

2

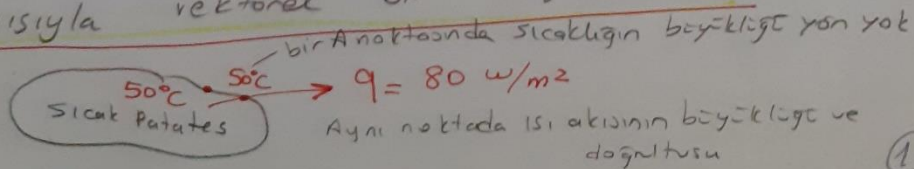
ISI İLETİM DENKLEMİ

Isı transferinin hem büyüklüğü hem de bir yönü vardır. Belirli bir yöndeki ısı iletim hızı - sıcaklığın o yönde uzaklıkla değişim miktarı olan - sıcaklık gradyanı ile orantılıdır. Bir ortamda ısı iletimini genellikle üç boyutlu ve zamana bağlıdır; ortamdaki sıcaklık hem konuma göre hem de zamana göre değişir, yani $T=T(x,y,z,t)$ dir. Bir ortamda ısı iletimini, sıcaklık zamana bağlı olarak değişmiyorsa sürekli (zamandan bağımsız), değişiyorsa zamana bağlı (sürekli) olarak adlandırılır. Bir ortamdaki ısı iletimini, yalnız bir boyutta önemli ve diğer iki ana boyutta ihmal ediliyorsa tek boyutlu, üçüncü boyutta ihmal ediliyorsa iki boyutlu ve bütün boyutlarda önemliyse üç boyutlu olarak adlandırılır.

Giriş

Isı iletimini, ısı enerjinin bir ortamdaki yüksek enerjili parçacıklardan bitişiklerindeki daha az enerjili parçacıklara transferi olarak tanımlanmıştır. Isı iletiminin katılarda olduğu gibi - herhangi bir yığın hareketi içermemek şartıyla - gazlarda ve sıvılarda da meydana gelebileceği ifade edilmiştir.

Birbiriyle yakın ilişkili kavramlar olmalarına rağmen ısı transferi ve sıcaklığın nitelikleri farklıdır. Sıcaklıktan farklı olarak ısı transferi hem bir büyüklüğe hem de yöne sahiptir ve dolayısıyla vektörel bir büyüklüktür. *



(1)

Dolayısıyla herhangi bir noktadaki ısı transferinin, tam olarak tanımlanması için hem yönünün hem de büyüklüğünün belirtilmesi gerekir. Bu nedenle ısı transferinde koordinat sistemi ile yapılabilir.

Isı transferinin koordinat ekseninin pozitif yönünde (+), negatif yönünde (-) değer alması kabul edilen bir görüştür.

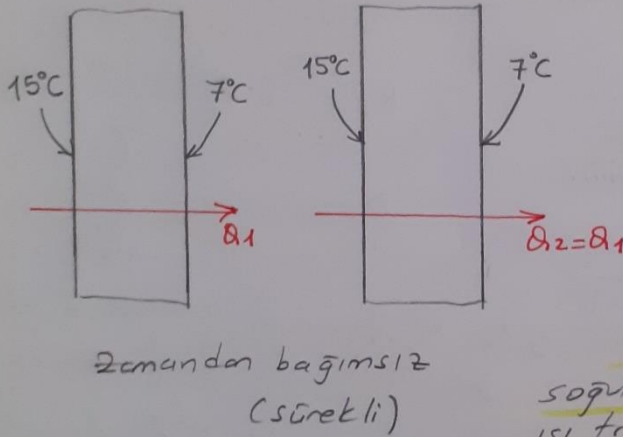
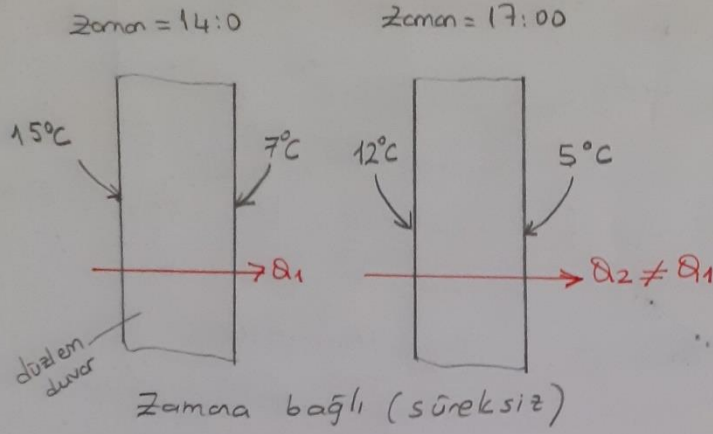
Isı transferinin herhangi bir türü için itici güç sıcaklık farkıdır, sıcaklık farkı ne kadar büyükse ısı transfer hızı da o kadar büyük olur. Bazı ısı transfer problemlerinde ortam boyunca sıcaklık dağılımının (değişiminin) belirlenmesi gerekir.

