$y'' = f(x, y, y'), a \le x \le b$

$y(a) = \alpha, y(b) = \beta$

Birinci başlangıç değer problemi

$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, y'(a) = t$

İkinci başlangıç değer probleminin elde edilişi

$$\frac{dy''}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(f(x, y, y')) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial t}$$

$$= f_y(x, y, y') \frac{\partial y}{\partial t} + f_{y'}(x, y, y') \frac{\partial y'}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(a) = 0, \frac{\partial y'}{\partial t}(a) = 1$$

$$z = \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow z'' = f_y(x, y, y')z + f_{y'}(x, y, y')z', z(a) = 0, z'(a) = 1$$

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{z(b, t_{k-1})}$$ NEWTON

Şart: $| y(b, t_{k-1}) - \beta | < TOL$

Birinci başlangıç değer probleminin çözümü

$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, y'(a) = t_0$

$t_0 = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$ olsun.

$w_1 = y, w_2 = y'$

$w_1' = w_2, \quad w_1(a) = \alpha$

$w_2' = f(x, w_1, w_2), \quad w_2(a) = t_0$

$$\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ f(x, w_1, w_2) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} w_1(a) \\ w_2(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ t_0 \end{bmatrix}$$

$h = (b - a) / N$

$x_1 = a, w_{1,1} = \alpha, w_{2,1} = t_0$

$x_2 = a + h, w_{1,2} = ?, w_{2,2} = ?$

...

$x_{N+1} = b, w_{1,N+1} = ?, w_{2,N+1} = ?$

$$w_1' = w_2 \qquad w_2' = f(x, w_1, w_2)$$

$$k_1 = h w_{2,i} \qquad m_1 = h f(x_i, w_{1,i}, w_{2,i})$$

$$k_2 = h(w_{2,i} + m_1 / 2) \qquad m_2 = h f(x_i + h/2, w_{1,i} + k_1/2, w_{2,i} + m_1/2)$$

$$k_3 = h(w_{2,i} + m_2 / 2) \qquad m_3 = h f(x_i + h/2, w_{1,i} + k_2/2, w_{2,i} + m_2/2)$$

$$k_4 = h(w_{2,i} + m_3) \qquad m_4 = h f(x_i + h, w_{1,i} + k_3, w_{2,i} + m_3)$$

$$w_{1,i+1} = w_{1,i} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad w_{2,i+1} = w_{2,i} + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$i = 1, 2, ..., N \qquad i = 1, 2, ..., N$$

$i = 1$'den sonra

$|w_{1,N+1} - \beta| < TOL$ bakılır. Ya da iterasyon sayısı < M olup olmadığına bakılır.

Sınır-değer probleminin çözümü w_1 çözümüdür.

İkinci başlangıç değer probleminin çözümü

$$z'' = f_y(x, y, y')z + f_{y'}(x, y, y')z', \quad z(a) = 0, z'(a) = 1$$

$$\left(z = \frac{\partial y}{\partial t} \right)$$

$$v_1 = z, v_2 = z'$$

$$v_1' = v_2, \ v_1(a) = 0$$

$$v_2' = f_y(x, w_1, w_2)v_1 + f_{y'}(x, w_1, w_2)v_2, \quad v_2(a) = 1$$

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ f_y(x, w_1, w_2)v_1 + f_{y'}(x, w_1, w_2)v_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1(a) \\ v_2(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$h = (b - a) / N$$

$$x_1 = a, v_{1,1} = 0, v_{2,1} = 1$$

$$x_2 = a + h, v_{1,2} = ?, v_{2,2} = ?$$

...

$$x_{N+1} = b, v_{1,N+1} = ?, v_{2,N+1} = ?$$

$$v_1' = v_2 \qquad v_2' = f_y(x, w_1, w_2)v_1 + f_{y'}(x, w_1, w_2)v_2$$

$$c_1 = hv_{2,i} \qquad d_1 = h(f_y(x_i, w_{1,i}, w_{2,i})v_{1,i} + f_{y'}(x_i, w_{1,i}, w_{2,i})v_{2,i})$$

$$c_2 = h(v_{2,i} + d_1 / 2) \qquad d_2 = h(f_y(x_i + h/2, w_{1,i}, w_{2,i})(v_{1,i} + c_1 / 2) + f_{y'}(x_i + h/2, w_{1,i}, w_{2,i})(v_{2,i} + d_1 / 2))$$

$$c_3 = h(v_{2,i} + d_2 / 2) \qquad d_3 = h(f_y(x_i + h/2, w_{1,i}, w_{2,i})(v_{1,i} + c_2 / 2) + f_{y'}(x_i + h/2, w_{1,i}, w_{2,i})(v_{2,i} + d_2 / 2))$$

$$c_4 = h(v_{2,i} + d_3) \qquad d_4 = h(f_y(x_i + h, w_{1,i}, w_{2,i})(v_{1,i} + c_3) + f_{y'}(x_i + h, w_{1,i}, w_{2,i})(v_{2,i} + d_3))$$

$$v_{1,i+1} = v_{1,i} + \frac{1}{6}(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4) \qquad v_{2,i+1} = v_{2,i} + \frac{1}{6}(d_1 + 2d_2 + 2d_3 + d_4)$$

$$i = 1, 2, ..., N \qquad i = 1, 2, ..., N$$

$$t_1 = t_0 - \frac{w_{1,N+1} - \beta}{v_{1,N+1}}$$

Birinci başlangıç değer probleminin çözümünden sonraki şart yani

$$| w_{1,N+1} - \beta | < TOL$$

sağlandığında iterasyonlar bitirilir. Sağlanmazsa $t_2 = t_1 - \frac{w_{1,N+1} - \beta}{v_{1,N+1}}$ hesaplanır. İşleme devam edilir.

$$\left(t_k = t_{k-1} - \frac{w_{1,N+1} - \beta}{v_{1,N+1}} \right)$$

f_y ve $f_{y'}$ kısmi türevlerinde karışıklık yaşamamak için

$Örnek: f(x, y, y') = y(y')^2 - e^{4xy}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = (y')^2 - 4xe^{4xy}$

$\frac{\partial f}{\partial y'} = f_{y'} = 2yy'$

KLASİK WHILE

```
k=1; Toplam = 1;
>> while abs(exp(10)-Toplam)>10^(-4)
Toplam = Toplam + 10^(k)/factorial(k);
k=k+1;
end
```

SONSUZ WHILE

```
k=1; Toplam = 1;
>> while 1
Toplam = Toplam + 10^(k)/factorial(k);
if abs(exp(10)-Toplam)<=10^(-4)
break;
end
k=k+1;
end
```