İdeal gazlar için $\rho = P/RT$ olduğundan hacimsel genleşme katsayısı,

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{P}{RT^2} = \frac{1}{T} \tag{5.3}$$

$$\beta = \frac{1}{T_f}; \qquad T_f = \frac{T_y + T_\infty}{2} \tag{5.4}$$

şeklinde hesaplanır, birimi K^{-1} dir. Burada T_f film sıcaklığı olup Kelvin (K) cinsinden alınmalıdır. **Yerel Grashof sayısı** için, L yerine istenilen yükseklikteki uzunluk (x) konularak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$Gr_x = \frac{g\beta(T_y - T_\infty)x^3}{\nu^2} \tag{5.5}$$

Burada karakteristik uzunluk x başlangıçtan olan uzaklıktır. Doğal ısı taşınımında ortalama ısı taşınım katsayısı;

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h_x dx$$

integrali ile bulunabilir. Matematiksel işlemler yapıldığında ortalama Nusselt sayısı,

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = \frac{4}{3} Nu_L \tag{5.6}$$

şeklinde bulunur.

5.1.1 Düşey levhada laminer doğal ısı taşınımı

Doğal taşınımda laminerden türbülansa geçiş $10^8 < Gr_{kr} < 10^9$ aralığındadır. $Gr < 10^8$ ise ***laminer doğal taşınım***, $Gr > 10^9$ ise ***türbülanslı doğal taşınım*** olur. Doğal taşınım için sınır tabaka denklemleri çözülerek sabit yüzey sıcaklığında, düşey levha boyunca sıkıştırılamayan akışkanlarda, ortalama *Nusselt* sayısı için,

$$\overline{Nu}_L = 0{,}677\, Pr^{1/2}\,(0{,}952 + Pr)^{-1/4} Gr_L^{1/4} \tag{5.7}$$

bağıntısı bulunur. Gr_L levhanın boyuna göre hesaplanan *Grashof* sayısıdır. Akışkanın hava olması halinde $Pr = 0{,}714$ konularak aşağıdaki bağıntı bulunur.

$$\overline{Nu}_L = 0{,}504\ Gr_L^{1/4} \tag{5.8}$$

5.1.2 Düşey levhada türbülanslı doğal ısı taşınımı

Sabit yüzey sıcaklığında türbülanslı doğal ısı taşınımı için integral denklemi kullanılarak, levha ucundan itibaren türbülansın başladığı kabul edilerek çözüm yapıldığında, ortalama *Nusselt* sayısı aşağıdaki gibi elde edilir..

$$\overline{Nu}_L = 0{,}0246 Gr^{2/5} Pr^{7/15} \left[1 + 0{,}494 Pr^{2/3}\right]^{-2/5} \tag{5.9}$$

5.2 DÜŞEY LEVHADA DENEYSEL BAĞINTILAR

Doğal taşınımda laminerden türbülanslı akışa geçiş için diğer bir kıstas da,

$$Ra_L = Gr_L \Pr = \frac{g\beta(T_y - T_\infty)L^3}{\nu\alpha} \tag{5.10}$$

şeklinde tanımlanan ***Rayleigh sayısıdır.*** Rayleigh sayısı Grashof ve Prandlt sayılarının çarpımıdır. Buna göre laminer akıştan türbülanslı akışa geçiş bölgesi $\mathbf{4x10^8 < Ra_{kr} < 6x10^{10}}$ aralığındadır. Düşey levhada doğal ısı taşınımı için *sabit yüzey sıcaklığında* hata payı daha az olan bir bağıntı ***Churchill*** ve ***Chu*** trafından. $10^{-1} < Ra_L < 10^{12}$ aralığı için;

$$\overline{Nu}_L = \left\{0{,}825 + \frac{0{,}387 Ra_L^{1/6}}{\left[1 + (0{,}492/Pr)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2 \tag{5.11}$$

şeklinde verilmiştir. Sadece laminer bölge için ise $0 < Ra_L < 10^9$ aralığında;

$$\overline{Nu}_L = 0{,}68 + \frac{0{,}670 Ra_L^{1/4}}{\left[1 + (0{,}492/Pr)^{9/16}\right]^{4/9}} \tag{5.12}$$

bağıntısını vermişlerdir. Denklem (5.12) sabit ısı akısı için de kullanılabilir. Bu bağıntılardaki fiziksel özelliklerin hepsi film sıcaklığında alınmalıdır. Düşey levha için kullanımı daha pratik olan şu bağıntılarda geçerlidir.

$$10^4 < Ra < 10^9 \quad \rightarrow \quad Nu = 0{,}59 Ra^{1/4} \tag{5.13a}$$

$$10^9 < Ra < 10^{13} \quad \rightarrow \quad Nu = 0{,}13 Ra^{1/3} \tag{5.13b}$$

Düşey levha için verilen bağıntılar;

$$\frac{D}{L} \geq \frac{35}{Gr_L^{1/4}} \tag{5.14}$$

olması halinde ***düşey silindir için*** de kullanılabilir. **Sabit ısı akısı** halinde düşey levha ve silindir için, ***Vliet'in*** deneysel olarak bulduğu bağıntılar aşağıda verilmiştir.

$$10^5 < Gr_x^* < 10^{11} \quad \text{için} \quad \boldsymbol{Nu_x = 0{,}60(Gr_x^*\,Pr)^{1/5}} \tag{5.15}$$

$$2x10^{13} < Gr_x^*\,Pr < 10^{16} \quad \text{için} \quad \boldsymbol{Nu_x = 0{,}70(Gr_x^*\,Pr)^{1/4}} \tag{5.16}$$

