

ISI TRANSFERİ

Prof. Dr. Galip TEMİR

5. BÖLÜM

(Süreksiz Rejimde Isı Transferi)

1. Parça

5.1	Toplam Kütle Yaklaşımı	226
5.2	Toplam Kütle Yaklaşımının Geçerliliği	229
5.3	Genel Toplam Kütle Yaklaşımı	233
5.4	Uzamsal Etkiler	238
5.5	Taşınımli Düz Levha	240
5.5.1	Tam Çözüm	240
5.5.2	Yaklaşık Çözüm	241
5.5.3	Toplam Enerji Geçiş	241
5.5.4	Ek Açıklamalar	243
5.6	Taşınımli Radyal Sistemler	244
5.6.1	Tam Çözümler	244
5.6.2	Yaklaşık Çözümler	245
5.6.3	Toplam Enerji Geçiş	245
5.6.4	Ek Açıklamalar	246
5.7	Yarı Sonsuz Katı	252
5.8	Çok Boyutlu Etkiler	259
5.9	Sonlu Fark Yöntemi	265
5.9.1	Isı Denkleminin Ayrıklaştırılması: Açık Yaklaşım	265
5.9.2	Isı Denkleminin Ayrıklaştırılması: Örtülü Yaklaşım	273
5.10	Özet	281
	Kaynaklar	281
	Problemler	282

I sı iletimi çözümlemesinde giderek daha karmaşık problemleri ele aldık. Sürekli rejimde, içinde ısı üretimi olmayan bir boyutlu basit durumla başladık ve daha sonra birden fazla boyutun ve üretim etkilerinin neden olduğu karmaşık durumları inceledik. Ancak, şimdiye kadar koşulların zamanla değiştiği problemler ele alınmadı.

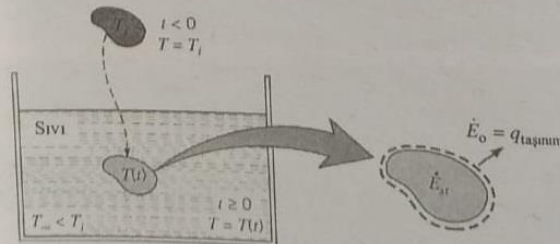
Birçok ısı geçiş problemi zamana bağlıdır. Zamana bağlı problemler genellikle sistemin sınır koşulları değiştiğinde ortaya çıkar. Örneğin, eğer bir sistemin yüzey sıcaklığı değişirse, sistem içindeki her noktanın sıcaklığı da değişmeye başlayacaktır. *Sürekli rejim* sıcaklık dağılımı elde edilinceye kadar değişim devam eder. Bir sıcak metal çubuğun fırından çıkarıldığını ve soğuk hava akımına bırakıldığını düşünelim. Enerji, taşınım ve ışımla yüzeyden çevreye geçer. Enerji geçişi iletimle metalin içinden yüzeyine olur ve çubuk içindeki her noktada sıcaklık sürekli rejime erişilinceye kadar azalır. Bu tür zamana bağlı etkilere birçok endüstriyel ısıtma ve soğutma işleminde rastlanır.

Zamana bağlı problemde katı içindeki sıcaklık dağılımını bulmak için ısı denkleminin uygun yazımını, örneğin Denklem 2.13'ü çözerek başlayabiliriz. Çözümleri elde edilen bazı problemler Bölüm 5.4-5.8'de tartışılmıştır. Bununla birlikte, katı içindeki sıcaklık gradyanının küçük olması durumunda, *toplam kütle yaklaşımı* adı verilen bir yaklaşım kullanılabilir.

5.1

Toplam Kütle Yaklaşımı

Basit, genel ve zamana bağlı bir problem bir katının bulunduğu ısıl çevrenin bir anda değişmesidir. Sıcak metal bir parçanın başlangıçta T_i sabit sıcaklığında olduğunu ve parçaya, düşük sıcaklıktaki ($T_\infty < T_i$) bir akışkan içine batırılarak, su verildiğini düşünün (Şekil 5.1). Eğer su vermenin $t = 0$ anında başladığı varsayılırsa katının sıcaklığı zamanla T_∞ sıcaklığına erişene kadar azalacaktır. Bu azalma katı-akışkan yüzeyindeki ısı taşınımından kaynaklanır. Gerçekte toplam kütle yaklaşımı, katı içindeki sıcaklığın zamana bağlı süreçte belli bir anda *her noktada sabit* olduğu kabulüdür. Bu yaklaşım, katı içersindeki sıcaklık gradyanlarını göz ardı eder.



ŞEKİL 5.1
Bir metal parçanın soğuması.

Fourier yasası incelenirse sıcaklık gradyanının olmaması sonsuz ısı iletkenlik anlamına gelir. Bu gerçekte olanaksızdır. Bununla birlikte, bu durumun tam olarak hiçbir zaman sağlanamamasına karşın eğer katı içindeki iletim direnci, katı ve çevresi arasındaki taşınım direncine oranla küçükse iyi bir sonuç sağlanır.

Katı içindeki sıcaklık gradyanlarını gözardı edersek, artık problemi ısı denkleminin çerçevesi içinde ele alamayız. Bunun yerine, sıcaklığın zamanla değişimi, katı üzerinde toplam enerji dengesi yazılarak bulunur. Bu denge, yüzeyden olan ısı geçişini iç enerji değişimi ile ilişkilendirmelidir. Şekil 5.1'deki kontrol hacmine Denklem 1.11a'yı uygularsak bu ilişki,

$$-\dot{E}_o = \dot{E}_{st} \quad (5.1)$$

biçimini alır. Başka bir deyişle,

$$-hA_s(T - T_\infty) = \rho Vc \frac{dT}{dt} \quad (5.2)$$

olur. Değişken dönüşümü yaparak,

$$\theta \equiv T - T_\infty \quad (5.3)$$

ve $(d\theta/dt) = (dT/dt)$ olduğunu hatırlayarak,

$$\frac{\rho Vc}{hA_s} \frac{d\theta}{dt} = -\theta$$

bulunur. Değişkenlere ayırarak ve başlangıç koşulu olan $t = 0$ 'da $T(0) = T_i$ bilgisini kullanıp, entegre ederek,

$$\frac{\rho Vc}{hA_s} \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = - \int_0^t dt$$

elde edilir, burada

$$\theta_i \equiv T_i - T_\infty \quad (5.4)$$

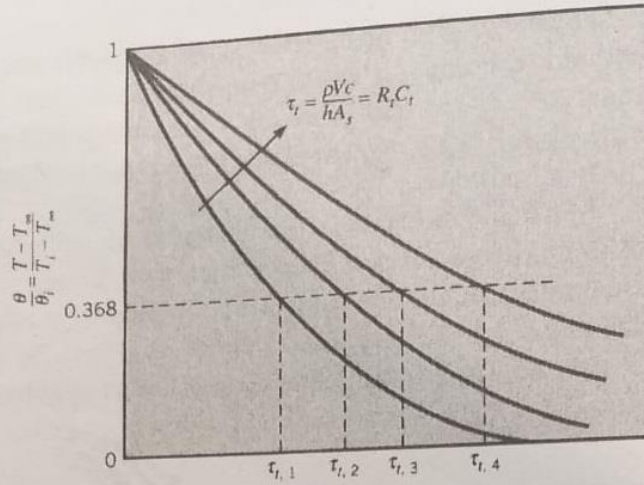
olmaktadır. İntegral alınırsa,

$$-\frac{\rho Vc}{hA_s} \ln \frac{\theta_i}{\theta} = t \quad (5.5)$$

veya

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp \left[- \left(\frac{hA_s}{\rho Vc} \right) t \right] \quad (5.6)$$

bulunur. Denklem 5.5, katının bir T sıcaklığına erişmesi için gerekli zamanı bulmak, veya Denklem 5.6 bir t süresinde katının erişeceği sıcaklığı hesaplamak için kullanılabilir.



ŞEKİL 5.2 Değişik ısı zaman sabitleri τ_i değerleri için toplam kütlelerin zamana bağlı sıcaklık davranışları.

Yukarıdaki sonuçlar t sonsuza giderken katı ve akışkan sıcaklıkları arasındaki farkın üstel olarak sıfıra yaklaştığını göstermektedir. Bu durum Şekil 5.2'de gösterilmiştir. Denklem 5.6'dan $(\rho Vc/hA_s)$ değerinin *ısı zaman sabiti* olarak tamamlanabileceği sonucu da çıkar. Bu zaman sabiti

$$\tau_i = \left(\frac{1}{hA_s} \right) (\rho Vc) = R_i C_i \quad (5.7)$$

şeklinde yazılabilir, burada R_i ısı taşınım direnci ve C_i katının *toplam kütle ısı kapasitesidir*. R_i veya C_i 'deki herhangi bir artış katının ısıl çevresindeki değişimlere daha geç cevap vermesine neden olacaktır ve ısıl dengeye ($\theta = 0$) erişmek için gerekli süreyi artıracaktır. Bu durum, bir RC elektrik devresinde, kapasitansın bir direnç üzerinden boşalması sırasında gözlenen gerilim düşümüne benzerdir.

