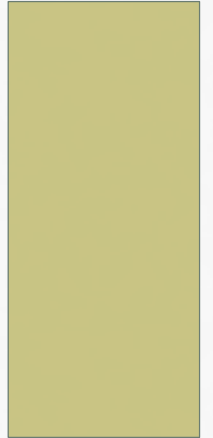


KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Arş. Gör. Dr. Fatih Aylıkçı



GERİ SONLU FARKLAR METODU

Koşulsuz kararlı (unconditionally stable) bir metod elde etmek için $(\partial u / \partial t)(x_i, t_j)$ için geri fark oranını kullanarak kapalı (implicit) bir fark metodu aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

(bazı $\mu_j \in (t_{j-1}, t_j)$ için). Bu ifade denklemde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} - \alpha^2 \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} \\ &= -\frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) - \alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j) \quad (\text{bazı } \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}) \text{ için}). \end{aligned}$$

GERİ SONLU FARKLAR METODU

Geri fark metodu

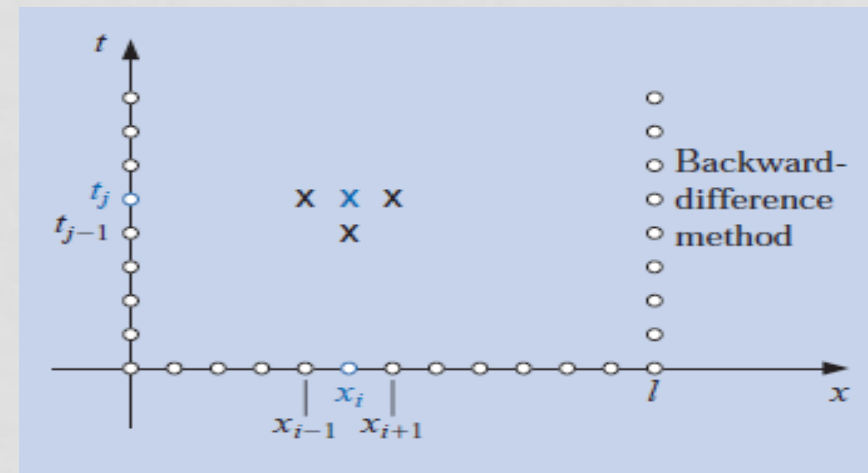
$$\frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

şeklinde elde edilir. $(i = 1, 2, \dots, m-1; j = 1, 2, \dots)$

Geri fark metodu (x_i, t_j) değerlerine yaklaşan

$$(x_i, t_{j-1}), (x_{i-1}, t_j) \text{ ve } (x_{i+1}, t_j)$$

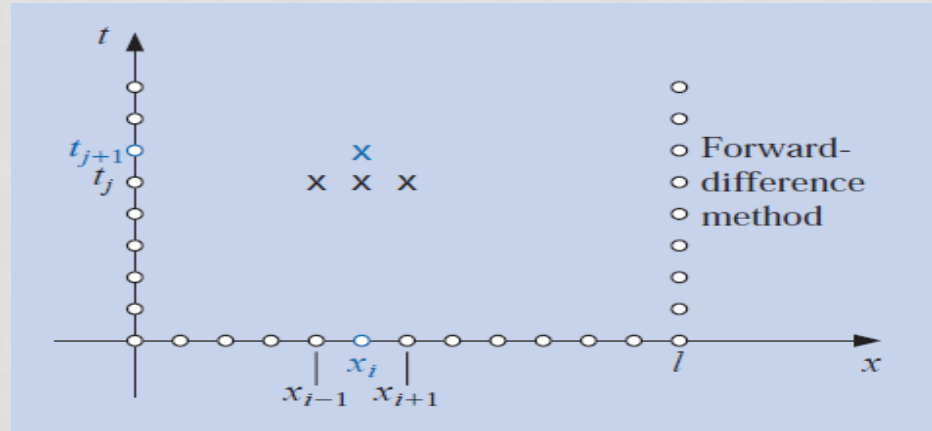
mesh noktalarını içermektedir.



GERİ SONLU FARKLAR METODU

Problemle ilişkili sınır ve başlangıç koşulları işaretli mesh noktalarında bilgi verdiğinden şekil, denklemini çözmek için hiçbir açık (explicit) prosedürün uygulanamayacağını göstermektedir.