Bu bağıntılardaki fiziksel özellikler film sıcaklığındadır. Burada Gr_x^* **değiştirilmiş** ***Grashof*** sayısı olup,

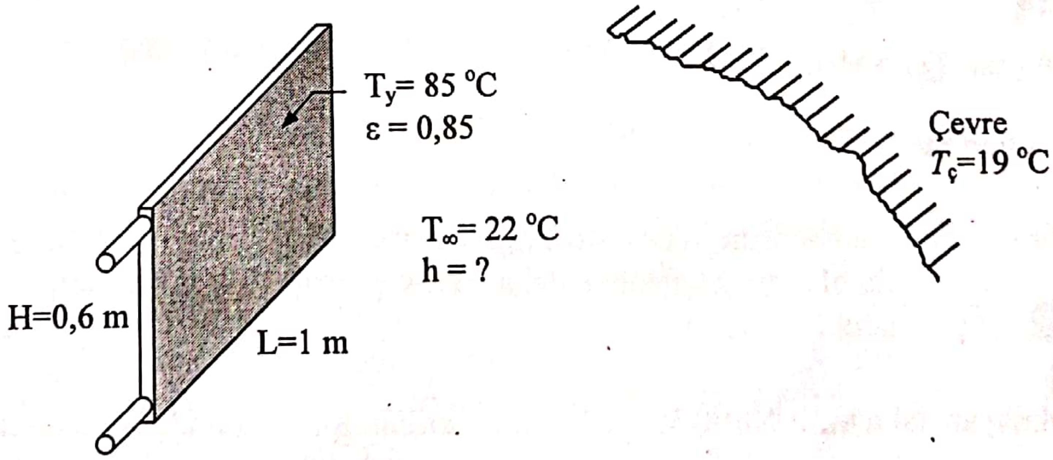
$$Gr_x^* = \frac{g\ \beta\ q\ x^4}{k\gamma^2}$$

şeklinde hesaplanır. Burada q ısı akısıdır.

ÖRNEK 5.1

Bir salonda ısınmak için tek levhalı panel radyatör kullanılmaktadır. Levha şeklindeki panel radyatörün yüksekliği 60 cm uzunluğu 1m ve her iki yüzeyinin sıcaklığı 85°C tır. Oda havası 22°C, duvarların sıcaklığı 19°C ve radyatörün ışınım yayma katsayısı 0,85 dir. Panel radyatörün duvar kenarından yeteri kadar uzakta olduğu kabul ederek radyatörden odaya verilen toplam ısı miktarını bulunuz.

Çözüm:



$$T_f = \frac{T_y + T_\infty}{2} = \frac{85+22}{2} = 53{,}5°C = 326{,}5K \quad ; \quad \beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{326{,}5} = 0{,}003K^{-1}$$

T_f =53,5°C hava için; k=0,0282 W/mK, ν= $18{,}4.10^{-6}$ m^2/s, Pr=0,7

Oda havası durgun olduğundan taşınım türü doğal taşınımdır. Bu panel radyatör düşey levha olarak ele alınmalıdır. Karakteristik uzunluk radyatör yüksekliğidir (H), Grashof sayısı;

$$Gr = \frac{g\beta(T_y - T_\infty)H^3}{\nu^2} = \frac{9,81\times 0,003(85-22)0,6^3}{(18,4\times 10^{-6})^2} = 11,8\times 10^8$$

$Gr > 10^9$ olduğundan türbülanslıdır denk.5.11 ile çözüm yapılabilir. Rayleigh sayısı;

$$Ra = Gr.\Pr = 11,8\times 10^8 \times 0,7 = 8,26\times 10^8$$

$$\overline{Nu}_D = \left\{0,825 + \frac{0,387Ra^{1/6}}{\left[1+(0,492/\Pr)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2 = \left\{0,825 + \frac{0,387(8,26\times 10^8)^{1/6}}{\left[1+(0,492/0,70)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2 = 115,6$$

$$h = \frac{k.Nu}{H} = \frac{0,0282\times 115,6}{0,6} \longrightarrow \qquad \boldsymbol{h = 5,43\ W/m^2K}$$

Görüldüğü gibi arada fazla fark olmamaktadır. Doğal taşınımla olan ısı geçişi;

$$Q_{taş} = h2A(T_y - T_\infty) = 5,43\times 2\times 0,6\times 1(85-22) = \mathbf{410,5\ W}$$

Işınımla olan ısı geçişi;

$$Q_{ışı} = \sigma 2A\varepsilon(T_y^4 - T_ç^4) = 5,67\times 10^{-8}\times 2\times 0,6\times 1\times 0,85(358^4 - 292^4) = \mathbf{529,5\ W}$$

Panel radyatörden odaya olan toplam ısı geçişi;

$Q_{top} = Q_{taş} + Q_{ışı} = 410,5 + 529,5$

$\mathbf{Q_{top} = 940\ W}$

Yorum: Panel radyatörün yüzey sıcaklığı yüksek olduğundan (85 °C), ışınımla olan ısı geçişi doğal taşınımla olan ısı geçişinden daha büyük çıkmıştır. Sıcaklık farkı arttıkça ışınımla olan ısı geçişi çok daha fazla artar.