Bir t süresine kadar geçen toplam enerjiyi (Q) bulmak için,

$$Q = \int_0^t q dt = hA_s \int_0^t \theta dt$$

yazılabilir. Denklem 5.6'da θ yerine konup, entegrasyon yapılırsa

$$Q = (\rho Vc) \theta_i \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \right] \quad (5.8a)$$

bulunur. Q değeri doğal olarak katının iç enerji değişimiyle bağlantılıdır ve Denklem 1.11.b'den

$$-Q = \Delta E_{st} \quad (5.8b)$$

yazılabilir. Su verme için Q artıdır ve katının enerjisi azalır. Denklem 5.5, 5.6 ve 5.8a katının ısıtıldığı durumlarda da uygulanabilir ($\theta < 0$), bu durumda Q eksidir ve katının iç enerjisi artar.

5.2 Toplam Kütleye Yaklaşımının Geçerliliği

Elde edilen sonuçlardan toplam kütle yaklaşımının güçlü yanı kolayca görülmektedir. Zamana bağlı problemleri çözmek için kullanılabilecek en uygun ve basit yöntemdir. Aşağıda bu yöntemin hangi koşullarda kabul edilebilecek doğrulukla kullanılabileceği belirlenecektir.

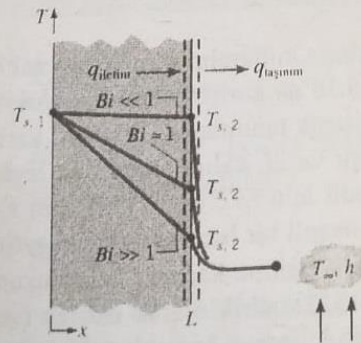
Uygun bir kıstas geliştirmek için düz levhanın A alanından geçen iletimi göz önüne alın (Şekil 5.3). Sürekli rejim varsayımına karşın bu kıstas kolayca geçici bir yüzey $T_{s,1}$ sıcaklığında tutulmakta, diğer yüzeyde ise $T_\infty < T_{s,1}$ sıcaklığında bir akış olmaktadır. Bu yüzdeki sıcaklık $T_{s,2}$, ortalama bir değer $T_\infty < T_{s,2} < T_{s,1}$ olacaktır. Sürekli rejimde yüzey enerji dengesi, Denklem 1.12,

$$\frac{kA}{L}(T_{s,1} - T_{s,2}) = hA(T_{s,2} - T_\infty)$$

bağıntısına indirgenir. Burada k , katının ısı iletim katsayısıdır. Yeniden düzenleyerek,

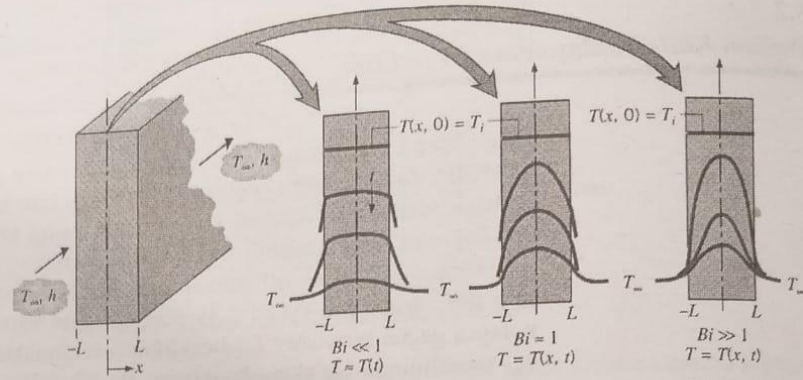
$$\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{T_{s,2} - T_\infty} = \frac{(L/kA)}{(1/hA)} = \frac{R_{\text{iletim}}}{R_{\text{taşınım}}} = \frac{hL}{k} \equiv Bi \quad (5.9)$$

bulunur. Eşitlik 5.9'da gözüken (hL/k) boyutsuz bir parametredir. Biot sayısı olarak adlandırılır ve iletim problemlerinde yüzey taşınım etkileri ile ilgili temel bir işlev görür. Denklem 5.9'a göre ve Şekil 5.3'de gösterildiği gibi, Biot sayısı yüzey ve akışkan arasındaki sıcaklık farkına göre katı içindeki sıcaklık düşüşünün bir ölçüsünü verir. Özellikle $Bi \ll 1$ olduğu duruma dikkat edin. Sonuçlar, bu durumda, zaman içinde, herhangi bir anda katı içindeki sıcaklık dağılımını sabit kabul etmenin uygun olduğunu göstermektedir. Bu sonuç, Biot sayısının ısı dirençlerinin oranı olarak açıklanmasına da uymaktadır, Denklem 5.9. $Bi \ll 1$ ise katı içindeki iletim direnci akışkan sınır tabakası içindeki taşınım direncinden çok daha küçüktür. Böylece sabit sıcaklık varsayımı doğrudur.



ŞEKİL 5.3

Biot sayısının, yüzeyinden taşınım olan düz levha içindeki sürekli-rejim sıcaklık dağılımına etkisi.



ŞEKİL 5.4 Değişik Biot sayıları için simetrik olarak taşınım ile soğutulan düz bir levha için zamana bağlı sıcaklık değişimi.

Biot sayısını zamana bağlı problemlerdeki önemi nedeniyle tanımladık. Başlangıçta T_i sabit sıcaklığında bulunan Şekil 5.4'deki düz levha ele alınsın. Levha $T_\infty < T_i$ sıcaklığındaki akışkan içine daldırılıp, taşınım ile soğutulmaktadır. Problem, x 'e göre bir boyutlu olarak ele alınabilir, yer ve zamana göre sıcaklık dağılımı bulunabilir, $T(x, t)$. Bu dağılım Biot sayısının fonksiyonudur ve üç farklı durum Şekil 5.4'de gösterilmiştir. $Bi \ll 1$ için katı içinde sıcaklık gradyanı küçüktür ve $T(x, t) \approx T(t)$. Hemen hemen tüm sıcaklık farkı katı ve akışkan arasındadır. Katı sıcaklığı T_∞ 'a azalırken düzgün dağılımlıdır. Buna karşın, Biot sayısının orta ve büyük değerleri için katı içindeki sıcaklık gradyanları önemlidir. Bu nedenle, $T = T(x, t)$ 'dir. Dikkat edilirse $Bi \gg 1$ için katı içindeki sıcaklık farkı yüzey ve akışkan arasındakinden çok fazladır.

Tartışmayı toplam kütle yaklaşımının önemini vurgulayarak kapatalım. Yöntemin basitliği zamana bağlı problemleri çözmek için tercih edilen bir yöntem olmasını sağlar. Bu tür problemlerle karşılaşıldığında yapılması gereken ilk iş Biot sayısının hesaplanmasıdır. Aşağıdaki koşul sağlanırsa,

$$Bi = \frac{hL_c}{k} < 0.1 \quad (5.10)$$

toplam kütle yaklaşımının kullanılmasından kaynaklanan hata küçüktür. Kolaylık için Denklem 5.10'da *karakteristik uzunluk*, $L_c = V/A_s$, katı hacminin yüzey alanına oranı olarak tanımlanır. Böylece karmaşık şekilli katılar için L_c 'nin hesabı kolaylaşır ve $2L$ kalınlığında düz levha için yarı kalınlık L 'ye (Şekil 5.4), uzun silindir için $r_0/2$ 'ye ve küre için $r_0/3$ 'e indirgenir. Bununla sınırlı uzamsal sıcaklık farkına karşılık gelen uzunluk ölçeği ile bağlantılı olarak, simetrik olarak ısıtılan (veya soğutulan) $2L$ kalınlığındaki düz levha için L_c , yarım kalınlık L 'ye eşit alınmalıdır. Ancak, uzun

bir silindir veya küre için L_c , $r_0/2$ veya $r_0/3$ yerine yarı çap r_0 'a eşit alınmalıdır.

Sonuç olarak, $L_c = V/A_s$ ile Denklem 5.6'nın üssünün

$$\frac{hA_s t}{\rho V c} = \frac{ht}{\rho c L_c} = \frac{hL_c}{k} \frac{k}{\rho c} \frac{t}{L_c^2}$$

veya

$$\frac{hA_s t}{\rho V c} = Bi \cdot Fo \quad (5.11)$$

biçiminde yazılabileceği vurgulanmalıdır. Burada,

$$Fo \equiv \frac{\alpha t}{L_c^2} \quad (5.12)$$

Fourier sayısı olarak adlandırılır. Biot sayısı ile birlikte zamana bağlı problemleri belirleyen bir *boyutsuz zamandır*. Denklem 5.11, Denklem 5.6'da yerine konursa

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-Bi \cdot Fo) \quad (5.13)$$

elde edilir.