Bir ortandaki bir noktada sıcaklığın tanımlanması için öncelikle bu noktanın yeri tanımlanmalıdır. Bu işlem ilgili geometriye ve uygun bir referans noktasına (ortijin) bağlı olarak Kartezyen, silindirik ve küresel kord. sistemi gibi uygun bir kord. sistemi seçmek suretiyle gerçekleştirilebilir.

* Bir noktanın konumu Kartezyen koordinat sisteminde (x, y, z) , silindirik kord. sisteminde (r, ϕ, z) ve küresel kord. sisteminde (r, ϕ, θ) olarak tanımlanır.

$T(x, y, z, t)$ gösterimi sıcaklığın x, y ve z konum değişkenleriyle ve zamanla değiştiğini gösterir. $T(x)$ gösterimi sıcaklığın sadece x doğrultusunda değiştiğini ve diğer iki uzay koordinatı ve zamana göre değişimin olmadığını gösterir.

Sürekli ve zamana bağlı ısı transferi



Isı transferi problemleri çoğunlukla zamana bağlı (sürekli) ya da zamandan bağımsız (sürekli) olarak sınıflandırılır.

Sürekli terimi, ortam içindeki herhangi bir noktada zamana değişimin olmadığını belirtir.

Zamana bağlı ifadesi (sürekli rejim)

zamana değişimi ve zamana bağımlılığı ifade eder.

Bir elmanın buzdolabında soğutulması zamana bağlı ısı transferi işlemidir. Çünkü

soğuma süresince elmanın içinde her bir belirli noktada sıcaklık zamana bağlı olarak değişir

Gök boyutlu ısı transferi

Fourier ısı iletim konunu için genel bir bağıntı elde etmek üzere içinde sıcaklık dağılımının üç boyutlu olduğu bir ortam dikkate alınır. Bu yüzeyde herhangi bir P noktasındaki ısı akış vektörü yüzeye dik olmalıdır ve bu atalar sıcaklık yörünge göstermelidir.

Eğer n, P noktasında sabit sıcaklık yüzeyinin normali ise bu noktadaki ısı iletim hızı Fourier konunu yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır; (3)

$$Q_n = -k A \frac{\partial T}{\partial n} \quad (W)$$

Kartezyen koordinatlarda ısı iletim vektör bileşenleri cinsinden;

$$Q_n = Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k} \text{ şeklinde tanımlanabilir.}$$

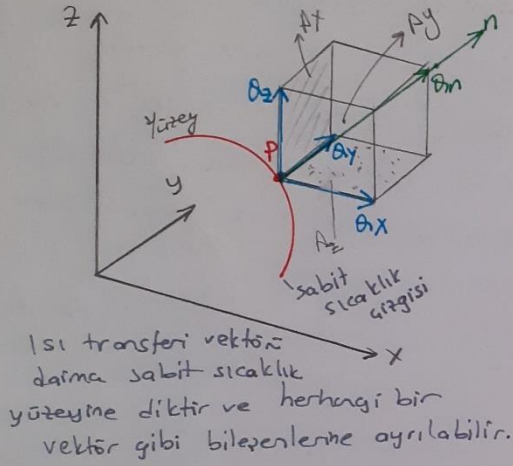
Burada $\vec{i}$, $\vec{j}$ ve $\vec{k}$ birim vektörler, Q_x , Q_y ve Q_z

ise x, y ve z doğrultularındaki ısı transfer hızları olup Fourier Kanunundan;

$$Q_x = -k A_x \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$Q_y = -k A_y \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$Q_z = -k A_z \frac{\partial T}{\partial z}$$



Isı transferi vektörü daima sabit sıcaklık yüzeyine diktir ve herhangi bir vektör gibi bileşenlerine ayrılabilir.

olarak tanımlanabilir.

A_x , A_y ve A_z sırasıyla x, y ve z yönlerine dik ısı iletimi alanlarını gösterir. (malzemenin izotropik yapıda old. kabul edilmiştir)

Isı Üretimi

İçerisinde ısı üretilen bir ortam, elektriksel, nükleer veya kimyasal enerjinin ısı (ısı) enerjisine dönüştürülmesini içerebilir. Isı iletimi gözlemlerinde bu tür dönüşüm işlemleri ısı (ısı) enerji üretimi olarak nitelendirilir.

Isı üretimi hacimsel bir olaydır. Yani bir ortamda hacmin her tarafında olur. Isı üretimi hacim başına tanımlanır birimi $\frac{W}{m^3}$ 'tır. Bir ortamdaki ısı üretimi hem zamanla hem de konumla değişebilir

TEK BOYUTLU ISI İLETİM DENKLEMİ

Genel denklem

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$\dot{q} = \text{Üretim}$ şeklinde yazılabilir. Isı akısı ile karışmaması için.

Tek boyutlu olduğunda; kısmi türev yerine (kartezyen koordinatlarda) tam türev kullanılır. Çünkü yalnız tek değişkene bağlı bu durumda $T = T(x)$ fonksiyonunun tam (adi) ve kısmi türevleri $\partial/\partial t$ olur.