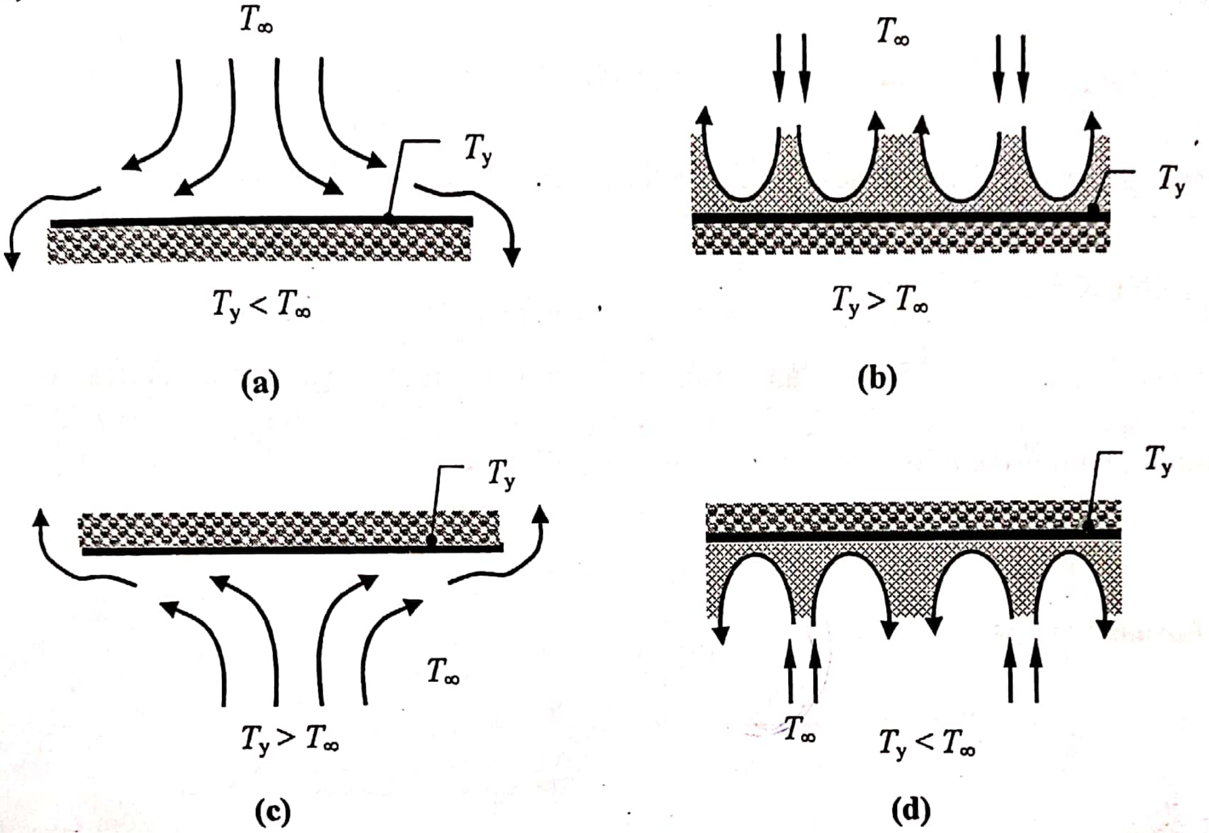
Hassas olmayan daha basit $Nu=0,59\ Re^{1/4}$ ifadesi kullanılması halinde ısı taşınım katsayısı;

$Nu=0,59\ Ra^{1/4} = 0,59\ (8,26\times 10^8)^{1/4} = 100,0$

$h = \frac{k.Nu}{L} = \frac{0,0282\times 100,0}{0,6} = 4,7\ W/m^2K < 5,43$ Hassas olmayan hesapta ısı taşınım katsayısı %13 daha az çıkmıştır.

5.3 YATAY LEVHADA DOĞAL ISI TAŞINIMI

Yatay levhalardaki doğal taşınımda akışkan hareketleri Şekil 5.2'de gösterildiği gibi gerçekleşir. Şekil 5.2(a)'da yatay levhanın üst yüzey sıcaklığı akışkan sıcaklığından daha küçük olduğundan, soğuyan akışkanın yoğunluğu arttığı için, taşınım hareketi aşağıya doğru gerçekleşir.



Şekil 5.2. Yatay levhada doğal taşınım hareketleri

Şekil 5.2 (b)'de yatay levhanın üst yüzey sıcaklığı akışkan sıcaklığından daha büyük olduğundan, levha üzerinde ısınan akışkan zerrelerinin genleşmesinden dolayı yoğunluğu azalan akışkan, yukarıya doğru hareket eder. Bunun yerine, yoğunluğu daha fazla olan akışkan zerreleri gelerek doğal taşınım hareketi meydana gelir. Şekil 5.2 (c) de, yatay levhanın alt yüzey sıcaklığı akışkan sıcaklığından büyük olduğu için, ısınan akışkan zerreleri levhanın yanlarından yukarıya doğru, doğal taşınım hareketi meydana getirir. Şekil 5.2 (d)' de, yatay levhanın alt yüzey sıcaklığı akışkan sıcaklığından küçük olduğu için, soğuyarak yoğunluğu artan akışkan zerreleri şekildeki gibi aşağıya doğru hareket eder.