ÖRNEK 5.1

Bir küre gibi düşünülebilecek termo-eleman bağlantısı, bir gaz akışı içerisinde sıcaklık ölçmek için kullanılmaktadır. Bağlantı yüzeyi ile gaz arasındaki ısı taşınım katsayısının $h = 400 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ olduğu bilinmektedir ve bağlantının ısıl özellikleri $k = 20 \text{ W/m} \cdot \text{K}$, $c = 400 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ve $\rho = 8500 \text{ kg/m}^3$ 'dir. Termo-elemanının 1 s zaman sabitine sahip olabilmesi için gerekli bağlantı çapını bulun. Eğer bağlantı 25°C sıcaklıktaysa ve 200°C sıcaklıktaki gaz akışının içine yerleştirilmişse, bağlantının 199°C 'ye erişmesi ne kadar zaman alır?

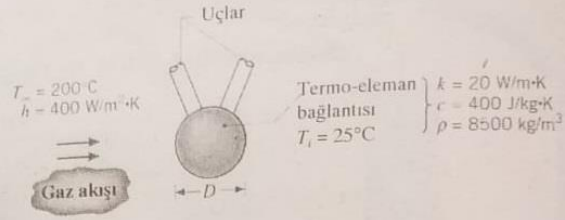
ÇÖZÜM

Bilinen: Gaz akışkan sıcaklığını ölçmek için kullanılan termo-eleman bağlantının ısıl özellikleri.

İstenen:

1. 1 s zaman sabiti için gerekli bağlantı çapı.
2. 200°C gaz akımı içinde 199°C sıcaklığa erişmek için gerekli süre.

Şekil:



Kabuller:

1. Her hangi bir anda bağlantı sıcaklığı her noktada aynıdır.
2. Çevre ile olan ısınlıma ısı alışverişi göz ardı edilebilir.
3. Teller üzerinden olan iletim kayıpları göz ardı edilebilir.
4. Özellikler sabit kalmaktadır.

Çözümleme:

1. Bağlantı çapı bilinmediğinden, çözüme toplam kütle yaklaşımı için kıstası (Denklem 5.10) sınavarak başlamak mümkün değildir. Bununla birlikte, çapı bulmak için bu yöntemi kullanmak ve daha sonra kıstası sınavmak düşünülebilir. Denklem 5.7'den ve küre için $A_s = \pi D^2$ ve $V = \pi D^3/6$ bağıntılarından

$$\tau_i = \frac{1}{h\pi D^2} \times \frac{\rho\pi D^3}{6} c$$

bulunur. Yeniden düzenleyerek ve sayısal değerleri yerleştirerek,

$$D = \frac{6h\tau_i}{\rho c} = \frac{6 \times 400 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times 1 \text{ s}}{8500 \text{ kg/m}^3 \times 400 \text{ J/kg} \cdot \text{K}} = 7.06 \times 10^{-4} \text{ m}$$

elde edilir. $L_c = r_o/3$ ile Denklem 5.10'dan

$$Bi = \frac{h(r_o/3)}{k} = \frac{400 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times 3.53 \times 10^{-4} \text{ m}}{3 \times 20 \text{ W/m} \cdot \text{K}} = 2.35 \times 10^{-4}$$

- bulunur. Böylece Denklem 5.10 sağlanır, ($L_c = r_o/3$ veya $L_c = r_o$ için) ve toplam kütle yaklaşımı büyük bir hassaslıkla kullanılabilir.
2. Bağlantının 199°C'ye erişmesi için gerekli süre Denklem 5.5'den

$$t = \frac{\rho(\pi D^3/6)c}{h(\pi D^2)} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty} = \frac{\rho D c}{6h} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}$$

$$t = \frac{8500 \text{ kg/m}^3 \times 7.06 \times 10^{-4} \text{ m} \times 400 \text{ J/kg} \cdot \text{K}}{6 \times 400 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}} \ln \frac{25 - 200}{199 - 200}$$

$$t = 5.2 \text{ s} \approx 5\tau_i$$

olarak bulunur.

Yorum: Bağlantı ve çevresi arasındaki ısınım ve teller üzerinden iletimle olan ısı geçişi bağlantının cevap süresini etkileyecek ve T_∞ 'dan farklı bir denge sıcaklığı verecektir.

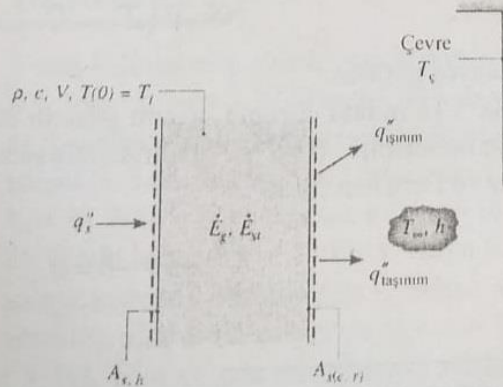
5.3

Genel Toplam Kütle Yaklaşımı

Katı içindeki zamana bağlı ısı iletimi genellikle çevre akışkandan veya akışkana taşınım ile olan ısı geçişinden kaynaklanmasına karşın başka olgular katı içindeki zamana bağlı sıcaklık değişimini etkileyebilir. Örneğin bir katı geniş çevresinden bir gaz veya vakumla ayrılmış olabilir. Eğer katının ve çevresinin sıcaklıkları farklıysa ısınım ile ısı geçişi katının iç ısı enerjisinin ve bu nedenle sıcaklığının değişmesine neden olur. Sıcaklık değişimleri yüzeyin bir bölümünden veya tümünden ısı akısı yoluyla ve/veya katı içinde ısı enerji üretimi ile oluşturulabilir. Örnek olarak ısı enerji elektrik akımının katının içinden geçmesi ile üretilebilirken, yüzey ısıtması yüzeye film veya levha elektrik ısıtıcısı yerleştirilerek uygulanabilir.

Şekil 5.5, taşınım, ısınım, yüzeye uygulanan ısı akısı ve iç enerji üretiminin katı içindeki ısı koşulları birarada etkilediği durumu göstermektedir. Başlangıçta ($t = 0$), katının sıcaklığının (T_i) akışkaninkinden (T_∞) ve çevresinden (T_c) farklı olduğu, yüzeysel ve hacimsel ısıtmanın (q_s'' ve $\dot{E}_g$) birlikte uygulandığı kabul edilsin. Verilen ısı akısının q_s'' ve taşınım-ısınım ısı geçişinin yüzeyin ayrı bölümlerinden (sırasıyla $A_{s(h)}$ ve $A_{s(c,r)}$) olduğu varsayılmıştır. Ayrıca, taşınım ve ısınımın aynı yüzeyde gerçekleştiği varsayılmakla birlikte yüzeyler farklı olabilir ($A_{s,c} \neq A_{s,r}$). Her hangi bir t anında enerji dengesi uygulanarak, Denklem 1.11a'dan

$$q_s'' A_{s,h} + \dot{E}_g - (q_{\text{taşınım}}'' + q_{\text{ısınım}}'') A_{s(c,r)} = \rho V c \frac{dT}{dt} \quad (5.14)$$



ŞEKİL 5.5 Genel toplam kütle yaklaşımı için kontrol yüzeyi.

bulunur veya Denklem 1.3a ve 1.7'den

$$q_s'' A_{s,h} + \dot{E}_g - [h(T - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_\phi^4)] A_{s(c,r)} = \rho V c \frac{dT}{dt} \quad (5.15)$$

bulunur. Ancak, Denklem 5.15 tam çözümü¹ entegrasyonla elde edilemeyen, birinci mertebeden, homojen ve lineer olmayan adi bir diferansiyel denklemdir. Bununla beraber, tam çözüm denklemin bazı basitleştirilmiş biçimleri için bulunabilir. Örneğin eğer yüzeyde ısı akısı uygulanmıyorsa, ısı üretimi veya taşınım yoksa veya ışıınma göre küçükse, Denklem 5.15

$$\rho V c \frac{dT}{dt} = -\varepsilon A_{s,r} \sigma (T^4 - T_\phi^4) \quad (5.16)$$

biçiminde sadeleşir.

Değişkenleri ayırıp, başlangıç anından herhangi bir t anına kadar integre ederek,

$$\frac{\varepsilon A_{s,r} \sigma}{\rho V c} \int_0^t dt = \int_{T_i}^T \frac{dT}{T_\phi^4 - T^4} \quad (5.17)$$

bulunur. Her iki integrali alarak ve yeniden düzenleyerek, T sıcaklığına erişilmesi için gerekli süre,

$$t = \frac{\rho V c}{4 \varepsilon A_{s,r} \sigma T_\phi^3} \left\{ \ln \left| \frac{T_\phi + T}{T_\phi - T} \right| - \ln \left| \frac{T_\phi + T_i}{T_\phi - T_i} \right| + 2 \left[\tan^{-1} \left(\frac{T}{T_\phi} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{T_i}{T_\phi} \right) \right] \right\} \quad (5.18)$$

olarak yazılır. Bu denklem t , T_i ve T_ϕ cinsinden açık olarak T 'yi bulmak için veya limit çözümü, ($T_\phi = 0$, derin uzaya ışıınım) elde etmek için elverişli değildir. Denklem 5.17'ye dönerek, $T_\phi = 0$ için,

$$t = \frac{\rho V c}{3 \varepsilon A_{s,r} \sigma} \left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_i^3} \right) \quad (5.19)$$

olduğu kolayca görülür.

