

1) Aşağıdaki ifadeleri kanıtlayınız:

i) $\{a_n\}$ dizisi bir A noktasına yakınsıyor ise $\{|a_n|\}$ dizisi de $|A|$ noktasına yakınsar.

ii) $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ iki Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\{a_n b_n\}$ de bir Cauchy dizisidir.

iii) Eğer $\{a_n\}$ dizisi $+\infty$ 'a ıraksıyor ise, bu durumda $\{\frac{1}{a_n}\}$ dizisi 0 'a yakınsar.

i) $a_n \rightarrow A \Rightarrow \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon |a_n - A| < \varepsilon$ dir.

Ters eşgen eşitsizliğinden $||a_n| - |A|| \leq |a_n - A|$ gerçekleşir ve

$\forall n \geq N_\varepsilon ||a_n| - |A|| < \varepsilon$ olur, yani $|a_n| \rightarrow |A|$.

ii) a_n ve b_n $\mathbb{C}$ d. sınırlıdır, yani $\exists M_a, M_b > 0$ öyle ki

$|a_n| < M_a$ ve $|b_n| < M_b$ dir.

$\varepsilon > 0$ için

a_n $\mathbb{C}$ d. $\exists N_a \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N_a |a_n - a_m| < \varepsilon/2 M_b$

b_n $\mathbb{C}$ d. $\exists N_b \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N_b |b_n - b_m| < \varepsilon/2 M_a$.

$\exists N_\varepsilon = \max\{N_a, N_b\} \forall n, m \geq N_\varepsilon$

$|a_n b_m - a_n b_n| = |a_n b_m - a_n b_n + a_n b_n - a_n b_n|$
 $\leq |a_n| |b_m - b_n| + |b_n| |a_n - a_m| < M_a \cdot \varepsilon/2 M_a + M_b \cdot \varepsilon/2 M_b = \varepsilon$

/ yani $a_n b_n$ Cauchy dizisidir. $(M$ 'ye bağlı olarak değişiyor)

iii) $a_n \rightarrow \infty \Rightarrow M > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \geq N a_n > M$ dir.

Keyfi $\varepsilon > 0$ için yukarıda $M = 1/\varepsilon > 0$ alalım.

$\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N a_n > \underbrace{1/\varepsilon}_{\text{veya } a}$

$|\frac{1}{a_n} - 0| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon$, buradan

$\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ olur.

Good luck !

2) $\{\frac{n^2+1}{n^2+n+2}\}$ dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayınız. (Limit tanımını kullanınız!).

Dizinin 1 gittiğini göstereyim

$$\left| \frac{n^2+1}{n^2+n+2} - 1 \right| = \frac{n+1}{n^2+n+2} < \frac{n+1}{n^2+n} = \frac{1}{n} \text{ old.}$$

Keyfi $\varepsilon > 0$ için $\exists N_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1 \in \mathbb{N}$ öyle ki:

$$\forall n \geq N_\varepsilon \quad \left| \frac{n^2+1}{n^2+n+2} - 1 \right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon, \text{ yani } \frac{n^2+1}{n^2+n+2} \rightarrow 1.$$

3) "Matematiksel Tümevarım" kullanarak, aşağıdaki eşitsizliği kanıtlayınız

$$\forall n \geq 2 \quad 5^n \geq (2n+3)3^{n-1} + 2^n.$$

$$n=2 \quad 5^2 \geq 7 \cdot 3 + 2^2 = 25$$

$$n=k \quad 5^k \geq (2k+3)3^{k-1} + 2^k \text{ doğru olsun.}$$

$$n=k+1 \text{ için}$$

$$5^{k+1} = 5 \cdot 5^k = (3+2) \cdot 5^k \geq (3+2) \cdot [(2k+3) \cdot 3^{k-1} + 2^k]$$

$$= (2k+3) \cdot 3^k + (4k+6) \cdot 3^{k-1} + 2^{k+1} + 3 \cdot 2^k$$

$$\geq (2k+3) \cdot 3^k + 6 \cdot 3^{k-1} + 2^{k+1}$$

$$= [2(k+1)+3] \cdot 3^k + 2^{k+1}.$$

Tümevarımdan verilen eşitsizlik gerçekleşir.