İleri fark yönteminde $(x_{i-1}, t_{j-1}), (x_i, t_{j-1}), (x_{i+1}, t_{j-1})$ yaklaşımlarının (x_i, t_j) yaklaşımını bulmak için kullanıldığını hatırlayalım. Dolayısıyla başlangıç ve sınır koşullarından yararlanarak yaklaşık çözümleri bulmak için açık (explicit) metod da kullanılabilir.



GERİ SONLU FARKLAR METODU

$\lambda = \alpha^2(k / h^2)$ ile birlikte $i=1,2,\dots,m-1$ ve $j = 1,2,\dots$ için geri sonlu farklar metodu

$$(1 + 2\lambda)w_{i,j} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1}$$

biçimindedir.

$$w_{i,0} = f(x_i), i = 1, 2, \dots, m-1$$

$$w_{m,j} = w_{0,j} = 0, j = 1, 2, \dots$$

bilgileri ile birlikte bu metodun matris gösterimi bir sonraki slaytta verilmiştir.

GERİ SONLU FARKLAR METODU

$$\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & (1+2\lambda) & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & (1+2\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}$$

$$Aw^{(j)} = w^{(j-1)}, j = 1, 2, \dots$$

GERİ SONLU FARKLAR METODU

Bundan dolayı, $w^{(j-1)}$ 'den $w^{(j)}$ 'yi elde etmek için bir lineer sistem çözmek zorundayız. Ancak $\lambda > 0$ 'dır, bundan dolayı A matrisi pozitif tanımlıdır ve kesin köşegen olarak baskındır, ek olarak tridiagonaldır. Bu sistemi çözmek için Crout ayrışımı veya SOR algoritmasını kullanabiliriz.

METODUN ÖZETİ

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, t > 0$$

$$u(0, t) = f_{x0}(0, t), u(L, t) = f_{xL}(L, t)$$

$$u(x, 0) = f_{t0}(x, 0)$$

ısı denkleminin önce çözüm bölgesini grid'lere ayıralım. Soruda $t=T$ için çözüm istendiğini varsayalım. Adım uzunlukları;

$$h = \frac{L}{m}, k = \frac{T}{n} \text{ olmak üzere } x \text{ aralığını } m \text{ tane, } t$$

aralığını k tane alt aralığa böleceğiz.

METODUN ÖZETİ

	$x_1 = 0$	$x_2 = h$	$x_3 = 2h$	$\dots$	$x_m = (m-1)h$	$x_{m+1} = mh = L$	
$t_1 = 0$	$w_{1,1}$	$w_{2,1}$	$w_{3,1}$	$\dots$	$w_{m,1}$	$w_{m+1,1}$	3
$t_2 = k$	$w_{1,2}$	$w_{2,2}$	$w_{3,2}$	$\dots$	$w_{m,2}$	$w_{m+1,2}$	
$t_3 = 2k$	$w_{1,3}$	$w_{2,3}$	$w_{3,3}$	$\dots$	$w_{m,3}$	$w_{m+1,3}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$t_n = (n-1)k$	$w_{1,n}$	$w_{2,n}$	$w_{3,n}$	$\dots$	$w_{m,n}$	$w_{m+1,n}$	
$t_{n+1} = nk = T$	$w_{1,n+1}$	$w_{2,n+1}$	$w_{3,n+1}$	$\dots$	$w_{m,n+1}$	$w_{m+1,n+1}$	
	1					2	

Yukarıda görüldüğü gibi bir tablo yapıldığında (burada $u(x_i, t_j) \rightarrow w_{i,j}$), tabloda beyaz kutular $j = 1, 2, \dots, n+1$ için $w_{1,j} = f_{x0}(0, t_j)$ **1** $i = 1, 2, \dots, m+1$ için $w_{i,1} = f_{t0}(x_i, 0)$ **3**

$$w_{m+1,j} = f_{xL}(L, t_j) \quad \mathbf{2}$$

görüldüğü gibi sınır koşullarını temsil etmektedir.

METODUN ÖZETİ

Tabloda ortada görülen sarı kutu ise bilinmeyenleri içermektedir. Toplamda $(m-1) \times n$ tane bilinmeyen vardır.

