ve bu aşılsa, yeni bir başlangıç yaklaşımı veya adım boyutu azaltılmalıdır. Çelişkili bir durum söz konusu değilse çözümün doğrusal olduğu varsayılarak işleme başlamak mantıklıdır.
- Her bir $i = 1, 2, \dots, N$ için w_i 'ye yapılan $w_i^{(0)}$ başlangıç yaklaşımı Adım 2'de (a, α) ve (b, β) sınır noktalarından geçen doğrudan ve x_i 'nin hesaplanmasından elde edilir.

NONLİNEER SONLU FARKLAR ALGORİTMASI

Örnek 4.

$$y'' = \frac{1}{8} \left(32 + 2x^3 - yy' \right), 1 \leq x \leq 3, \quad y(1) = 17, y(3) = \frac{43}{3}$$

nonlinear sınır-değer probleminin yaklaşık çözümünü $h=0.1$ kullanarak çözelim ve sonuçları atış metodundan elde edilen sonuçlarla karşılaştıralım.