Eşitlik 5.15'in tam çözümü, ışıınım gözardı edilebilirse ve h zamandan bağımsızsa bulunabilir. $\theta \equiv T - T_\infty$ indirgenmiş sıcaklık tanımlanırsa, $d\theta/dt = dT/dt$, olur ve Denklem 5.15,

$$\frac{d\theta}{dt} + a\theta - b = 0 \quad (5.20)$$

¹ Sonlu-fark çözümü zaman türevini ayrıklaştırılarak bulunabilir (Bölüm 5.9) ve zaman artırılarak çözüm adım adım ilerletilir.

birinci mertebeden, homojen olmayan fakat lineer bir diferansiyel denkleme dönüşür. Burada $a \equiv (hA_{s,r} / \rho Vc)$, $b \equiv [(q_s'' A_{s,h} + \dot{E}_g) / \rho Vc]$ 'dir. Denklem 5.20, homojen ve özel çözümleri toplayarak çözülebilmeye karşın, bir diğer yaklaşım değişken dönüşümü yaparak denklemi homojen kılmaktır:

$$\theta' \equiv \theta - \frac{b}{a} \quad (5.21)$$

tanımı yapılır ve $d\theta'/dt = d\theta/dt$ olduğu gözönüne alınırsa, Denklem 5.21, Denklem 5.20'de yerine konabilir ve,

$$\frac{d\theta'}{dt} + a\theta' = 0 \quad (5.22)$$

elde edilir. Değişkenlere ayırarak ve 0 dan t 'ye kadar integre ederek (θ'_i den θ' ya)

$$\frac{\theta'}{\theta'_i} = \exp(-at) \quad (5.23)$$

bulunur. θ' ve θ yerine konarak

$$\frac{T - T_\infty - (b/a)}{T_i - T_\infty - (b/a)} = \exp(-at) \quad (5.24)$$

bağıntısı elde edilir.

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-at) + \frac{b/a}{T_i - T_\infty} [1 - \exp(-at)] \quad (5.25)$$

bulunur. Olması gerektiği gibi, Denklem 5.25, $b = 0$ olduğunda (5.6)'ya indirgenir ve $t = 0$ da $T = T_i$ verir. $t \rightarrow \infty$ 'a giderken Denklem 5.25 sürekli rejimde $(T - T_\infty) = b/a$ değerini verir. Bu sonuç Şekil 5.5'de gösterilen kontrol hacmine enerjinin korunumu ilkesini uygulayarak da bulunabilir.

ÖRNEK 5.2

3 mm kalınlığında alüminyum alaşımlı bir levhanın ($k = 177 \text{ W/m} \cdot \text{K}$, $c = 875 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ve $\rho = 2770 \text{ kg/m}^3$) her iki yüzüne, $T_c = 150^\circ\text{C}$ veya üzerinde en az 5 dakika ısıtma işlemi gerektiren epoksi kaplama yapılmıştır. Üretim hattı işlemi iki adımda yapar: (1) Büyük bir fırın içinde $T_{\infty,o} = 175^\circ\text{C}$ 'taki hava ve $h_c = 40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ısı taşınım katsayısı ile ısıtma ve (2) büyük bir odada $T_c = 25^\circ\text{C}$ 'taki hava ve $h_c = 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ısı taşınım katsayısı ile soğutma. İşlemin ısıtma kısmının yürütüldüğü t_e zaman adımı 150°C sıcaklığa erişmek için gerekli t_e süresini 5 dak geçer ($t_e = t_c + 300 \text{ s}$). Kaplamanın yayma katsayısı $\epsilon = 0.8$, fırın ve oda duvarlarının sıcaklıkları sırasıyla 175°C ve 25°C 'dir. Eğer levha 25°C başlangıç sıcaklığında fırına konuyor ve 37°C emniyetli

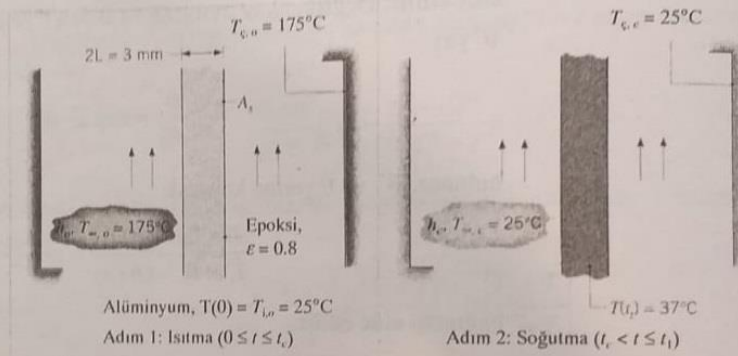
dokunma sıcaklığında odadan çıkartılıyorsa, iki adımlı işlem için toplam süre nedir?

ÇÖZÜM

Bilinenler: Kaplanmış alüminyum levhanın 150°C veya üzerindeki sıcaklıkta en az 5 dakika kalmasını sağlayacak, iki adımlı ısıtma/soğutma işlemi için çalışma koşulları.

İstenen: İki adımlı işlem için gerekli toplam süre t_i .

Şekil:



Kabuller:

1. Her hangi bir anda levha sıcaklığı her noktada aynıdır.
2. Epoksinin ısı direnci göz ardı edilebilir.
3. Özellikler sabit kalmaktadır.

Çözümleme: Toplam kütle yaklaşımının geçerliliği ısıtma ve soğutma işlemleri için Biot sayılarını hesaplayarak belirlenebilir:

$$Bi_h = \frac{h_o L}{k} = \frac{(40 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K})(0.0015 \text{ m})}{177 \text{ W/m} \cdot \text{K}} = 3.4 \times 10^{-4}$$

$$Bi_e = \frac{h_e L}{k} = \frac{(10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K})(0.0015 \text{ m})}{177 \text{ W/m} \cdot \text{K}} = 8.5 \times 10^{-5}$$

Bu sonuç toplam kütle yaklaşımının rahatlıkla uygulanabileceğini göstermektedir.

Levha ve çevresi arasındaki ısıtımın göz önüne alınması gerekip gerekmediğini bulmak için ısıtımın ısı geçiş katsayısı Denklem 1.9'dan bulunur. Verilen değerlerden ısıtma işlemi için h_o ,

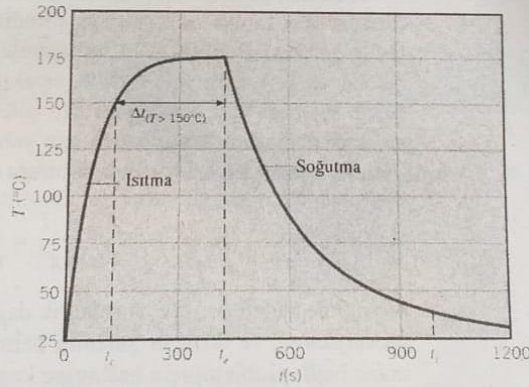
$$\begin{aligned}
 h_{r,o} &= \varepsilon \sigma (T_c + T_{\text{çevre},o}) (T_c^2 + T_{\text{çevre},o}^2) \\
 &= 0.8 \times 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4 (423 + 448) \text{ K} (423^2 + 448^2) \text{ K}^2 \\
 &= 15 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}
 \end{aligned}$$

olmaktadır. Soğutma işlemi için $T_c = 150^\circ\text{C}$ ve $T_\infty = 25^\circ\text{C}$ olarak $h_{r,c} = 5.1 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ bulunur. $h_{r,o}$ ve $h_{r,c}$ değerleri sırasıyla h_o ve h_c ile aynı mertebede oldukları için ısıtım etkisi göz önüne alınmalıdır.

$V = 2LA_s$ ve $A_{s,c} = A_{s,r} = 2A_s$ oldukları göz önüne alınırsa, Denklem 5.15,

$$\int_{T_i}^T dT = T(t) - T_i = -\frac{1}{\rho c L} \int_0^t [h(T - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_\infty^4)] dt$$

şeklinde yazılabilir. Uygun zaman artımı Δt seçerek bu eşitliğin sağ tarafı levha sıcaklığı $t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t$ ve sonrasında bulmak için sayısal olarak çözülebilir. Hesaplamanın her yeni adımında, bir önceki adımdan bulunan T , entegral içinde kullanılır. $\Delta t = 10$ s seçerek ısıtma işlemi için hesaplamalar, $t_e = t_c + 300$ saniyeye kadar sürdürülür. Bu süre levhanın 150°C 'ye ısıtılması ve 5 dakika beklenmesi sürecini kapsamaktadır. Bu noktada soğutma işlemi başlatılır ve $t = t_i$ de levha sıcaklığı 37°C 'a erişene kadar sürdürülür. İntegrasyon dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi kullanılarak yapılmıştır ve çözüm sonuçları aşağıdaki grafikte verilmiştir.



İki adımlı işlem için $t_c = 124$ s ve $t_e = 424$ s ara süreleri ile toplam süre,

$$t_t = 989 \text{ s}$$

olmaktadır.

Yorum:

1. Genelde sayısal integrasyonun hassaslığı Δt azaltılarak artırılır fakat hesaplama süresi artar. Yukarıdaki çözüm $\Delta t = 10$ s yerine $\Delta t = 15$ olarak tekrarlanmış ve hemen hemen aynı sonuçlar elde edilmiştir. Bu

da büyük zaman adımının bu problem için yeterli olduğunu göstermektedir.