Sürekli rejim $\rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\text{Üretim}}{k} = 0$ (sabit iletkenlik)
 $\partial/\partial t = 0$

Zamana bağlı ısı üretimi yok $\rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$
 $\dot{q} = \text{Üretim} = 0$

Sürekli rejim ısı üretimi yok $\rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$
 $\partial/\partial t = 0$, $\text{Üretim} = 0$

Değişken iletkenlik olması durumunda;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \text{Üretim} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Bir malzemenin k ısı iletim katsayısı, genel olarak T sıcaklığına (ve bu yüzden x 'e) bağlıdır ve dolayısıyla ısı iletkenlik türevin dışına çıkarılmaz.

Uzun bir silindirden tek boyutlu ısı iletimi

Genel denklem;

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{e_{\text{üretim}}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Sürekli rejim $\rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{e_{\text{üretim}}}{k} = 0$
($\partial/\partial t = 0$)

Zamana bağlı
ısı üretimi yok
($e_{\text{üretim}} = 0$) $\rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$

Sürekli rejim
ısı üretimi yok
($\partial/\partial t = 0$, $e_{\text{üretim}} = 0$) $\rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$

Bir kürede tek boyutlu ısı iletim denklemi

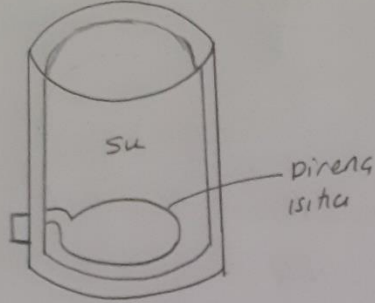
Sürekli rejim $\rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{e_{\text{üretim}}}{k} = 0$
($\partial/\partial t = 0$)

Zamana bağlı
ısı üretimi yok
($e_{\text{üretim}} = 0$) $\rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$

Sürekli rejim
ısı üretimi yok
($\partial/\partial t = 0$, $e_{\text{üretim}} = 0$) $\rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$ ve
 $r \frac{d^2 T}{dr^2} + 2 \frac{dT}{dr} = 0$

Örnek 2-4

Bir ısıtıcı direnkte ısı iletimi



Isı iletim katsayısı $k = 15 \text{ W/m}^\circ\text{C}$

çapı $D = 0,4 \text{ cm}$ ve boyu

$L = 50 \text{ cm}$ olan 2 kW 'lık

bir ısıtıcı direnç teli suya
daldırılarak suyun

kaynatılmasında kullanılmaktadır.

Telin ısıl iletkenliğinin sıcaklıkla
değişimini ifade eden dif denklemini
olde ediniz.

Çözüm Telin uzunluğu çapından 100 kat daha fazla olduğundan, direnç teli çok uzun bir silindir olarak incelenebilir. Ayrıca telde ısı üniform olarak üretilmektedir ve telin dış yüzeyindeki şartlar üniformdur. Bu yüzden teldeki sıcaklığın sadece radyal yönde değişmesini ve dolayısıyla ısı transferinin tek boyutlu olmasını beklemek uygundur. Böylece sıcaklık yalnızca r 'ye bağlı olacağından sürekli işlem süresince $T = T(r)$ olacaktır.

Telde birim hacim başına ısı üretim hızı;

$$\dot{q} = \text{Üretim} = \frac{\text{Üretim}}{V_{\text{tel}}} = \frac{\text{Üretim}}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)L}$$

$$\text{Üretim} = \frac{2000 \text{ W}}{\frac{\pi \cdot (0,004 \text{ m})^2}{4} \cdot 0,5 \text{ m}} = 0,318 \times 10^9 \text{ W/m}^3$$

60

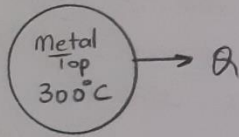
Isıl iletkenliğin sabit olarak verildiği dikkate alınarak teldaki sıcaklık değişimini

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{e_{\text{üretim}}}{k} = 0$$

ifadesi ile yazabiliriz.

Bu denklem silindirik koordinatlarda, sabit ısı iletkenlik durumunda, sürekli, tek boyutlu ısı iletim denklemdir.