4) f ve g iki tersinir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakileri kanıtlayınız:

i) $f \circ g$ fonksiyonun tersi vardır.

ii) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

$g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C$ iki terslenebilir fonk. olsun. O halde f ve g ikisi birden birebir ve örten fonksiyonlardır.

i) • $f \circ g$ 1-1 ($f \circ g: A \rightarrow C$)
 $f \circ g(a_1) = f \circ g(a_2) \Rightarrow f(g(a_1)) = f(g(a_2)) \Rightarrow g(a_1) = g(a_2)$
 $f(1-1)$

$\Rightarrow a_1 = a_2$. Böylece $f \circ g$ 1-1 dir.

$g(1-1)$

• $f \circ g$ örten : $c \in C$ için f örten old. $\exists b \in B$ $f(b) = c$.

Benzer şekilde, $b \in B$ için g örten old. $\exists a \in A$ $g(a) = b$. Buradan her $c \in C$ için $\exists a \in A$ öyleki $f \circ g(a) = f(g(a)) = f(b) = c$, $f \circ g$ örten olup tersi vardır.

ii) $(f \circ g)^{-1}(c) = a \Rightarrow (f \circ g)(a) = c \Rightarrow f(g(a)) = c \Rightarrow f^{-1}(c) = g(a)$
 $\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(c)) = a$, yani $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ dir.

5) Aşağıdaki şekilde tanımlanan tekrarlı dizinin yakınsaklığını belirleyiniz ve dizinin limit değerini bulunuz.

$a_1 = 0, a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, n \geq 1$.

(İpucu: Monoton Yakınsaklık Teoremini kullanınız.)

• $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_n < 3$ tür.

$n=1$ için $0 \leq a_0 = 0 < 3$

$n=k$ için $0 \leq a_k < 3$ doğru olsun.

$n=k+1$ için $0 \leq a_{k+1} = \sqrt{6 + a_k} < \sqrt{6 + 3} = 3$

olup tümevarımdan iddia gerçekleşir.

• a_n artandır

$a_{n+1}^2 - a_n^2 = -a_n^2 + a_n + 6$

$= (-a_n + 3)(a_n + 2) > 0$

$a_{n+1}^2 > a_n^2 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

yani a_n arttır.

veya

tümevarımla da gösterilebilir.

Böylece a_n dizisi arttır ve üstten sınırlı olduğundan Monoton Yakınsaklık Teorisine göre limiti vardır. $\lim a_n = L$ diyelim.

$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ eşitliğinde limit alırsak

$L = \sqrt{6 + L} \Rightarrow L^2 = 6 + L \Rightarrow L = -2, 3$

yığılma noktası olmaz (Neden!)

O halde $\lim a_n = 3$

Goodluck !

6) Aşağıdaki dizilerin yakınsaklığını inceleyiniz. Eğer yakınsak iseler limit değerlerini bulunuz.

i) $a_n = \frac{\sqrt{2n^2+3}}{5n-2}$

iv) $a_n = \frac{5^n}{n!}$

vii) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

ii) $a_n = \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n$

v) $a_n = \frac{n^n}{n!}$

iii) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

vi) $a_n = \frac{\cos^2(\pi n)}{\pi n}$

i) $\lim a_n = \lim \frac{\sqrt{2+3/n^2}}{(5-2/n)} = \frac{\sqrt{2}}{5}$

ii) $\lim a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n/4}\right)^{n/4} \right]^4 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \right]^4 = e^4$
 $(\frac{n}{4} = k)$

iii) $2^{n-1} + 1 \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n, n > 1$
 $\frac{1}{2^n - 1} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
 $\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2^n - 1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, n > 1$

Sıkıştırma Teo'ndan

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n - 1} = 0$

iv) Oran testinden

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n} = \lim \frac{5}{n+1} = 0 < 1$

old. $\lim a_n = 0$ dir.

v) Oran testinden

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$ old. $\lim a_n = \infty$

vi) $\lim a_n = \lim 1/\pi n = 0$, vii) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$
 old.

$\lim a_n = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$

iv) (Farklı yol)

$n \geq 5, 0 < \frac{5^n}{n!} = \frac{5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = \frac{5^5}{5!} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{5}{n}$
 $\leq \frac{5^5}{5!} \cdot \frac{5}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Sıkıştırma teo'den

$\lim \frac{5^n}{n!} = 0$ dir.

v) (Farklı yol)

$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n} \geq n$

yani

$\frac{n^n}{n!} \geq n$ buradan $\lim \frac{n^n}{n!} = \infty.$

Goodluck !