2. İki adımlı işlem süresi taşınım katsayılarının artırılması, ve/veya ek ısıtma süresinin kısaltılmasıyla azaltılabilir. Ek ısıtma süresi kısaltılabilir, çünkü soğutma sürecinin bir bölümünde de sıcaklık 150°C 'nin üzerinde kalmaktadır. Eğer taşınım katsayıları $h_o = h_c = 100 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ olursa ve 300 s bir ek ısıtma süresi alınırsa sayısal entegrasyon $t_c = 58 \text{ s}$ ve $t_e = 445 \text{ s}$ verir. Levha sıcaklığının 150°C değerini geçtiği süre $\Delta t_{(T>150^\circ\text{C})} = 306 \text{ s}$ ($58 \text{ s} \leq t \leq 364 \text{ s}$) olur. Eğer ek ısıtma süresi 294 s'ye indirilirse sayısal entegrasyon $t_c = 58 \text{ s}$ ve $t_e = 439 \text{ s}$ ve $\Delta t_{(T>150^\circ\text{C})} = 300 \text{ s}$ sonucunu verir. Böylece, işlem gerekleri sağlanırken toplam süre azaltılmıştır.

5.4

Uzamsal Etkiler

Toplam kütle yaklaşımının kullanılması her zaman uygun olmayabilir ve alternatif yaklaşımlar ele alınmalıdır. Bu durumda daha önce göz ardı edilen, katı içindeki sıcaklık gradyanlarını göz önüne almamız gerekir.

Zamana bağlı iletim problemleri, en genel gösterimiyle, kartezyen koordinatlar için Denklem 2.13 veya silindirik ve küresel koordinatlar için sırasıyla Denklem 2.20 ve 2.23 ile tanımlanır. Bu kısmi denklemlerin çözümü zaman ve üç koordinatla birlikte sıcaklık değişimini verir. Bununla birlikte Şekil 5.4 deki düz levha gibi bir çok problemde sadece bir koordinat içi sıcaklık dağılımını tanımlamak için yeterlidir. Isı üretiminin olmadığı ve ısı iletim katsayısının sabit alındığı durum için, Denklem 2.13

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.26)$$

biçiminde sadeleşir. $T(x, t)$ sıcaklık dağılımı için Denklem 5.26'yı çözerken bir başlangıç ve iki sınır şartının belirlenmesi zorunludur. Şekil 5.4'ün zamana bağlı problemi için başlangıç koşulu,

$$T(x, 0) = T_i \quad (5.27)$$

ve sınır koşulları:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (5.28)$$

ve

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h[T(L, t) - T_\infty] \quad (5.29)$$

olur. Denklem 5.27, $t = 0$ anında sıcaklığın her noktada eşit olduğunu varsaymaktadır. Denklem 5.28 levhanın ortasını simetri eksenini olarak almaktadır ve Denklem 5.29, $t > 0$ için yüzeyde taşınımı tanımlamaktadır. 5.26 dan 5.29'a kadar olan denklemler levha içindeki sıcaklıkların, x ve t 'ye ek olarak fiziksel değişkenlere de bağlı olduğunu göstermektedir. Özellikle

$$T = T(x, t, T_i, T_\infty, L, k, \alpha, h) \quad (5.30)$$

olmaktadır. Tanımlanan problem analitik veya sayısal olarak çözülebilir. Bu yöntemler aşağıda ele alınacaktır, fakat öncelikle temel denklemlerin *boyutsuzlaştırılması* önemlidir. Bu işlem ilgili değişkenleri uygun *guruplar* içinde toplayarak yapılabilir. Bağımlı değişken T 'yi ele alalım. Eğer $\theta \equiv T - T_\infty$ sıcaklık farkı, *olabilecek maksimum sıcaklık farkı* $\theta_i \equiv T_i - T_\infty$ ile bölünürse, bağımlı değişkenin boyutsuz biçimi,

$$\theta^* \equiv \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad (5.31)$$

olarak tanımlanabilir. Buna göre, θ^* , $0 \leq \theta^* \leq 1$ aralığında kalmalıdır. Boyutsuz x koordinatı,

$$x^* \equiv \frac{x}{L} \quad (5.32)$$

biçiminde yazılabilir, burada L levhanın yarı kalınlığıdır. Boyutsuz zaman ise

$$t^* \equiv \frac{\alpha t}{L^2} \equiv Fo \quad (5.33)$$

olabilir, burada t^* boyutsuz *Fourier sayısına* eşdeğerdir.

Denklem 5.31 ile 5.33 arasındaki tanımlar, Denklem 5.26 dan 5.29'a kadar olan denklemlerde yerine konursa, ısı denklemi,

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo} \quad (5.34)$$

biçimini alır. Başlangıç ve sınır koşulları,

$$\theta^*(x^*, 0) = 1 \quad (5.35)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} = 0 \quad (5.36)$$

ve

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=1} = -Bi\theta^*(1, t^*) \quad (5.37)$$

olur. Burada Biot sayısı $Bi = hL/k$ dir. Fonksiyonel bağımlılık boyutsuz olarak, şimdi

$$\theta^* = f(x^*, Fo, Bi) \quad (5.38)$$

biçiminde yazılabilir. Hatırlanırsa benzer bir fonksiyonel bağımlılık, x^* değişkeni olmaksızın, Denklem 5.13'te görüldüğü gibi toplam kütle yaklaşımı için bulunmuştur.

Denklem 5.30 ve 5.38 karşılaştırılırsa problemi boyutsuzlaştırmanın önemi görülür. Denklem 5.38 belirli bir geometri için, zamana bağlı sıcaklık dağılımını x^* , Fo ve Bi sayılarının genel bir fonksiyonu olarak gösterir. Başka bir deyişle, boyutsuz çözüm T_i , T_∞ , L , k , α veya h 'nin belli değerlerine bağlı olmayan genel bir çözümdür. Bu genelleştirme zamana bağlı çözümlerin açıklanmasını ve kullanılmasını kolaylaştırdığı için boyutsuz sayılar aşağıda sıkça kullanılmaktadır.

5.5

Taşınmalı Düz Levha

Zamana bağlı ısı iletim problemlerinin tam, analitik çözümleri birçok basitleştirilmiş levha ve sınır koşulları için bulunmuş ve ayrıntılı olarak kaynaklarda [1-4] verilmiştir. Değişkenlere ayırma yöntemi de (Bölüm 4.2) içinde olmak üzere bir çok matematiksel yöntem bu amaç için kullanılabilir. Boyutsuz sıcaklık için çözüm, Denklem 5.38, genelde sonsuz seri olarak bulunur. Bununla birlikte, Fourier sayısının çok küçük değerleri dışında bu serilerde tek bir terimle yaklaşım yapılabilir ve sonuçlar uygun grafikler şeklinde gösterilebilir.

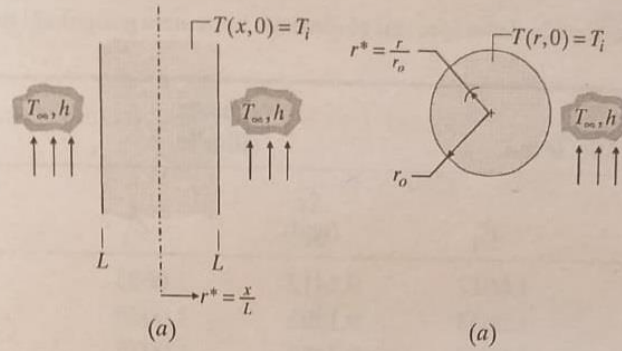
5.5.1 Tam Çözüm

$2L$ kalınlığında bir düz levha göz önüne alınsın, (Şekil 5.6a). Eğer levhanın kalınlığı genişliğine ve boyuna oranla küçükse iletimin sadece x doğrultusunda olduğu kabul edilebilir. Eğer levha başlangıçta sabit bir $T(x, 0) = T_i$ sıcaklığında ise ve birdenbire $T_\infty \neq T_i$ sıcaklığındaki bir akışkana daldırılırsa, oluşan sıcaklıklar, Denklem 5.35 ile 5.37 arasındaki sınır koşullarını kullanarak, Denklem 5.34'ün çözümüyle bulunabilir. $x^* = \pm 1$ 'de yüzeyler için taşıma koşulları eşit olduğundan herhangi bir anda sıcaklık dağılımı orta eksene ($x^* = 0$) göre simetrik olmalıdır. Bu problemin tam çözümü elde edilmiştir ve

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\zeta_n^2 Fo) \cos(\zeta_n x^*) \quad (5.39a)$$

biçimindedir. [2], burada $Fo = \alpha / L^2$ ve katsayı C_n

$$C_n = \frac{4 \sin \zeta_n}{2\zeta_n + \sin(2\zeta_n)} \quad (5.39b)$$



ŞEKİL 5.6 Başlangıçta sabit bir sıcaklıkta olan, daha sonra birdenbire taşınım ortamına getirilen bir-boyutlu sistemler. (a) Düz levha (b) Sonsuz silindir veya küre.

olmaktadır. ζ_n 'nin ayrık değerleri (öz değerleri) aşağıdaki transandental denklemin artı kökleridir.

$$\zeta_n \tan \zeta_n = Bi \quad (5.39c)$$

Bu eşitliğin ilk dört kökü Ek B.3'te verilmiştir.