Sıcak bir metal topun havada soğutulması

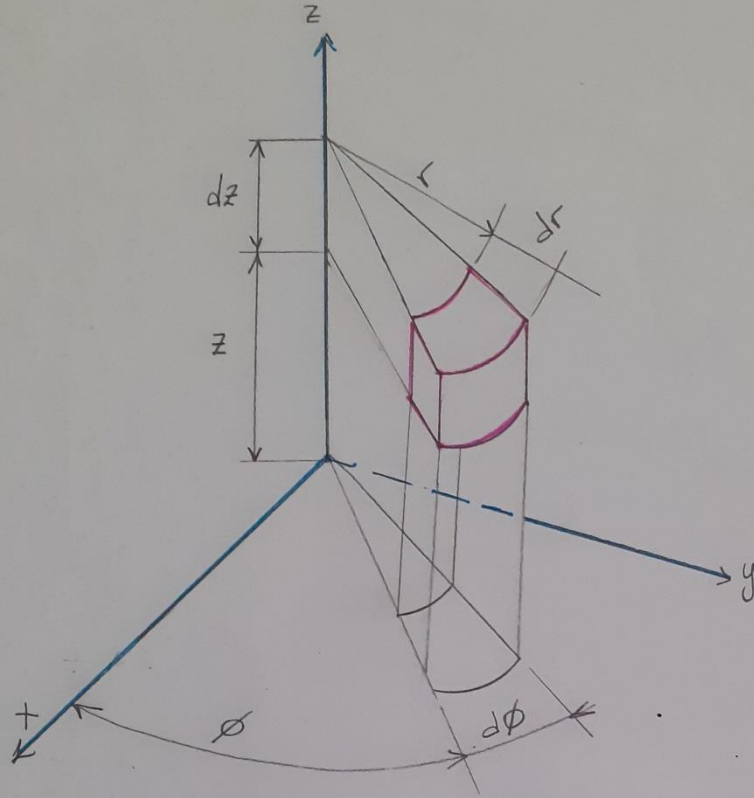


R yarıçaplı bir küresel top 300°C sıcak. bir fırında tamamen ısıtıldıktan sonra fırından dışarıya alınıyor ve $T_\infty = 25^\circ\text{C}$ çevre havasında taşınım ve ısıtım soğumaya bırakılıyor. Top malzemesinin ısı iletkenliğinin bilinmediği. Buton dış sıcaklıkla doğru olarak değiştiği bilinmemektedir. Yüneyi boyunca uniform biçimde soğuduğunu kabul ederek soğuma süresince toptaki sıcaklık değişimini tanımlayan diferansiyel denklemi elde ediniz.

Soğuma süresince topun her bir noktasında sıcaklık zamanla değişecektir. Top içindeki sıcaklık r radyal uzaklık ve t zaman ile değişeceğinden bu bir tek boyutlu zamana bağlı ısı iletim problemidir. Yani $T = T(r, t)$ 'dir. Topun ısı iletkenliği değişken olarak verilmiştir ve içinde ısı üretimi yoktur. Topta sıcaklık değişimini ifade eden dif. denklem ısı üretimi terimi sıfır yapıldı

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 k \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Küresel koordinatlarda değişken. ısı iletkenlik ve ısı üretiminin olmadığı şartlarda, zamana bağlı tek boyutlu ısı iletim denklemdir.

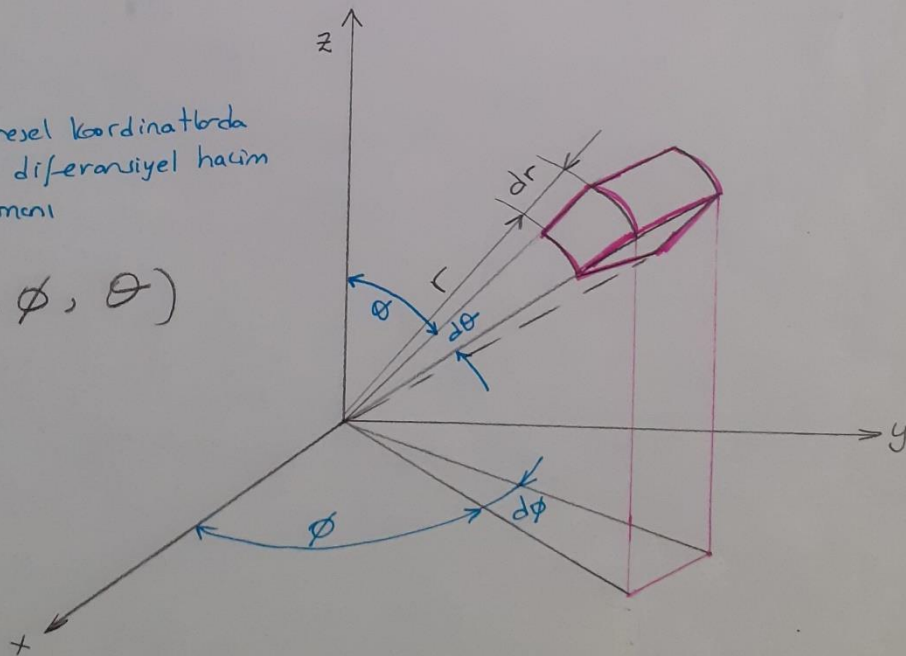


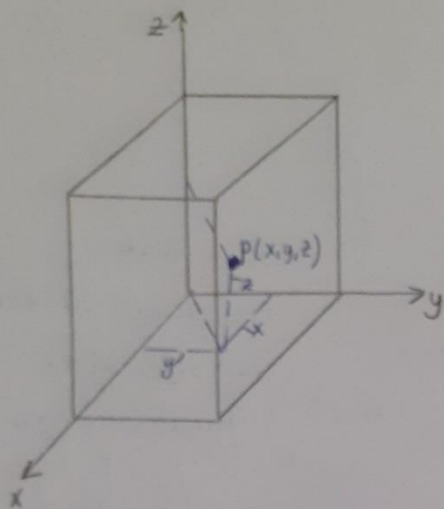
silindirik
koordinat sisteminde
bir diferansiyel
hacim elemanı