Yatay levhadaki doğal taşınımda karakteristik uzunluk, levha alanının (A) levhanın çevresine ($Ç$) oranı şeklinde tanımlanır.

$$L \equiv \frac{A}{Ç} \tag{5.17}$$

Üst yüzeyi akışkan sıcaklığından daha sıcak ve alt yüzeyi akışkan sıcaklığından daha soğuk olan yatay levhalardaki doğal ısı taşınımı için (şekil 5.2 b ve d için);

$$10^4 \le Ra_L \le 10^7 \quad \rightarrow \quad \overline{Nu}_L = 0{,}54 Ra_L^{1/4} \tag{5.18}$$

$$10^7 \le Ra_L \le 10^{11} \quad \rightarrow \quad \overline{Nu}_L = 0{,}15 Ra_L^{1/3} \tag{5.19}$$

bağıntıları verilmiştir. Alt yüzeyi sıcak ve üst yüzeyi soğuk yatay levhalar için ise(şekil 5.2 a ve c),

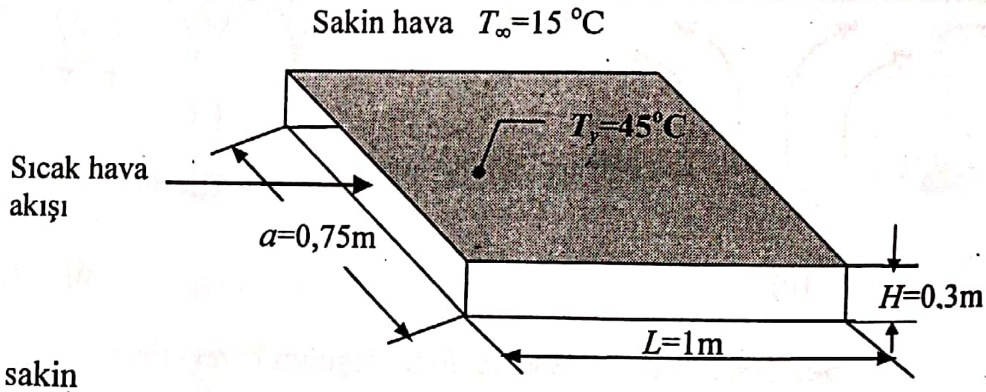
$$10^5 \le Ra_L \le 10^{10} \quad \rightarrow \quad \overline{Nu}_L = 0{,}27 Ra_L^{1/4} \tag{5.20}$$

bağıntısı geçerlidir. Bu bağıntılarda fiziksel özellikler film sıcaklığında alınmalıdır.

ÖRNEK 5.2

Kesiti 0,3m x 0,75 m olan uzun bir kanal içinden sıcak hava akmaktadır Yüzey sıcaklıkları 45°C'ta sabit kalan kanal , yatay olarak 15°C sıcaklığındaki sakin bir hava ortamında bulunmaktadır. Kanalın 1m boyundan olan ısı kaybı ne kadardır?[1]

Çözüm:



Kabuller:
1. Ortam havası sakin
2. Işınım ihmal
3. Yüzey sıcaklıkları sabit

$T_f = \dfrac{T_y + T_\infty}{2} = \dfrac{45+15}{2}$ =30 °C = 303 K'deki hava için $\nu = 16{,}2x10^{-6}$ m²/s, $\alpha = 22{,}9x10^{-6}$ m²/s, k=0,0265 W/mK, Pr= 0,71

$$\beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{303} = 0{,}0033 K^{-1}$$

Kanal parçasının doğal taşınım ile olan ısı kaybı, yatay alt ve üst yüzeylerinden ve düşey yan yüzeylerinden meydana gelmektedir. Düşey yan yüzeyler için;

$$Ra_L = \frac{g\beta(T_y - T_\infty)H^3}{\gamma\alpha} = \frac{9{,}8x0{,}0033x(45-15)x0{,}3^3}{16{,}2.10^{-6}x22{,}9x10^{-6}}$$

$$Ra_L = 7{,}07x10^7$$

$0 < R_L < 10^9$ olduğundan denklem (5.12) kullanılabilir. Buradan,

$$\overline{Nu}_L = 0{,}68 + \frac{0{,}670 Ra_L^{1/4}}{\left[1 + (0{,}492/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{4/9}} = 0{,}68 + \frac{0{,}670\mathrm{x}(7{,}07.10^7)^{1/4}}{\left[1 + (0{,}492/971)^{9/16}\right]^{4/9}} = 47{,}886$$

$$\overline{Nu}_L = \frac{\overline{h}_{yan} H}{k}$$

$$\overline{h}_{yan} = \frac{k\overline{Nu}_L}{H} = \frac{0{,}0265\mathrm{x}47{,}886}{0{,}3} = \mathbf{4{,}23\ W/m^2K}$$

bulunur. Yatay yüzeylerdeki *Raleigh* sayısı için karakteristik uzunluk denk.(5.17)'den;

$$L \equiv \frac{A}{Ç} = \frac{Lxa}{2(L+a)} = \frac{1\mathrm{x}0{,}75}{2\mathrm{x}(1+0{,}75)} = 0{,}214\ \mathrm{m}$$

Yatay yüzeylerdeki *Rayleigh* sayısı;

$$Ra_L = \frac{9{,}8\mathrm{x}0{,}0033\mathrm{x}30\mathrm{x}(0{,}214)^3}{16{,}2.10^{-6}\mathrm{x}22{,}9.10^{-6}} = 2{,}56.10^7$$

Üst yüzeyden olan doğal ısı taşınımı için denklem (5.19)'dan,

$$\overline{Nu}_L = 0{,}15 Ra_L^{1/3} = 0{,}15(2{,}56\mathrm{x}10^7)^{1/3} = 44{,}25$$

$$\overline{h}_{üst} = \frac{k\overline{Nu}_L}{L} = \frac{0{,}0265}{0{,}214} 44{,}25 = \mathbf{5{,}47\ W/m^2K}$$