Birinci türev için geri sonlu fark formülü;

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{k}$$

İkinci türev için merkezi sonlu fark formülü;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2}$$

olmak üzere bu formüller denklemde yerine yazılırsa

METODUN ÖZETİ

$$\alpha^2 \frac{k}{h^2} = \lambda \text{ (lambda)}, 1 + 2\lambda = \mu \text{ (mu)} \text{ olmak üzere}$$
$$\mu w_{i,j} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1}$$

sonlu fark formülü elde edilir.

Şimdi bu formülde $j = 2, \dots, n+1$ ve $i = 2, \dots, m$ yerlerine konulur ve $(m-1) \times n$ bilinmeyenli $(m-1) \times n$ denklem elde edilir. Bu denklem takımı matris formunda yazılıp bilinmeyenler için çözüm yapılır.

METODUN ÖZETİ

$j = 2$ için

$$i = 2 \quad \mu w_{2,2} - \lambda w_{3,2} = w_{2,1} + \lambda w_{1,2}$$

$$i = 3, \dots, m-1 \quad \mu w_{i,2} - \lambda w_{i+1,2} - \lambda w_{i-1,2} = w_{i,1}$$

$$i = m \quad \mu w_{m,2} - \lambda w_{m-1,2} = w_{m,1} + \lambda w_{m+1,2}$$

$j = 3, \dots, n+1$

$$i = 2 \quad \mu w_{2,j} - \lambda w_{3,j} - w_{2,j-1} = \lambda w_{1,j}$$

$$i = 3, \dots, m-1 \quad \mu w_{i,j} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} - w_{i,j-1} = 0$$

$$i = m \quad \mu w_{m,j} - \lambda w_{m-1,j} - w_{m,j-1} = \lambda w_{m+1,j}$$

METODUN ÖZETİ

A matrisi

$$\begin{bmatrix} \mu & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & \mu & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \mu & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & \mu & -\lambda & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\lambda & \mu & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \mu \end{bmatrix}$$

B matrisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$(m-1) \times (m-1)$ 'lik matrisler olmak üzere katsayılar matrisi;

METODUN ÖZETİ

$$K = \begin{bmatrix} A & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} & \cdots & [0]_{(m-1) \times m-1} \\ B & A & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} & \cdots & [0]_{(m-1) \times m-1} \\ [0]_{(m-1) \times m-1} & B & A & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} & \cdots & [0]_{(m-1) \times m-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ [0]_{(m-1) \times m-1} & \cdots & [0]_{(m-1) \times m-1} & B & A & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} \\ [0]_{(m-1) \times m-1} & \cdots & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} & B & A & [0]_{(m-1) \times m-1} \\ [0]_{(m-1) \times m-1} & \cdots & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} & [0]_{(m-1) \times m-1} & B & A \end{bmatrix}$$

$((m-1) \times n) \times ((m-1) \times n)$ 'lik bir K katsayılar matrisi elde edilir.

METODUN ÖZETİ

Burada;

$$i = 1, m - 1 \text{ için } A(i, i) = \mu$$

$$i = 1 : m - 2 \text{ için } A(i, i + 1) = -\lambda$$

$$A(i + 1, i) = -\lambda$$

$$i = 1 : m - 1 \text{ için } B(i, i) = -1$$

$$i = 1 : n \text{ için } K((m - 1)(i - 1) + 1 : (m - 1)i, (m - 1)(i - 1) + 1 : (m - 1)i) = A$$

$$i = 1 : n - 1 \text{ için } K((m - 1)i + 1 : (m - 1)(i + 1), (m - 1)(i - 1) + 1 : (m - 1)i) = B$$

METODUN ÖZETİ

Sağ taraf vektörü F;

$$\begin{bmatrix} w_{2,1} + \lambda w_{1,2} \\ w_{3,1} \\ \vdots \\ w_{m-1,1} \\ w_{m,1} + \lambda w_{m+1,2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda w_{1,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda w_{m+1,j} \end{bmatrix}$$

$$j = 3, \dots, n+1$$

olmak üzere
 $(m-1) \times n$
satırlı bir
sütun vektördür.