$$(r, \phi, z)$$

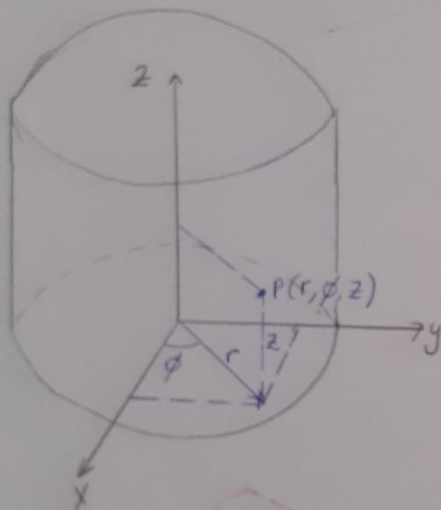
Küresel koordinatlarda
bir diferansiyel hacim
elemanı

$$(r, \phi, \theta)$$



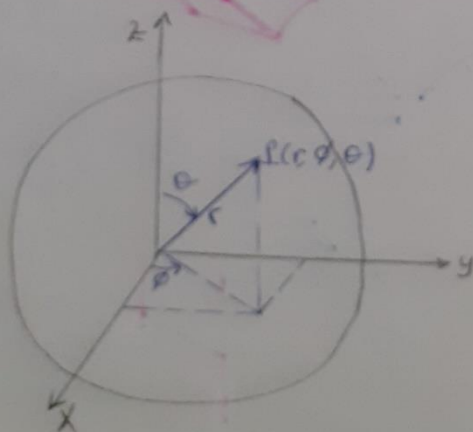
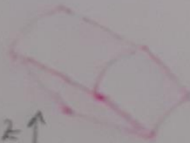


$P(x, y, z)$ Kartezyes koord.



silindirik koord.

$P(r, \phi, z)$



Küresel koordinatlar

$P(r, \phi, \theta)$

3

(Isı) iletim Genel Denklemi

Isıl iletim gözömlemesinde asıl amaç, verilen sınır koşulları için bir ortamda sıcaklık dağılımını belirlemektir. Başka bir deyişle, ortamda sıcaklığın yerel olarak nasıl değiştiği bulunmak istenir. Bu dağılım bilindiğinde ortam içinde veya yüzeyinde herhangi bir noktadaki iletimle ısı akısı Fourier Yasasından hesaplanabilir.

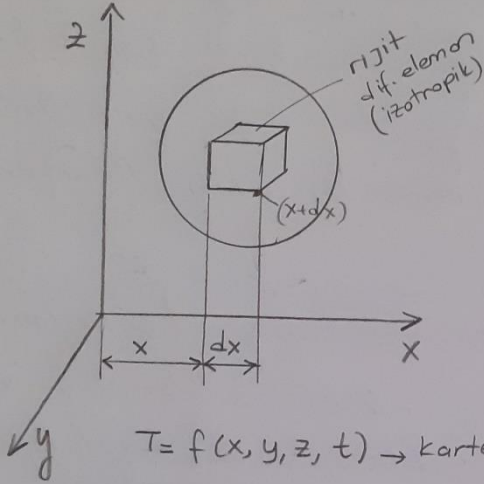
Önce diferansiyel kontrol hacmi tanımlanacak, daha sonra ilgili ısı geiş türleri belirlenecek ve uygun denklemler yazılacaktır. Sonuç, verilen sınır koşulları için, gözümü ortamdaki sıcaklık dağılımını sağlayan bir diferansiyel denklemdir.

İçinde kütleli hareket olmayan ve $T(x, y, z)$ sıcaklık dağılımının Kartezyen eksen takımında gösterildiği homojen bir ortam ele alınsın. Enerji korunumu uygulanarak şekildeki gibi sonsuz küçük bir kontrol hacmi $dx dy dz$ tanımlanır.

$T = f(x, y, z, t)$ uzay koordinatları ve zamanın fonksiyonu olarak sıcaklık dağılımını yazacağız. Dif. bir eleman alıyoruz çünkü bütün bir elemanın her noktasında sıcaklıklar ve özellikler farklı olacaktır.

(7)

Bu nedenle önce dif. elemanlar, temel denklemler uygulanır sonra integre edilerek bütün cisme uygulanması sağlanır. Gerçekle sistemi sabit hacimli kabul etmemiz mümkün değildir.



$$T = f(x, y, z, t) \rightarrow \text{kartezyen}$$

$$T = f(\theta, r, z, t) \rightarrow \text{silindirik}$$

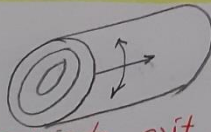
$$T = f(\theta, \phi, r, t) \rightarrow \text{küresel}$$

$$(h - w = \Delta u)$$

Ele alınan sistem üzerinde sıcaklık dağılımını bulacağız.

Cisim, izotropik ve rijit (sıcaklık ile boyutları değişmeye sıcaklık ile boyutları değişirse hacim büyür dışarıya iş yapılır o zaman, enerjinin korunumu denkleminde iş ifadesinde de denkleme katmamız gerekir. Bu nedenle cisim rijit kabul edilir.