Alt yüzeyden olan doğal ısı taşınımı denklem (5.20)'den;

$$\overline{Nu}_L = 0{,}27 Ra_L^{1/4} = 0{,}27(2{,}56\mathrm{x}10^7)^{1/4} = 19{,}21$$

$$\overline{h}_{alt} = \frac{k\overline{Nu}_L}{L} = \frac{0{,}0265}{0{,}214} 19{,}21 = \mathbf{2{,}38\ W/m^2K}$$

olur. Kanalın bir metre uzunluğundan olan ısı geçişi;

$$Q = (h_{yan} 2A_{yan} + h_{üst} A_{üst} + h_{alt} A_{alt})(T_y - T_\infty)$$

$$Q = (4{,}23\mathrm{x}2\mathrm{x}1\mathrm{x}0{,}3 + 5{,}47\mathrm{x}1\mathrm{x}0{,}75 + 2{,}38\mathrm{x}1\mathrm{x}0{,}75)(45 - 15)$$

$$\mathbf{Q = 252{,}76\ W}$$

5.4 YATAY SİLİNDİRDE DOĞAL ISI TAŞINIMI

Yatay silindir yada boruda *Grashof* ve *Rayleigh* sayısındaki karakteristik uzunluk olarak silindirin dış çapı alınır. Yatay silindirde ortalama *Nusselt* sayısı Morgan tarafından,

$$\overline{Nu}_D = \frac{\overline{h}D}{k} = C\ Ra_D^n \qquad Ra_D = \frac{g\beta(T_y - T_\infty)D^3}{\nu\alpha} \tag{5.21}$$

biçiminde verilmiştir. Buradaki ***C*** ve **n** katsayıları çizelge 5.1'de verilmiştir.

***Çizelge* 5.1** Denklem 5.21' in sabitleri

Ra_D	C	n
10^{-10} - 10^{-2}	0,675	0,058
10^{-2} - 10^{2}	1,020	0,148
10^{2} - 10^{4}	0,850	0,188
10^{4} - 10^{7}	0,480	0,250
10^{7} - 10^{12}	0,125	0,333

Churchill ve ***Chu***; $10^{-5} < Ra_D < 10^{12}$ aralığı için yatay silindirde,

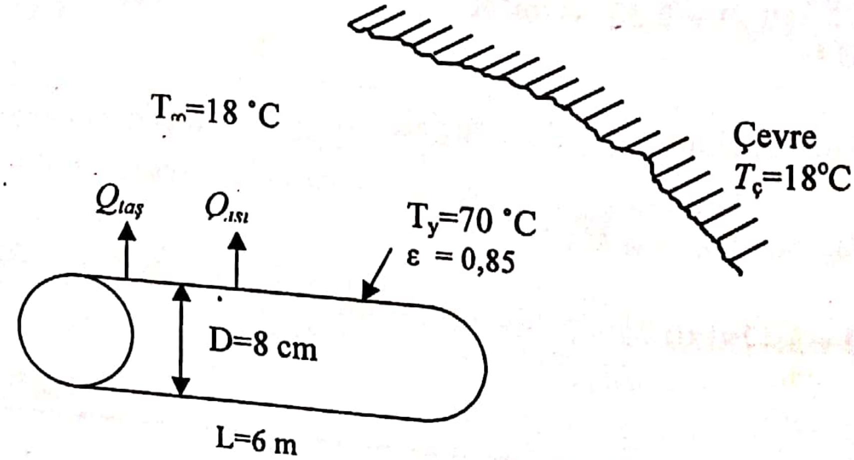
$$\overline{Nu}_D = \left\{0{,}60 + \frac{0{,}387 Ra_D^{1/6}}{\left[1 + (0{,}559/Pr)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2 \tag{5.22}$$

bağıntısını önermişlerdir.

ÖRNEK 5.3

Dış çapı 8 cm ve uzunluğu 6 m olan ve içinden sıcak su geçen boru, ortam ve çevre sıcaklığı 18 ˚C olan geniş bir odanın içinden yatay olarak geçmektedir. Borunun dış yüzey sıcaklığı 70 ˚C ve ışınım yayma katsayısı 0,85 olduğuna göre borudan olan toplam ısı kaybını hesaplayınız. ($\sigma = 5{,}67.10^{-8}$ W/m^{2}K^4)

Çözüm:



T_f=44°C ta hava için γ= $1{,}74.10^{-5}$ m^2/s, k=0,0273 W/mK , Pr=0,71, g=9,8 m/s^2 , β=1/ T_f

Boru durgun bir ortamdan geçtiği için doğal taşınımla ve ışınımla ısı kaybı vardır. Doğal taşınımdaki ısı taşınım katsayısı:

$$T_f = \frac{T_y + T_\infty}{2} = \frac{70+18}{2} = 44°C = 317K \quad ; \quad \beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{317} = 0{,}00315K^{-1}$$

$$Ra = GrPr = \frac{g\beta(T_y - T_\infty)D^3P_r}{\gamma^2} = \frac{9{,}8\times 0{,}00315(70-18)0{,}08^3\times 0{,}71}{(1{,}74\times 10^{-5})^2} = 1{,}930\times 10^6$$

$$\overline{Nu}_D = \left\{0{,}60 + \frac{0{,}387Ra_D^{1/6}}{\left[1+(0{,}559/Pr)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2 = \left\{0{,}60 + \frac{0{,}387(1{,}930\times 10^6)^{1/6}}{\left[1+(0{,}559/0{,}71)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2 = 17{,}51$$

$$Nu = \frac{h.D}{k} \quad \rightarrow \quad h = \frac{kNu}{D} = \frac{0{,}0273\times 17{,}51}{0{,}08}$$

***h* = 5,97 W/m²K**

Doğal taşınımla olan ısı kaybı; (A =π DL = π0,08 x 6 = 1,51 m²)