5.5.2 Yaklaşık Çözüm

$Fo > 0.2$ değerleri için Denklem 5.39a ile verilen sonsuz seri çözümü, yaklaşık olarak serinin ilk terimi ile gösterilebilir. (Problem 5.27). Bu durumda boyutsuz sıcaklık dağılımı

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \cos(\zeta_1 x^*) \quad (5.40a)$$

veya

$$\theta^* = \theta_o^* \cos(\zeta_1 x^*) \quad (5.40b)$$

olur. Burada $\theta_o^* \equiv (T_o - T_\infty)/(T_i - T_\infty)$ orta eksen ($x^* = 0$) sıcaklığını

$$\theta_o^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \quad (5.41)$$

göstermektedir. Denklem 5.40b'nin önemli bir sonucu *levha içinde herhangi bir yerde sıcaklığın zamana göre değişiminin orta eksen sıcaklığı ile aynı olduğudur*. C_1 ve ζ_1 katsayıları sırasıyla Denklem 5.39b ve 5.39c'den bulunur ve Biot sayısına göre Tablo 5.1'de verilmiştir.

5.5.3 Toplam Enerji Geçişi

Zamana bağlı problemlerin çoğunda herhangi bir t anına kadar levhadan olan toplam enerji geçişinin bulunması istenir. Enerji korunumu, Denklem 1.11b, başlangıç ($t = 0$) ve her hangi bir $t > 0$ anı arasındaki zaman aralığı için uygulanabilir.

TABLO 5.1 Zamana bağlı bir-boyutlu iletim için, seri çözümünün bir terimle gösterildiği zaman kullanılan katsayılar

Bi^*	Düz levha		Sonsuz silindir		Küre	
	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.03	0.1732	1.0049	0.2439	1.0075	0.2989	1.0090
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.05	0.2217	1.0082	0.3142	1.0124	0.3852	1.0149
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.07	0.2615	1.0114	0.3708	1.0173	0.4550	1.0209
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.09	0.2956	1.0145	0.4195	1.0222	0.5150	1.0268
0.10	0.3111	1.0160	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.15	0.3779	1.0237	0.5376	1.0365	0.6608	1.0445
0.20	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.25	0.4801	1.0382	0.6856	1.0598	0.8448	1.0737
0.30	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0932	1.0528	1.1164
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.6	0.7051	1.0814	1.0185	1.1346	1.2644	1.1713
0.7	0.7506	1.0919	1.0873	1.1539	1.3525	1.1978
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1725	1.4320	1.2236
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488
1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.0	1.0769	1.1795	1.5995	1.3384	2.0288	1.4793
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.4556	1.7201
5.0	1.3138	1.2402	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8674
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	2.7654	1.8921
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2881	1.5919	2.9857	1.9781
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
∞	1.5707	1.2733	2.4050	1.6018	3.1415	2.0000

* Düz levha için $Bi = hL/k$, sonsuz silindir ve küre için hr_0/k (Bak. Şekil 5.6).

$$E_i - E_o = \Delta E_{st} \quad (5.42)$$

Levhadan geçen ısı Q , E_o 'a eşitlenip, $E_i = 0$ ve $\Delta E_{st} = E(t) - E(0)$ alınarak,

$$Q = -[E(t) - E(0)] \quad (5.43a)$$

veya

$$Q = -\int \rho c [T(r, t) - T_i] dV \quad (5.43b)$$

bulunur. Burada integral levha hacmi üzerine alınmıştır. Bu sonucu, akışkan sıcaklığına göre levhanın başlangıçtaki enerjisi olarak yorumlanabilen,

$$Q_o = \rho c V (T_i - T_\infty) \quad (5.44)$$

değişkenini tanımlayarak boyutsuzlaştırmak uygun olur. Bu tanım aynı zamanda işlem $t = \infty$ 'a kadar devam ettirilseydi bulunacak ısı geçişi olur. Böylece, özellikler sabit alınarak levhadan geçen toplam enerjinin, olabilecek maksimum ısı geçişine oranı bulunabilir. t zaman aralığına göre integral alınırsa,

$$\frac{Q}{Q_o} = \int \frac{-[T(x, t) - T_i] dV}{T_i - T_\infty} \frac{1}{V} = \frac{1}{V} \int (1 - \theta^*) dV \quad (5.45)$$

elde edilir. Düz levha için sıcaklık dağılımının Denklem 5.40b ile verilen yaklaşık çözümü, Denklem 5.45'te verilen integralde yerine konarak

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{\sin \xi_1}{\xi_1} \theta_o^* \quad (5.46)$$

sonucuna ulaşılır. Burada θ_o^* büyüklüğü C_1 ve ξ_1 katsayıları için Tablo 5.1'de verilen değerleri kullanarak Denklem 5.41'den bulunabilir.

5.5.4 Ek Açıklamalar

Matematiksel problem aynı olduğu için elde edilen sonuçlar bir yüzü ($x^* = 0$) yalıtılmış, diğer yüzünde ($x^* = +1$) taşınım olan L kalınlığındaki düz levhaya da uygulanabilir. Bu sonuç $x^* = 0$ 'da ister simetri ister adyabatik sınır bulunsun sınır koşulunun $\partial \theta^* / \partial x^* = 0$ olmasından kaynaklanmaktadır.

Belirtilmesi gereken bir başka nokta, bulunan sonuçların, yüzey sıcaklığı aniden değişen düz bir levhanın zamana bağlı sıcaklık dağılımını bulmak için kullanılabileceğidir. İşlem, ısı taşınım katsayısının sonsuz büyüklükte olmasına eşdeğerdir. Bu durumda, $Bi = \infty$ olur ve T_s , T_∞ 'nin yerini alır.

Son olarak, bir-terim yaklaşımı ile elde edilen grafiklerin [5,6] Ek D'de verildiği vurgulanmalıdır. Verilen diyagramlar $Fo > 0.2$ olduğu zaman bir boyutlu zamana bağlı iletim problemlerini çözmek için yeterlidir. 5.40 ve 5.46 kullanılarak elde edilebilir.

5.6

Taşınımly Radyal Sistemler

Başlangıçta sabit sıcaklıkta bulunan ve çevre taşınım koşulları değişen, r_0 yarıçapındaki sonsuz uzunlukta silindir veya küre için (Şekil 5.6b) Bölüm 5.5'de elde edilen benzer sonuçlar çıkartılabilir. Başka bir deyişle, zamana bağlı radyal sıcaklık dağılımı için sonsuz bir seri olarak tam çözüm bulunabilir ve bir terim yaklaşımı birçok problemde kullanılabilir. Sonsuz silindir, radyal doğrultuda bir boyutlu iletim varsayımının yapılabileceği ideal bir durumdur. $L/r_0 \geq 10$ olan silindirler için bu varsayım çok az hata ile yapılabilir.

5.6.1 Tam Çözümler

Zamana bağlı, bir boyutlu ısı denkleminin sonsuz silindir ve küre için tam çözümleri vardır. Sabit başlangıç sıcaklığı ve taşınım sınır koşulları için çözümler [2] aşağıdaki gibidir.

Sonsuz silindir: Boyutsuz sıcaklık,

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\zeta_n^2 Fo) J_0(\zeta_n r^*) \quad (5.47a)$$

biçiminde verilmiştir. Burada $Fo = \alpha / r_0^2$ olmaktadır. Katsayılar,

$$C_n = \frac{2}{\zeta_n} \frac{J_1(\zeta_n)}{J_0^2(\zeta_n) + J_1^2(\zeta_n)} \quad (5.47b)$$

bağıntısıyla verilmiştir ve ζ_n 'nin ayrık değerleri aşağıdaki transendental denklemin artı kökleridir.

$$\zeta_n \frac{J_1(\zeta_n)}{J_0(\zeta_n)} = Bi \quad (5.47c)$$

J_1 ve J_0 değişkenleri birinci türden Bessel fonksiyonlarıdır ve değerleri Ek B.4'teki tablolarda verilmiştir. Transendental denklemin kökleri (5.47c) Schneider tarafından tablolanmıştır [2].

Küre: Benzer olarak, küre için boyutsuz sıcaklık,

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\xi_n^2 Fo) \frac{1}{\xi_n r^*} \sin(\xi_n r^*) \quad (5.48a)$$

biçiminde verilmiştir. Burada $Fo = \alpha / r_0^2$ olmaktadır. Katsayılar,

$$C_n = \frac{4[\sin(\zeta_n) - \zeta_n \cos(\zeta_n)]}{2\zeta_n - \sin(2\zeta_n)} \quad (5.48b)$$

bağıntısıyla verilmiştir ve ζ_n 'nin ayrık değerleri aşağıdaki transendental denklemin artı kökleridir.

$$1 - \zeta_n \cot \zeta_n = Bi \quad (5.48c)$$

Transendental denklemin kökleri Schneider tarafından tablolanmıştır [2].