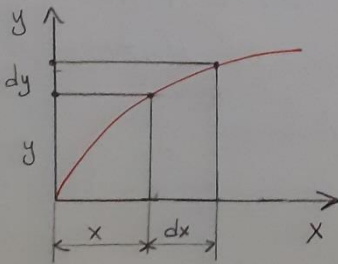
izotropik, (maddenin) cismin her kesitinde iletim ısı transfer katsayıları aynıdır. Yöne bağlı olarak iletim ısı transfer katsayıları değişmiyorsa ortam izotropiktir.



Ağac gövdesinde yöne göre ısı transfer katsayıları değişir ağac gövdesi izotropik olmayan cisimdir.

izotropik = her yönde eşit, doğrultudan bağımsız.

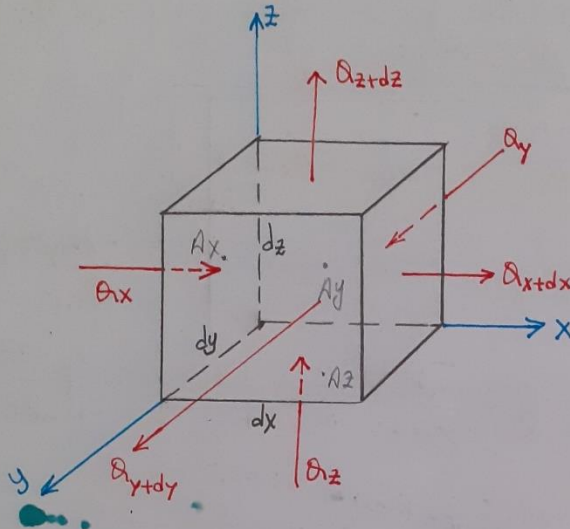
AÇIKLAMA ; Taylor Serisi'ne acılması



Eğer herhangi bir fonksiyonun x mesafesindeki değerini biliyorsa bundan dx kadar uzaklıktaki fonk. değerini bulabiliriz. Taylor serisine açılım yaparak elde edebiliriz. Dolayısıyla bu şekilde giren ısıları Taylor serisine açarak çıkan ısıları elde edebiliriz.

(8)

Diferansiyel elemanı daha büyük şekilde çizelim eksen takımı yine (x, y, z) olsun. Cisim rijit olduğundan ısı ancak iletimle girebilir. Isı iletimi ile madde giriş çıkışları olabilir.



- 1) Enerjinin korunumu
- 2) Fourier ısı iletim denklemi uygulanacak

Fourier ısı iletim
Korunumu'na göre;

$$Q_x = -k \cdot \underbrace{dA_x}_{\substack{\text{ısı transfer} \\ \text{yönüne dik alan}}} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = -k dy dz \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$Q_y = -k \cdot dA_y \frac{\partial T}{\partial y} = -k dx dz \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$Q_z = -k dA_z \frac{\partial T}{\partial z} = -k dy dx \frac{\partial T}{\partial z}$$

Enerjinin korunumu ele alınan sistem için;

$$\left(\text{Birim zamanda giren enerjiler} \right) + \left(\text{Birim zamanda üretilen enerjiler} \right) = \left(\text{Birim zamanda çıkan enerjiler} \right) + \left(\text{Birim zamanda depo edilen enerjiler} \right)$$

Birim zamanda depo edilen enerji aynı zamanda sistem içindeki enerjinin zamana göre değişimini ifade etmektedir.

$$\underbrace{Q_x + Q_y + Q_z}_{\substack{\text{Sisteme} \\ \text{giren enerjiler}}} + \underbrace{\dot{q} dx dy dz}_{\substack{\text{Birim hacimde birim} \\ \text{zamanda üretilen} \\ \text{enerji}}} = \underbrace{Q_{x+dx} + Q_{y+dy} + Q_{z+dz}}_{\substack{\text{sistemden çıkan} \\ \text{enerjiler}}} + \underbrace{\rho dx dy dz c_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{\substack{\text{Birim zamanda} \\ \text{depo edilen enerji}}}$$

Ya sistem içinde kimyasal ya da nükleer bir reaksiyon ile üretilir.

$dx dy dz = \text{dif. elemanın hacmidir.}$

$$\rho dx dy dz = m$$

dif. elemanın
kütlesi

(9)

Taylor serisine açılırsa;

$$\dot{Q}_x + d\dot{Q}_x = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx$$

$$\dot{Q}_y + d\dot{Q}_y = \dot{Q}_y + \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} dy$$

$$\dot{Q}_z + d\dot{Q}_z = \dot{Q}_z + \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} dz$$

Giden enerjiler
yine iletim
yolu ile sistem
dışına çıkacak

Depo edilen enerji kütle ile orantılıdır.