METODUN ÖZETİ

- Burada;

$$F(1,1) = ft_0(x_2, 0) + \lambda f_{x0}(0, t_2)$$

$$i = 2, \dots, m-2 \text{ için } F(i,1) = ft_0(x_{i+1}, 0)$$

$$F(m-1,1) = ft_0(x_m, 0) + \lambda f_{xL}(L, t_2)$$

$$j = 3, \dots, n+1 \text{ için } F((m-1)(j-2)+1,1) = \lambda f_{x0}(0, t_j)$$

$$F((m-1)(j-1),1) = \lambda f_{xL}(L, t_j)$$

METODUN ÖZETİ

K katsayılar matrisi ve F sağ taraf vektörü oluşturulduktan sonra bilinmeyenler vektörü $w = K \setminus F$ ile bulunur;

w bilinmeyenler vektörü sağda görüldüğü üzere $(m-1) \times n$ satırlı bir sütun vektördür.

$$\begin{bmatrix} w_{2,2} \\ w_{3,2} \\ \vdots \\ w_{m,2} \\ w_{2,3} \\ w_{3,3} \\ \vdots \\ w_{m,3} \\ \vdots \\ w_{2,n+1} \\ w_{3,n+1} \\ \vdots \\ w_{m,n+1} \end{bmatrix}$$

GERİ SONLU FARKLAR METODU ALGORİTMASI

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, 0 < x < l, 0 < t < T$$

parabolik kısmi diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, 0 < t < T$$

sınır koşulları ve

$$u(x,0) = f(x), 0 < x < l$$

başlangıç koşulu ile birlikte bulalım.

GİRDİ: l sınırı; T maksimum zaman; α sabiti;

$m \geq 3, N \geq 1$ tamsayıları

ÇIKTI: Her $i = 1, \dots, m-1$ ve $j = 1, \dots, N$ için

$u(x_i, t_j)$ 'ye $w_{i,j}$ yaklaşımları

GERİ SONLU FARKLAR METODU ALGORİTMASI

- Step 1* Set $h = l/m$;
 $k = T/N$;
 $\lambda = \alpha^2 k/h^2$.
- Step 2* For $i = 1, \dots, m - 1$ set $w_i = f(ih)$. (*Initial values.*)
(Steps 3–11 solve a tridiagonal linear system using Algorithm 6.7.)
- Step 3* Set $l_1 = 1 + 2\lambda$;
 $u_1 = -\lambda/l_1$.
- Step 4* For $i = 2, \dots, m - 2$ set $l_i = 1 + 2\lambda + \lambda u_{i-1}$;
 $u_i = -\lambda/l_i$.
- Step 5* Set $l_{m-1} = 1 + 2\lambda + \lambda u_{m-2}$.
- Step 6* For $j = 1, \dots, N$ do Steps 7–11.
- Step 7* Set $t = jk$; (*Current t_j .*)
 $z_1 = w_1/l_1$.
- Step 8* For $i = 2, \dots, m - 1$ set $z_i = (w_i + \lambda z_{i-1})/l_i$.
- Step 9* Set $w_{m-1} = z_{m-1}$.
- Step 10* For $i = m - 2, \dots, 1$ set $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$.
- Step 11* OUTPUT (t); (*Note: $t = t_j$.*)
For $i = 1, \dots, m - 1$ set $x = ih$;
OUTPUT (x, w_i). (*Note: $w_i = w_{i,j}$.*)
- Step 12* STOP. (*The procedure is complete.*)

GERİ SONLU FARKLAR METODU ALGORİTMASI

Örnek 2.
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, t \geq 0$$

ısı denklemini

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

kısıtlamaları ile birlikte $h=0.1$ ve $k=0.01$ için geri sonlu fark metodunu kullanarak çözünüz.

CRANK NICOLSON METODU

t' de j . adımdaki

$$\tau_F = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) + O(h^2)$$

kesme hatası ile birlikte

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0$$

ileri fark metodu **İLE**

CRANK NICOLSON METODU

(j+1). adımdaki

$$\tau_B = -\frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \bar{\mu}_j) + O(h^2)$$

kesme hatası ile birlikte

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} = 0$$

geri fark metodunun ortalaması çok kazançlı bir metodun üretilmesini sağlar.

CRANK NICOLSON METODU

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \bar{\mu}_j) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

olduğu varsayılırsa $O(h^2 + k^2)$ kesme hatalı ortalama fark metodu

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} \right) = 0$$

bulunur.