5.6.2 Yaklaşık Çözümler

Sonsuz silindir ve küre için bulunan seri çözümler $Fo > 0.2$ için yine tek terimle yaklaşık olarak gösterilebilir. Böylece, levhaya benzer biçimde, radyal sistemin herhangi bir noktasında sıcaklığın zamanla değişimi simetri ekseninde veya merkez noktasında olduğu gibidir.

Sonsuz silindir: Denklem 5.47'ye göre bir-terim yaklaşımı,

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) J_0(\zeta_1 r^*) \quad (5.49a)$$

veya

$$\theta^* = \theta_o^* J_0(\zeta_1 r^*) \quad (5.49b)$$

sonucunu verir. θ_o^* eksen sıcaklığını göstermektedir ve

$$\theta_o^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \quad (5.49c)$$

olmaktadır. C_1 ve ζ_1 katsayılarının değerleri hesaplanmış ve Tablo 5.1'de Biot sayısına göre listelenmiştir.

Küre: Denklem 5.48a'ya göre bir-terim yaklaşımı,

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \frac{1}{\zeta_1 r^*} \sin(\zeta_1 r^*) \quad (5.50a)$$

veya

$$\theta^* = \theta_o^* \frac{1}{\zeta_1 r^*} \sin(\zeta_1 r^*) \quad (5.50b)$$

sonucunu verir. θ_o^* merkez noktasının sıcaklığını göstermektedir ve

$$\theta_o^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \quad (5.50c)$$

olmaktadır. C_1 ve ζ_1 katsayılarının değerleri hesaplanmış ve Tablo 5.1'de Biot sayısına göre listelenmiştir.

5.6.3 Toplam Enerji Geçişi

Bölüm 5.5.3'te olduğu gibi enerjinin korunumu ilkesi uygulanarak sonsuz silindir veya küreden $\Delta t = t$ zaman aralığında geçen toplam enerji bulunabilir. Denklem 5.49b ve Denklem 5.50b'de gösterilen yaklaşık çözümler

yerlerine konarak ve Denklem 5.44'den Q_0 tanımlanarak, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonsuz silindir:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2\theta_o^*}{\zeta_1} J_1(\zeta_1) \quad (5.51a)$$

Küre:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{3\theta_o^*}{\zeta_1^3} [\sin(\zeta_1) - \zeta_1 \cos(\zeta_1)] \quad (5.52)$$

Merkez sıcaklık değerleri θ_o^* , Tablo 5.1'de ele alınan sistem için verilen katsayıları kullanarak, Denklem 5.49c veya Denklem 5.50c'den bulunur.

5.6.4 Ek Açıklamalar

Düz levhada olduğu gibi, bulunan sonuçlar *yüzey sıcaklığı* aniden değişen sonsuz silindirlerin ve kürelerin zamana bağlı sıcaklık dağılımlarını bulmak için kullanılabilir. Başka bir deyişle, sonsuz bir Biot sayısı tanımlanır ve akışkan sıcaklığı T_∞ 'nin yerini sabit yüzey sıcaklığı T_s alır.

Bir terimli yaklaşımların grafik gösterimleri Ek D'de verilmiştir.

ÖRNEK 5.3

Bir çelik boru hattı (AISI 1010) 1 m çapında ve 40 mm et kalınlığındadır. Borunun dış yüzeyi iyice yalıtılmıştır ve akış başlamadan önce borunun her tarafı -20°C sıcaklıktadır. Akışın başlatılması ile boru içine 60°C 'ta sıcak yağ, iç yüzeyde taşınım katsayısı $h = 500 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ olacak biçimde pompalanmaktadır.

1. Akış başladıktan 8 dakika sonra Biot ve Fourier sayıları ne olur?
2. $t = 8$ dakikada yalıtımlı kaplı boru dış yüzey sıcaklığı nedir?
3. $t = 8$ dakikada yağdan boruya ısı akısı q'' (W/m^2) nedir?
4. $t = 8$ dakikaya kadar yağdan boruya bir metre boru uzunluğunda ne kadar enerji geçmiştir?

ÇÖZÜM

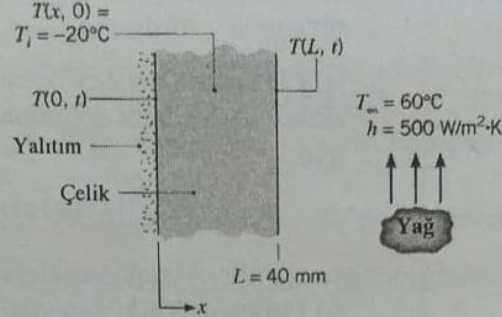
Bilinen: Çevre taşınım koşulları.

İstenen:

1. 8 dakika sonra Biot ve Fourier sayıları.
2. 8 dakika sonra borunun dış yüzey sıcaklığı.

3. $t = 8$ dakikada yağdan boru iç yüzeyine olan ısı akısı.
4. Boru birim boyundan 8 dakika süresince geçen enerji.

Şekil:



Kabuller:

1. Boru gövdesi yaklaşık olarak düz levha alınabilir, çünkü et kalınlığı çaptan çok küçüktür.
2. Özellikler sabit kalmaktadır.
3. Borunun dış yüzeyi adyabatiktir.

Özellikler: Tablo A1. Çelik AISI 1010 [$T = (-20 + 60)^\circ\text{C}/2 \approx 300\text{ K}$]: $\rho = 7823\text{ kg/m}^3$, $c = 434\text{ J/kg} \cdot \text{K}$, $k = 63.9\text{ W/m} \cdot \text{K}$, $\alpha = 18.8 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$.

Çözümleme:

1. $t = 8$ dakikada Biot ve Fourier sayıları, $L_c = L$ alınarak, sırasıyla, 5.10 ve 5.12 numaralı denklemlerden hesaplanır:

$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{500\text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times 0.04\text{ m}}{63.9\text{ W/m} \cdot \text{K}} = 0.313$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{18.8 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s} \times 480\text{ s}}{(0.04\text{ m})^2} = 5.64$$

2. $Bi = 0.313$ olduğundan toplam kütle yaklaşımını kullanmak uygun değildir. Bununla birlikte, $Fo > 0.2$ olduğu için ve L et kalınlığındaki yalıtılmış boru içindeki zamana bağlı koşullar $2L$ kalınlığında aynı yüzey sınır koşullarına sahip düz levhadakine benzer alınabileceğinden istenen sonuçlar düz levha için tek terimli sonsuz seri çözümünden bulunabilir. Eksen sıcaklığı Denklem 5.41 ile hesaplanır:

$$\theta_o^* = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo)$$

Burada, $Bi = 0.313$ için, Tablo 5.1'den $C_1 = 1.047$ ve $\zeta_1 = 0.531$ bulunur. Ayrıca $Fo = 5.64$ olduğundan,

$$\theta_o^* = 1.047 \exp[-(0.531\text{ rad})^2 \times 5.64] = 0.214$$

bulunur. Böylece 8 dakika sonra düz levhanın eksen sıcaklığına karşılık gelen boru dış yüzey sıcaklığı,

$$T(0, 8 \text{ dak}) = T_{\infty} + \theta_o^* (T_i - T_{\infty}) = 60^\circ \text{C} + 0.214(-20 - 60)^\circ \text{C} = 42.9^\circ \text{C} \quad \blacktriangleleft$$

olur.

3. İç yüzeyden ($x = L$) taşınım ile geçen ısı ve herhangi bir t anındaki ısı akısı Newton'un soğutma yasasından bulunabilir. Böylece $t = 480 \text{ s}$ için,

$$q_x''(L, 480 \text{ s}) = q_L'' = h[T(L, 480 \text{ s}) - T_{\infty}]$$

yazılabilir. Yüzey sıcaklığı için bir-terim yaklaşımı kullanılsın. $x^* = 1$ ile Denklem 5.40b'den yüzey sıcaklığı,

$$\theta^* = \theta_o^* \cos(\zeta_1)$$

$$T(L, t) = T_{\infty} + (T_i - T_{\infty})\theta_o^* \cos(\zeta_1)$$

$$T(L, 8 \text{ min}) = 60^\circ \text{C} + (-20 - 60)^\circ \text{C} \times 0.214 \times \cos(0.531 \text{ rad})$$

$$T(L, 8 \text{ min}) = 45.2^\circ \text{C}$$

olarak bulunur. $T = 8$ dakika için ısı akısı şimdi hesaplanabilir:

$$q_L'' = 500 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} (45.2 - 60)^\circ \text{C} = -7400 \text{ W/m}^2 \quad \blacktriangleleft$$

4. 8 dakika süresince borudan geçen enerji 5.44 ve 5.46 numaralı denklemlerden bulunabilir:

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{\sin(\zeta_1)}{\zeta_1} \theta_o^*$$

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{\sin(0.531 \text{ rad})}{0.531 \text{ rad}} \times 0.214 = 0.80$$

$$Q = 0.80 \rho c V (T_i - T_{\infty})$$

Hacim $V' = \pi D L$ olarak yazılır, birim boru uzunluğu için $L = 1$ alınırsa,

$$Q' = 0.80 \rho c \pi D L (T_i - T_{\infty})$$

$$Q' = 0.80 \times 7823 \text{ kg/m}^3 \times 434 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$\times \pi \times 1 \text{ m} \times 0.04 \text{ m} (-20 - 60)^\circ \text{C}$$

$$Q' = -2.73 \times 10^7 \text{ J/m} \quad \blacktriangleleft$$

bulunur.