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z + \dot{q} dx dy dz = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx + \dot{Q}_y + \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} dy + \dot{Q}_z + \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} dz + \rho dx dy dz c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\dot{q} dx dy dz = \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} dy + \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} dz + \rho dx dy dz c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Fourier ısı iletim denklemi

$$\dot{Q}_x = -k dy dz \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} dy dz \right)$$

$$\dot{Q}_y = -k dx dz \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} dx dz \right)$$

$$\dot{Q}_z = -k dx dy \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-k \frac{\partial T}{\partial z} dx dy \right)$$

$$\dot{q} dx dy dz = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dz - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$+ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

her iki taraftaki $dx dy dz$ ifadesi ile sadeleşir.

$$\dot{q} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

k 'nin yöne bağlı olarak değişmediği yarı sabit old. kabul edersek;
her iki tarafta ısı iletim katsayısına bölünürse;

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t}} \text{ bulunur.}$$

Kartesiyen koordinatlarda iletim genel denklemi
sınır şartları verilirse sıcaklık dağılımı bu denklemle sağlanır.

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\rho C_p}{k} \Rightarrow \text{tamamen ele alınan ortamın sistemin fiziksel özellikleridir.}$$

$$\frac{k}{\rho C_p} = \alpha \text{ ısı yayılım katsayısıdır.}$$

Zamana bağlı ısı üretimi olmayan durumda;

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\dot{q}=0) \quad (\text{Yayılım denklemi})$$

Isı üretimi, sürekli rejim şartlarında; $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ 'dır.
yok

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \text{haline gelir.} \quad (\text{Laplace denklemi})$$

sürekli rejim, ısı üretimli;

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (\text{Poisson denklemi})$$

Silindirik koordinatlarda iletim genel denklemi

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{Q}_{\text{ürt.}}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T = f(\phi, r, z, t)$$

Küresel koordinatlarda iletim genel denklemi

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)$$

$$+ \dot{Q}_{\text{ürt.}} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad T = f(\theta, \phi, r, t)$$

Karşılaşılan problemlerin bu denklemlere benzetilerek çözümü sağlanır.

Sınır ve Başlangıç Koşulları

Bir ortamda sıcaklık dağılımını belirlemek için ısı denklemini çözmek gerekir. Bu çözüm ortamın sınırlarında var olan fiziksel koşullara ve olay zamanına bağlı ise, ortamın bir başlangıç anındaki haline bağlıdır.

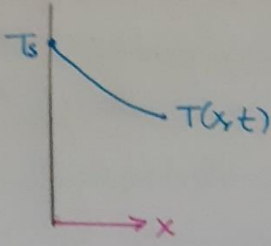
Sınır koşulları matematiksel olarak değiştirile biçimlerde gösterilebilir. Denklem zamanına göre birinci mertebede olduğundan başlangıç koşulu tekler.

Isı geçişinde genellikle karşılaşılan üç gerçik sınır koşulu vardır. Koşullar $x=0$ yüzeyinde bir boyutlu bir sistem için belirtilmektedir. Isı geçişi artı x yönündedir, zamana bağlı olabilen sıcaklık dağılımı $T(x, t)$ ile gösterilmiştir.

Yüzeyde ($x=0$) ısı iletim denklemi için sınır koşulları:

1) Sabit yüzey sıcaklığı

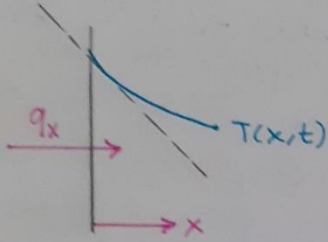
$$T(0,t) = T_s$$



2) Sabit yüzey ısı akısı

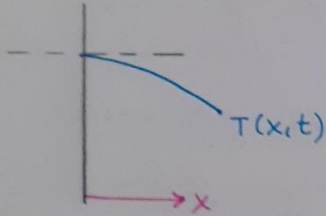
(a) Sonlu ısı akısı

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_x$$



(b) Adyabatik veya yalıtılmış yüzey

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

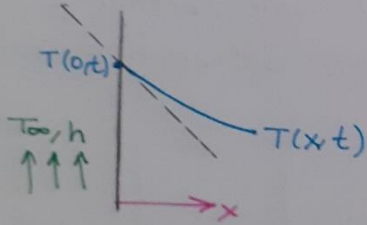


3) Yüzeyde ısıtım olması

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h [T_\infty - T(0,t)]$$

Yüzeyde ısıtım olması

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sigma \epsilon (T_L^4 - T_0^4)$$



Birinci koşul yüzeyin sabit bir T_s sıcaklığında olduğu duruma karşı gelmektedir. Bu koşul genellikle birinci tür sınır koşulu olarak adlandırılır. Ergimekte olan bir katı veya kaynamakta olan bir sıvı ile temasta tutulan bir yüzey için bu koşul oldukça doğrudur. Yüzey faz değişim sıcaklığında kalırken her iki durumda da yüzeyde ısı geçişi vardır.

İkinci koşul yüzeyde sabit veya değişmeyen bir q_s ısı akısının varlığına karşılık gelir. Bu ısı akısı yüzeydeki sıcaklık gradyanına bağlıdır ve Fourier yasası ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$q_x(0) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}$$

İkinci tür sınır koşulu olarak adlandırılan bu durum yüzeye ince film veya yama biçiminde bir elektrik direncinin bağlanması ile gerçekleştirilebilir.

Bu koşulun özel bir durumu $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$ olduğu,

ideal yalıtılmış veya adyabatik yüzeye karşı gelmektedir.