$Q_{taş} = h\,A\,(T_y - T_\infty) = 5{,}97 \times 1{,}51(70-17) =$ **468,76 W**

Işınımla olan ısı geçişi;

$Q_I = \sigma\varepsilon A(T_y{}^4 - T_\infty{}^4) = 5{,}67\times 10^{-8}\times 0{,}85\times 1{,}51(343^4 - 291^4) =$ **485,43 W**

Toplam ısı akaybı;

$$Q_{top} = Q_{taş} + Q_{ısı} = 468{,}76 + 485{,}43$$

***Q*$_{top}$= 954,19 W/m²K**

5.5 PARALEL LEVHALAR ARASINDA DOĞAL ISI TAŞINIMI

5.5.1 Düşey Kanal

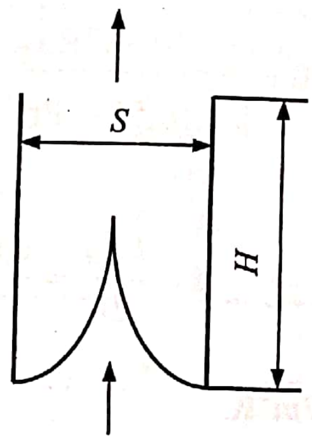
Altı ve üstü açık paralel levhalar arasında (Şekil 5.3) ***Elenbaas*** tarafından yarı deneysel olarak sabit yüzey sıcaklıkları ve ısı akıları için,

$$\overline{Nu}_S = \frac{1}{24} Ra_S \left(\frac{S}{L}\right) \left\{ 1 - \exp\left[- \frac{35}{Ra_S (S/H)} \right] \right\}^{3/4} \tag{5.23}$$

bağıntısı verilmiştir. Burada S kanalın genişliği, H kanalın yüksekliğidir. Burada *Rayleigh* ve *Nusselt* sayıları aşağıdaki gibi hesaplanmalıdır.

$$Ra_S = \frac{g\beta(T_y - T_\infty)S^3}{\nu\alpha} \tag{5.24}$$

$$\overline{Nu}_S = \frac{hS}{k}$$



Şekil 5.3 Paralel iki levha arasında doğal taşınım

Isı akısı sabit ise yerel taşınım katsayısı;

$$\overline{Nu}_{S,l} = \left(\frac{q}{T_y - T_\infty}\right)\frac{S}{k}$$

5.5.2 Kapalı yüzeyler arasındaki akışkan tabakalarında doğal taşınım

Farklı sıcaklıktaki kapalı yüzeyler arasında kalan ince akışkan tabakalarında ısı geçişinin iletim ile mi yoksa taşınım ile mi olduğunu kritik *Rayleigh* sayısı belirtir. Yatay konumdaki kapalı dar bir hacim içindeki akışkan için Rayleigh sayısı;

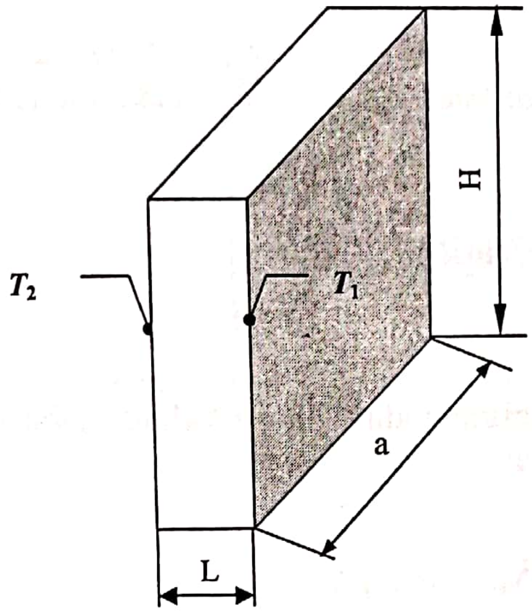
$$Ra_{kr} > 1708$$

ise doğal taşınım olayı başlar. Eğer Ra sayısı bu değerden küçük ise, ısı geçişi iletim ile gerçekleşir. Düşey konumdaki kapalı ince akışkan tabakasında kritik Ra sayısı **2000**'dır. Şekil 5.4'de gösterilen düşey konumda kapalı dar bir hacimde *Rayleigh* sayısı ve *Nusseld*'sayısı;

$$Ra_L = \frac{g\beta(T_1 - T_2)L^3}{\nu\alpha} \tag{5.25}$$

$$\overline{Nu}_L = \frac{\overline{h}L}{k} \tag{5.26}$$

şeklinde hesaplanır. Burada L kapalı hacmin kalınlığıdır. Kapalı hacimdeki ince akışkan tabakalarında Nu, Gr ve Ra sayılarında karakteristik uzunluk akışkan tabakasının kalınlığıdır (L). Örneğin çift camlı pencerelerde karakteristik boyut iki cam arasındaki mesafedir.



Şekil 5.4 Düşey dikdörtgen prizma içinde doğal taşınım.