CRANK NICOLSON METODU

Bu metod Crank Nicolson metodu olarak bilinir ve

$$\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2}, w^{(j)} = (w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{m-1,j})^t$$

ve A ve B matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} (1+\lambda) & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & (1+\lambda) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} (1-\lambda) & \frac{\lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\lambda}{2} & (1-\lambda) \end{bmatrix}.$$

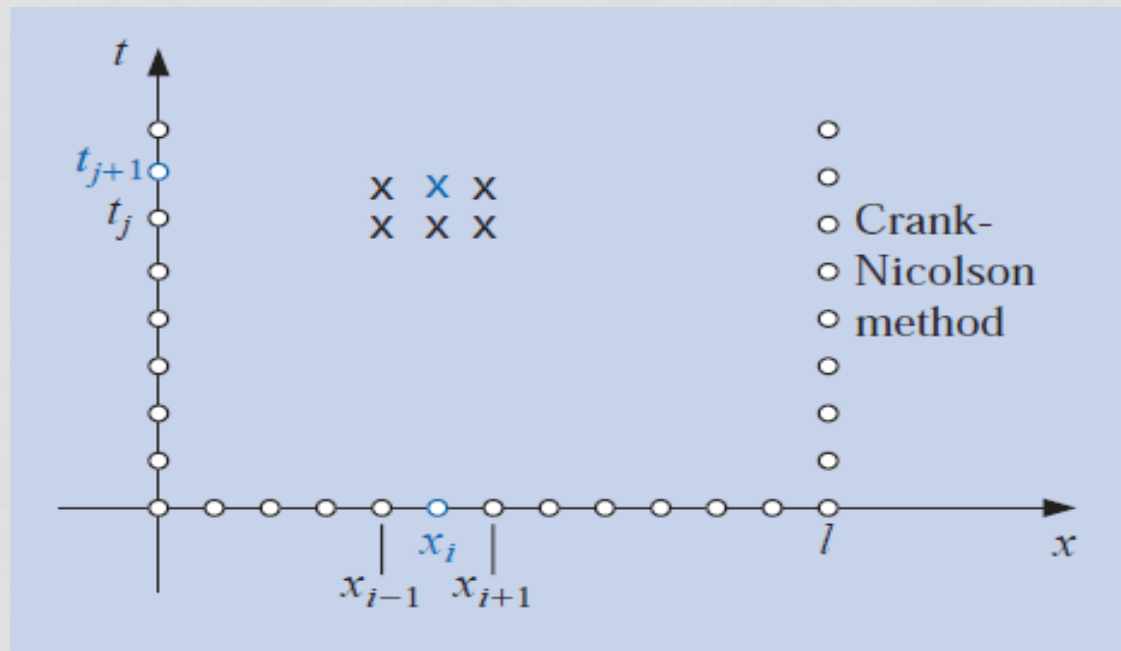
olmak üzere her $j = 0, 1, 2, \dots$ için

$$Aw^{(j+1)} = Bw^{(j)}$$

matris formunda gösterilir.

CRANK NICOLSON METODU

Singüler olmayan A matrisi pozitif tanımlı ve kesin köşegensel olarak dominanttır, ek olarak tridiagonaldır. Ya Crout ayrışımı ya da SOR algoritması yaklaşık çözümü elde etmek için kullanılabilir.



METODUN ÖZETİ

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, t > 0$$

$$u(0, t) = f_{x0}(0, t), u(L, t) = f_{xL}(L, t)$$

$$u(x, 0) = f_{t0}(x, 0)$$

ısı denkleminin önce çözüm bölgesini grid'lere ayıralım. Soruda $t=T$ için çözüm istendiğini varsayalım. Adım uzunlukları;

$$h = \frac{L}{m}, k = \frac{T}{n} \text{ olmak üzere } x \text{ aralığını } m \text{ tane, } t$$

aralığını k tane alt aralığa böleceğiz.

METODUN ÖZETİ

	$x_1 = 0$	$x_2 = h$	$x_3 = 2h$	$\dots$	$x_m = (m-1)h$	$x_{m+1} = mh = L$	
$t_1 = 0$	$w_{1,1}$	$w_{2,1}$	$w_{3,1}$	$\dots$	$w_{m,1}$	$w_{m+1,1}$	3
$t_2 = k$	$w_{1,2}$	$w_{2,2}$	$w_{3,2}$	$\dots$	$w_{m,2}$	$w_{m+1,2}$	
$t_3 = 2k$	$w_{1,3}$	$w_{2,3}$	$w_{3,3}$	$\dots$	$w_{m,3}$	$w_{m+1,3}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$t_n = (n-1)k$	$w_{1,n}$	$w_{2,n}$	$w_{3,n}$	$\dots$	$w_{m,n}$	$w_{m+1,n}$	
$t_{n+1} = nk = T$	$w_{1,n+1}$	$w_{2,n+1}$	$w_{3,n+1}$	$\dots$	$w_{m,n+1}$	$w_{m+1,n+1}$	
	1					2	