Yorum:

1. q'' ve Q' ile ilgili eksi işareti ısı geçişi yönünün yağdan borunun iç yüzeyine olduğunu gösterir.
2. Bulunan sonuçlar Ek D'de verilen Heisler ve Gröber diyagramlarını uygulayarak da bulunabilirdi. Örneğin, $Bi^{-1} = 3.2$ ile Şekil D.1'i kullanarak $\theta_o^* \approx 0.22$ ve karşılık gelen eksen sıcaklığı değeri $T_o \approx 42^\circ\text{C}$ bulunur. $x^* = 1$ ve $Bi^{-1} = 3.2$ için Şekil D.2, $\theta(L, 8 \text{ dak}) / \theta_o(8 \text{ dak}) \approx 0.86$ verir, buradan $T(L, 8 \text{ dak}) \approx T_\infty + 0.86[T_o(8 \text{ dak}) - T_\infty] \approx 45^\circ\text{C}$ ve $q_L'' = -7500 \text{ W/m}^2$ bulunur. $Bi = 0.313$ ve $Bi^2Fo = 0.55$ ile Şekil D.3 $Q/Q_o \approx 0.78$ verir. Bu değer Denklem 5.44'de yerine konursa,

$$Q' \approx 0.78 \rho c \pi D L (T_i - T_\infty) = -2.7 \times 10^7 \text{ J/m}$$

elde edilir. Bulunan sonuçlar bir-terim yaklaşımından doğrudan bulunanlarla iyi uyum içindedir.

ÖRNEK 5.4

Özel bir metalin ısı işlemi için yeni bir yöntem incelenmektedir. $r_o = 5 \text{ mm}$ çapında küre biçimindeki malzeme başlangıçta fırın içinde 400°C denge sıcaklığındadır. Bu anda malzeme fırından çıkartılıp, malzemeye iki adımlı bir soğutma işlemi uygulanmaktadır.

Adım 1. t_a süresince, 20°C 'taki hava içinde eksen sıcaklığı $T_a(0, t_a) = 335^\circ\text{C}$ kritik değerine ininceye kadar soğutma. Bu süreçte ısı taşınım katsayısı $h_a = 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ 'dir. Küre bu kritik sıcaklığa indikten sonra ikinci adım başlatılır.

Adım 2. 20°C 'taki tam-karıştırmalı su banyosunda, $h_w = 6000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ısı taşınım katsayısı ile soğutma.

Malzemenin ısıl özellikleri $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$, $k = 20 \text{ W/m} \cdot \text{K}$, $c = 1000 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ ve $\alpha = 6.66 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 'dir.

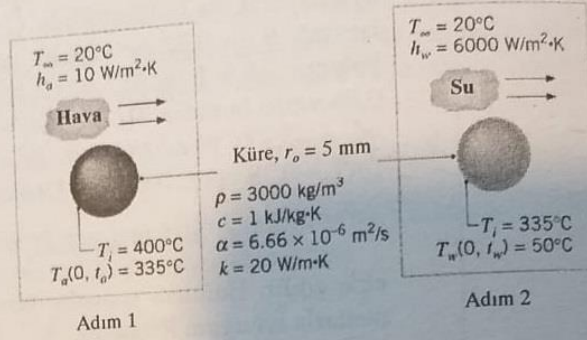
1. Adım 1'in soğutma işleminin tamamlanması için gerekli süre t_a 'yı hesaplayın.
2. Soğutmanın 2. Adımı sırasında küre merkezinin 335°C sıcaklıktan (Adım 1'in tamamlandığı andaki değer) 50°C 'ye soğuması için gerekli süre t_w 'yi hesaplayın.

ÇÖZÜM

Bilinen: Bir kürenin soğutulması sırasındaki sıcaklıklar

İstenen:

1. Hava içinde istenen soğutmayı gerçekleştirmek için gerekli t_a süresi.
2. Su banyosunda soğutmayı tamamlamak için gerekli t_w süresi.

Şekil:**Kabuller:**

1. r doğrultusunda bir boyutlu iletim
2. Sabit özellikler

Çözümleme:

1. Toplam kütle yaklaşımının kullanılıp kullanılamayacağını belirlemek için Biot sayısı hesaplanır. $L_c = r_o/3$ ile Denklem 5.10'dan,

$$Bi = \frac{h_a r_o}{3k} = \frac{10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times 0.005 \text{ m}}{3 \times 20 \text{ W/m} \cdot \text{K}} = 8.33 \times 10^{-4}$$

olur. Bu nedenle, toplam kütle yaklaşımı kullanılabilir ve sıcaklık belirli bir anda küre içinde her noktada yaklaşık eşittir. Denklem 5.5'den

$$t_a = \frac{\rho V c}{h_a A_s} \ln \frac{\theta_i}{\theta_a} = \frac{\rho r_o c}{3 h_a} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T_a - T_\infty}$$

bulunur, burada $V = (4/3)\pi r_o^3$ ve $A_s = 4\pi r_o^2$ olmaktadır. Böylece

$$t_a = \frac{3000 \text{ kg/m}^3 \times 0.005 \text{ m} \times 1000 \text{ J/kg} \cdot \text{K}}{3 \times 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}} \ln \frac{400 - 20}{335 - 20} = 94 \text{ s}$$

olarak hesaplanır.

2. Toplam kütle yaklaşımının soğutma işleminin ikinci adımı için uygun olup olmadığını bulmak için Biot sayısı yeniden hesaplanır. Bu durumda,

$$Bi = \frac{h_w r_o}{3k} = \frac{6000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times 0.005 \text{ m}}{3 \times 20 \text{ W/m} \cdot \text{K}} = 0.50$$

olur ve yöntemin kullanımı uygun değildir. Fakat, $t = t_a$ 'da küre sıcaklığı her noktada yaklaşık eşittir ve bir-terim yaklaşımı t_a 'dan $t = t_a + t_w$ kadar ki hesaplamalar için kullanılabilir. Merkez sıcaklığının 50°C sıcaklığa ($T(0, t_w) = 50^\circ\text{C}$) inmesi için süre t_w , Denklem 5.50c'yi yeniden düzenleyerek bulunabilir,

$$Fo = -\frac{1}{\zeta_1^2} \ln \left[\frac{\theta_o^*}{C_1} \right] = -\frac{1}{\zeta_1^2} \ln \left[\frac{1}{C_1} \times \frac{T(0, t_w) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right]$$

burada $t_w = For_o^2 / \alpha$ 'dır. Biot sayısı yeniden tanımlanırsa,

$$Bi = \frac{h_w r_o}{k} = \frac{6000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \times 0.005 \text{ m}}{20 \text{ W/m} \cdot \text{K}} = 1.50$$

bulunur. Tablo 5.1'den $C_1 = 1.376$ ve $\zeta_1 = 1.800$ rad okunur ve

$$Fo = -\frac{1}{(1.800 \text{ rad})^2} \ln \left[\frac{1}{1.376} \times \frac{(50 - 20)^\circ\text{C}}{(335 - 20)^\circ\text{C}} \right] = 0.82$$

olarak hesaplanır. Böylece,

$$t_w = Fo \frac{r_o^2}{\alpha} = 0.82 \frac{(0.005 \text{ m})^2}{6.66 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 3.1 \text{ s}$$

olur. Dikkat edilirse, $Fo = 0.82$ olduğundan bir-terim yaklaşımının kullanımı doğrudur.

Yorum:

1. Eğer adım 1'in sonucunda küre içindeki sıcaklık dağılımı her noktada yaklaşık eşit olmasaydı, bir-terim yaklaşımı adım 2'nin hesaplamalarında kullanılamazdı.
2. Adım 2'nin sonunda kürenin yüzey sıcaklığı Denklem 5.55b'den hesaplanabilir. $\theta_o^* = 0.095$ ve $r^* = 1$ ile

$$\theta^*(r_o) = \frac{T(r_o) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{0.095}{1.800 \text{ rad}} \sin(1.800 \text{ rad}) = 0.0514$$

elde edilir ve

$$T(r_o) = 20^\circ\text{C} + 0.0514(335 - 20)^\circ\text{C} = 36^\circ\text{C}$$

bulunur.

Denklem 5.48a ile verilen sonsuz seri çözümü ve onun Denklem 5.50b ile verilen birinci terimi, küre içinde herhangi bir noktada ve herhangi bir anda $t > t_a$ sıcaklığı hesaplamak için kullanılabilir. $(t - t_a) < 0.2(0.005 \text{ m})^2 / 6.66 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 0.75 \text{ s}$ için serinin yakınsamasını sağlayacak yeterli sayıda terim kullanılmalıdır. $(t - t_a) > 0.75 \text{ s}$