Şekil 5.4 de gösterilen düşey, kapalı dikdörtgen bir prizma içindeki ince akışkan tabakasındaki doğal ısı taşınımı için önerilen bağıntılar aşağıda verilmiştir. Bu bağıntılarda termofiziksel özellikler iki yüzeyin ortalama $[T_{ort}=(T_1+T_2)/2]$ sıcaklığındadır. Sabit yüzey sıcaklığı için verilen bağıntılar;

$$\left.\begin{array}{l} 2<(H/L)<10 \\ Pr<10^5 \\ 10^3<Ra_L<10^{10} \end{array}\right\} \rightarrow \overline{Nu}_L = 0{,}22\left(\frac{Pr\,Ra_L}{0{,}2+Pr}\right)^{0,28}\left(\frac{H}{L}\right)^{-1/4} \tag{5.27}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1<\dfrac{H}{L}<2 \\ 10^{-3}<Pr<10^5 \\ 10^3<\dfrac{Ra_L\,Pr}{0{,}2+Pr} \end{array}\right\} \rightarrow \overline{Nu}_L = 0{,}18\left(\frac{Pr\,Ra_L}{0{,}2+Pr}\right)^{0,29} \tag{5.28}$$

$$\left.\begin{array}{l} 11<(H/L)<42 \\ 0{,}5<\mathrm{Pr}<2 \\ 6x10^3<Ra_L<2x10^5 \end{array}\right\} \rightarrow \overline{Nu}_L = 0{,}197Ra^{1/4}\left(\frac{H}{L}\right)^{-1/9} \tag{5.29}$$

bağıntıları geçerlidir. Sabit ısı akısı için;

$$\left.\begin{array}{l} 10 < (H/L) < 40 \\ 1 < Pr < 2x10^4 \\ 10^4 Ra_L < 10^7 \end{array}\right\} \rightarrow \overline{Nu}_L = 0,42 Ra^{1/4}\ Pr^{0,012}\left(\frac{H}{L}\right)^{-0,3} \tag{5.30}$$

bağıntısı, sabit ısı akısı ve sabit yüzey sıcaklığı halinde sıvı akışkan için;

$$\left.\begin{array}{l} 1 < (H/L) < 40 \\ 1 < Pr < 20 \\ 10^6 < Ra_L < 10^9 \end{array}\right\} \rightarrow \overline{Nu}_L = 0,046 Ra_L^{1/3} \tag{5.31}$$

bağıntısı geçerlidir. Akışkan tabakasının **yatay olması halinde** sabit sıcaklıkta, alttan ısınma üstten soğuma için gaz akışkanlarda;

$$\left.\begin{array}{c} 7x10^3 < Ra_L < 3,2x10^5 \\ 0,2 < Pr < 2 \end{array}\right\} \rightarrow \overline{Nu}_L = 0,212 Ra_L^{1/4} \tag{5.32}$$

sıvı akışkan olması halinde;

$$\left.\begin{array}{c} 6x10^3 < Ra_L < 3,7x10^4 \\ 1 < Pr < 5x10^3 \end{array}\right\} \rightarrow \overline{Nu}_L = 0,375 Ra_L^{0,2} \tag{5.33}$$

bağıntıları geçerlidir.

ÖRNEK 5.3

Atmosferik basınçtaki hava, genişliği 15 mm, yüksekliği ve uzunluğu 0,5 m olan düşey kapalı bir prizma içinde bulunmaktadır. Levhaların sıcaklıkları 100°C ve 40°C olduğuna göre iki yüzey arasındaki doğal taşınım ile olan ısı geçişini hesaplayınız.

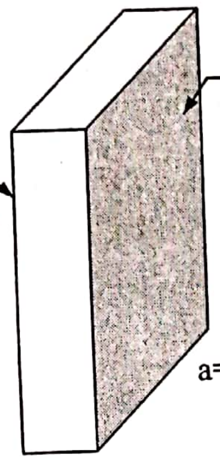
Çözüm:

Kabuller:

1.Yüzeyler sabit yayılı sıcaklıkta, 2.Işınım ihmal,
3.Üst, yan ve alt yüzeylerdeki doğal taşınım ihmal.

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{100+40}{2} = 70^0\text{C}=70+273=343\text{K}$$

deki hava için; $\gamma = 20,2x10^{-6}$ m^2/s, α=28,86x10^{-6} m^2/s, k=0,0295 W/mK, Pr = 0,70 dır.



Ra sayısının hesabı;

$$Ra_L = \frac{g\beta(T_1 - T_2)L^3}{\alpha\gamma}$$

L doğal taşınım yönündeki karakteristik uzunluk olduğundan burada L=0,015 m dir

$$\beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{343} = 0{,}0029 \text{ K}^{-1}$$

$$Ra_L = \frac{g\beta(T_1 - T_2)L^3}{\alpha\gamma} = \frac{9{,}81 \times 0{,}0029(100-40)0{,}015^3}{28{,}86x10^{-6} \times 20{,}21 \times 10^{-6}} = 9877$$

.Ra_L=9877>6000, $\frac{H}{L} = \frac{0{,}5}{0{,}015} = 33{,}33 > 11$ ve $\Pr = 0{,}70$ olduğundan denk.(5.29) geçerlidir.

$$\overline{Nu}_L = 0{,}197 Ra^{1/4}\left(\frac{H}{L}\right)^{-1/9}$$

$$Nu_L = 0{,}197x9877^{1/4}\left(\frac{0{,}5}{0{,}015}\right)^{-1/9} = 1{,}33$$

Buradan doğal ısı taşınım katsayısı;

$$\frac{h\ L}{k} = 1{,}33 \quad \rightarrow \quad h = \frac{kx1{,}33}{L} = \frac{0{,}0295x1{,}33}{0{,}015} \quad \rightarrow \quad \mathbf{h = 2{,}62\ W/m^2K}$$

bulunur. Geçen ısı miktarı,

$$Q = hA(T_1 - T_2) = 2{,}62 \times 0{,}5 \times 0{,}5(100 - 40)$$

$$\mathbf{Q = 39{,}3\ W}$$

bulunur.