Yukarıda görüldüğü gibi bir tablo yapıldığında (burada $u(x_i, t_j) \rightarrow w_{i,j}$), tabloda beyaz kutular $j = 1, 2, \dots, n+1$ için $w_{1,j} = f(x_0, t_j)$ **1** $i = 1, 2, \dots, m+1$ için $w_{i,1} = f(x_i, 0)$ **3**

$$w_{m+1,j} = f(x_L, t_j) \quad \mathbf{2}$$

görüldüğü gibi sınır koşullarını temsil etmektedir.

METODUN ÖZETİ

Tabloda ortada görülen sarı kutu ise bilinmeyenleri içermektedir. Toplamda $(m-1) \times n$ tane bilinmeyen vardır.

Birinci türev için (j). adımda ileri sonlu fark formülü ile (j+1). adımdaki geri sonlu fark formülünün ortalaması alınıp

$$\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2} \text{ (lambda)}, \mu_1 = 1 + \lambda \text{ (mu1)}, \mu_2 = 1 - \lambda \text{ (mu2) olmak üzere}$$
$$-\frac{\lambda}{2} w_{i+1,j+1} + \mu_1 w_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2} w_{i-1,j+1} = \frac{\lambda}{2} w_{i+1,j} + \mu_2 w_{i,j} + \frac{\lambda}{2} w_{i-1,j}$$

Crank-Nicolson sonlu fark formülüne ulaşılır.

METODUN ÖZETİ

$j = 1$ için

$$i = 2 \quad -\frac{\lambda}{2} w_{3,2} + \mu_1 w_{2,2} = \frac{\lambda}{2} w_{3,1} + \mu_2 w_{2,1} + \frac{\lambda}{2} w_{1,1} + \frac{\lambda}{2} w_{1,2}$$

$$i = 3, \dots, m-1 \quad -\frac{\lambda}{2} w_{i+1,2} + \mu_1 w_{i,2} - \frac{\lambda}{2} w_{i-1,2} = \frac{\lambda}{2} w_{i+1,1} + \mu_2 w_{i,1} + \frac{\lambda}{2} w_{i-1,1}$$

$$i = m \quad \mu_1 w_{m,2} - \frac{\lambda}{2} w_{m-1,2} = \frac{\lambda}{2} w_{m+1,1} + \mu_2 w_{m,1} + \frac{\lambda}{2} w_{m-1,1} + \frac{\lambda}{2} w_{m+1,2}$$

- Önce $j=1$ için yukarıdaki denklem sistemi çözülür. Yani $i=2, \dots, m$ için $w_{i,2}$ 'ler hesaplanır. Sonra aynı biçimdeki $w_{i,3}$ 'ler bir önceki iterasyonda elde edilen $w_{i,2}$ 'ler kullanılarak hesaplanır. Bu işlem $j=n$ olana kadar sürdürülür.

METODUN ÖZETİ

$(m-1) \times (m-1)$ 'lik matrisler olmak üzere katsayılar matrisi her bir iterasyonda aynıdır.

Katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & -\lambda/2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda/2 & \mu_1 & -\lambda/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda/2 & \mu_1 & -\lambda/2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda/2 & \mu_1 & -\lambda/2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\lambda/2 & \mu_1 & -\lambda/2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\lambda/2 & \mu_1 \end{bmatrix}$$

Burada;

$$i = 1, m-1 \text{ için } K(i, i) = \mu_1$$

$$i = 1 : m-2 \text{ için } K(i, i+1) = -\lambda/2$$

$$K(i+1, i) = -\lambda/2$$

METODUN ÖZETİ

$j=1, \dots, n$ için sağ taraf vektörü (F) ilk iterasyonda başlangıç ve sınır koşullarını, sonraki iterasyonlarda ek olarak bir önceki iterasyondan gelen bilinmeyenleri kullanır.