Üçüncü tür sınır koşulu yüzeyde taşınım ile ısıtma (veya soğutma) olmasına karşılık gelir.

Uygulamada karşılaşılan en genel sınır şartları, tanımlı sıcaklık, tanımlı ısı akısı, taşınım ve iletim sınır şartlarıdır.

SINIR ŞARTLAR

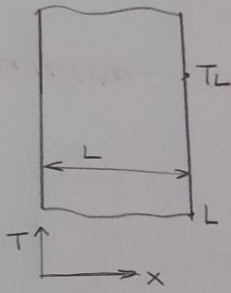
Yukarıda bulunan diferansiyel denklemlerin çözümleri, sınır şartların belirlenmesi ile mümkün olabilmektedir. Genel olarak sınır şartları aşağıdaki gibi gruplanabilir.

SABİT YÜZEY SICAKLIĞI

1. sınır şart $\rightarrow$ Yüzey sıcaklıklarının belirlenmesi

Cismin yüzeyindeki (sınırındaki) sıcaklık dağılımı sabit olabilir ya da zamanın ve koordinatların bir

fonksiyonu olabilir. Dolayısı ile yüzeydeki sıcaklık x, y, z ve t (zaman) olmak üzere dört değişkene bağlı olabilir. Eğer cismin yüzey sıcaklığı üniform ve zamanla değişmiyor ise;



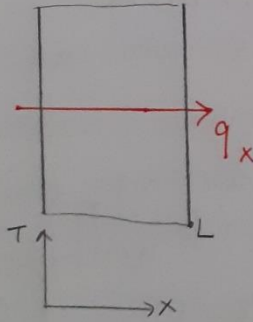
$x=L$ 'de $T=T_L$ yazılabilir.

Burada T_L yüzey sıcaklığı sabittir.

2. sınır şart $\rightarrow$ Yüzeyde ısı akısının belirlenmesi

SABİT YÜZEY ISI AKISI

$$-k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = \frac{Q}{A} \Big|_L = q_x$$

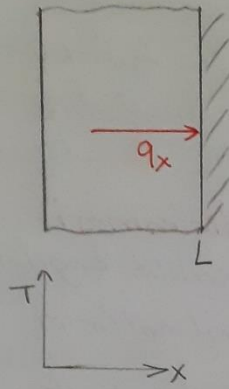


Cismin herhangi bir yüzeyindeki ısı akısının belirli olmasıdır. Örneğin x yönündeki ısı akısı belirli ise yukarıdaki gibi yazılabilir.

ADYABATİK veya YALITILMIŞ YÜZEY

3 - Sınır şart $\rightarrow$ Yüzeyin yalıtılması

Sınırdaki herhangi bir yüzey, ısı kaybına karşı adyabatik olarak yalıtılmış olabilir. Adyabatik olarak yalıtılmış bir yüzeyden ısı geçişi olamayacağından

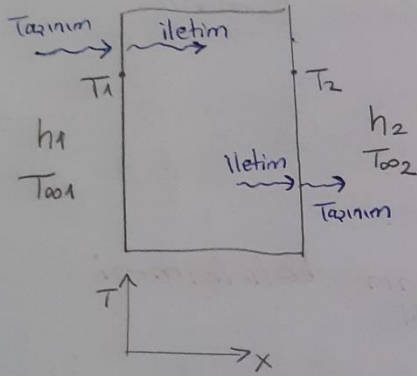


0 noktadaki sıcaklığın birinci türevi sıfıra eşit olmalıdır. Çünkü adiabatik yalıtımlı yüzeyde sıcaklık maksimum ya da minimum olmak zorundadır. O halde yalıtımlı yüzey için aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$x=L' \text{ de } \left. \frac{dT}{dx} \right|_L = 0$$

YÜZEYDE TAŞINIM veya İSİNIM OLMASI

4. Sınır şart $\rightarrow$ Yüzeyde akıtkana taşınım ile ısı geçişi

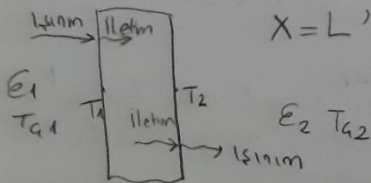


Cismin yüzeyleri, sıcaklığı farklı herhangi bir akıtkan ile temasta olması halinde, cismin yüzeyindeki iletim ile olan ısı geçişi yüzey ile akıtkan arasında Newton'un soğuma kanununa göre taşınım ile olan ısı geçişine eşit olur.

$$x=0' \text{ da } - \left(-k \frac{dT}{dx} \right)_0 = h_1 (T_{\infty 1} - T_1)$$

$$x=L' \text{ de } \left(-k \frac{dT}{dx} \right)_L = h_2 (T_2 - T_{\infty 2})$$

Taşınım olması durumunda



$$\left(-k \frac{dT}{dx} \right)_0 = \varepsilon_1 \sigma (T_{g1}^4 - T_1^4)$$

$$\left(-k \frac{dT}{dx} \right)_L = \varepsilon_2 \sigma (T_2^4 - T_{g2}^4)$$

İsinim olması durumunda

(16)