Sağ taraf vektörü (F)

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda}{2} w_{3,j} + \mu_2 w_{2,j} + \frac{\lambda}{2} w_{1,j} + \frac{\lambda}{2} w_{1,j+1} \\ \frac{\lambda}{2} w_{4,j} + \mu_2 w_{2,j} + \frac{\lambda}{2} w_{2,j} \\ \vdots \\ \frac{\lambda}{2} w_{m,j} + \mu_2 w_{m-1,j} + \frac{\lambda}{2} w_{m-2,j} \\ \frac{\lambda}{2} w_{m+1,j} + \mu_2 w_{m,j} + \frac{\lambda}{2} w_{m-1,j} + \frac{\lambda}{2} w_{m+1,j+1} \end{bmatrix}$$

METODUN ÖZETİ

- $j=1, \dots, n$ için

$$F(1,1) = (\lambda / 2)w_{1,j} + \mu_2 w_{2,j} + (\lambda / 2)w_{3,j} + (\lambda / 2)w_{1,j+1}$$

$$i = 2, \dots, m-2 \text{ için } F(i,1) = (\lambda / 2)w_{i,j} + \mu_2 w_{i+1,j} + (\lambda / 2)w_{i+2,j}$$

$$F(m-1,1) = (\lambda / 2)w_{m-1,j} + \mu_2 w_{m,j} + (\lambda / 2)w_{m+1,j} + (\lambda / 2)w_{m+1,j+1}$$

METODUN ÖZETİ

- Her bir iterasyon sonunda hesaplanan bilinmeyenler vektörü ise $j=1, \dots, n$ için

$$\begin{bmatrix} w_{2,j+1} \\ w_{3,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j+1} \\ w_{m,j+1} \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

CRANK NICOLSON METODU

ALGORİTMASI

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, 0 < x < l, 0 < t < T$$

parabolik kısmi diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümünü

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, 0 < t < T$$

sınır koşulları ve

$$u(x,0) = f(x), 0 < x < l$$

başlangıç koşulu ile birlikte bulalım.

GİRDİ: l sınırı; T maksimum zaman; α sabiti;

$m \geq 3, N \geq 1$ tamsayıları

ÇIKTI: Her $i = 1, \dots, m-1$ ve $j = 1, \dots, N$ için

$u(x_i, t_j)$ 'ye $w_{i,j}$ yaklaşımları

CRANK NICOLSON METODU ALGORİTMASI

Step 1 Set $h = l/m$;
 $k = T/N$;
 $\lambda = \alpha^2 k/h^2$;
 $w_m = 0$.

Step 2 For $i = 1, \dots, m - 1$ set $w_i = f(ih)$. (*Initial values.*)
(Steps 3–11 solve a tridiagonal linear system using Algorithm 6.7.)

Step 3 Set $l_1 = 1 + \lambda$;
 $u_1 = -\lambda/(2l_1)$.

Step 4 For $i = 2, \dots, m - 2$ set $l_i = 1 + \lambda + \lambda u_{i-1}/2$;
 $u_i = -\lambda/(2l_i)$.

Step 5 Set $l_{m-1} = 1 + \lambda + \lambda u_{m-2}/2$.

Step 6 For $j = 1, \dots, N$ do Steps 7–11.

Step 7 Set $t = jk$; (*Current t_j .*)

$$z_1 = \left[(1 - \lambda)w_1 + \frac{\lambda}{2}w_2 \right] / l_1.$$

Step 8 For $i = 2, \dots, m - 1$ set

$$z_i = \left[(1 - \lambda)w_i + \frac{\lambda}{2}(w_{i+1} + w_{i-1} + z_{i-1}) \right] / l_i.$$

Step 9 Set $w_{m-1} = z_{m-1}$.

Step 10 For $i = m - 2, \dots, 1$ set $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$.

Step 11 OUTPUT (t); (*Note: $t = t_j$.*)

For $i = 1, \dots, m - 1$ set $x = ih$;

OUTPUT (x, w_i). (*Note: $w_i = w_{ij}$.*)

Step 12 STOP. (*The procedure is complete.*)

CRANK NICOLSON METODU

ALGORİTMASI

Örnek 2.
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, t \geq 0$$

ısı denklemini

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

koşulları ile birlikte $h=0.1$ ve $k=0.01$ için Crank Nicolson metodunu kullanarak çözünüz.