$$Ra_D = \frac{9{,}81x356{,}4x10^{-6}(56-18)0{,}005^3}{6{,}995x10^{-7}x1{,}508x10^{-7}}$$

$\boldsymbol{Ra_D}$ **= 157438,6**

$10^{-5} < Ra_D < 10^{12}$ aralığında yatay borudaki doğal ısı taşınımı için denk.(5.22)' den,

$$\overline{Nu}_D = \left\{0{,}60 + \frac{0{,}387 Ra_D^{1/6}}{\left[1+(0{,}559/Pr)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2 = \left\{0{,}60 + \frac{0{,}387x157438{,}6^{1/6}}{\left[1+(0{,}559/4{,}62)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2$$

$\boldsymbol{Nu_D}$ **= 10,36**

$$\frac{hD}{k} = 10{,}36 \Rightarrow h = \frac{10{,}36xk}{D} = \frac{10{,}36x0{,}6265}{0{,}005}$$

$\boldsymbol{h}$ **= 1298,8 W/m²K**

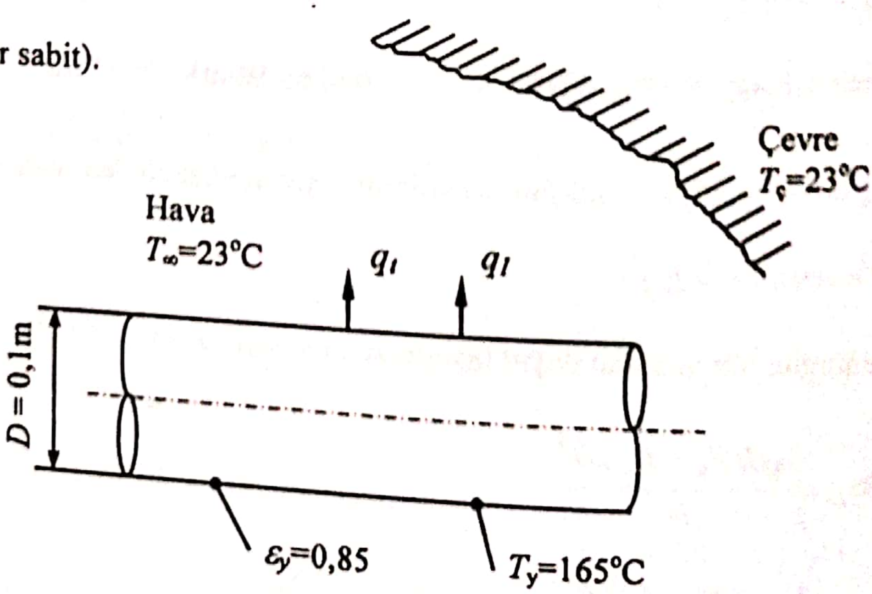
bulunur. Bulunanlar ısı geçişi bağıntısında yerine konulursa doğal taşınımla geçen ısı miktarı;

Q = 1298,8xπx0,005x2 (56 - 18)

$\boldsymbol{Q}$ **= 1550,5 W**

5.3 Dış çapı 0,1 m ve yüzey sıcaklığı 165°C olan bir boru, duvarlarının ve havasının sıcaklığı 23°C olan geniş bir oda içerisinde yatay olarak durmaktadır. Borunun yayma katsayısı 0,85'dir. Borunun birim uzunluğundan olan ısı kaybını hesaplayınız.

Çözüm :
Kabuller:
1. Devamlı hal (sıcaklıklar sabit).
2. Özellikler sabit.
3. Uç kısımlar ihmal



$T_f = \frac{T_y + T_\infty}{2} = \frac{165+23}{2} + 273 = 367$ K deki hava için Ek4'den; $\gamma = 22{,}8x10^{-6}$ m^2/s,

$\alpha = 32{,}8x10^{-6}$ m^2/s, Pr = 0,697, $k = 0{,}0313$ W/mK dir. $\sigma = 5{,}67x10^{-8}$ W/m^2K^4.

Boru yüzeyinden çevreye hem taşınımla (q_t), hem de ışınımla (q_I) ısı geçişi olmaktadır. Borunun 1 m uzunluğundan toplam ısı kaybı,

$$q_{top} = q_t + q_I$$

olur. Burada,

$$q_t = h\pi D(T_y - T_\infty)$$

$$q_I = \varepsilon_y \pi D \sigma (T_y^4 - T_ç^4)$$

şeklindedir. q_I bağıntısı, çevre yanında borunun çok küçük olması halinde geçerlidir.

$$(GrPr) = Ra_D = \frac{g\beta(T_y - T_\infty)D^3}{\gamma\alpha}$$

$$Ra_D = \frac{9{,}8\frac{1}{367}(165-23)0{,}1^3}{22{,}8x10^{-6}\,x32{,}8x10^{-6}} = 5{,}073x10^6$$

$10^5 < Ra_D < 10^{12}$ aralığında olduğundan yatay borudaki doğal ısı taşınımı için denk.(5.22)' den,

$$Nu_D = \left\{0{,}60 + \frac{0{,}387\,Ra_D^{1/6}}{\left[1+(0{,}559/Pr)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2 = \left\{0{,}60 + \frac{0{,}387(5{,}073x10^6)^{1/6}}{\left[1+(0{,}559/0{,}697)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2 = 23{,}3$$

$$\frac{hD}{k} = 23{,}3 \Rightarrow h = \frac{k\,x23{,}3}{D} = \frac{0{,}0313\,x23{,}3}{0{,}1}$$

$$\mathbf{h = 7{,}29\ W/m^2K}$$

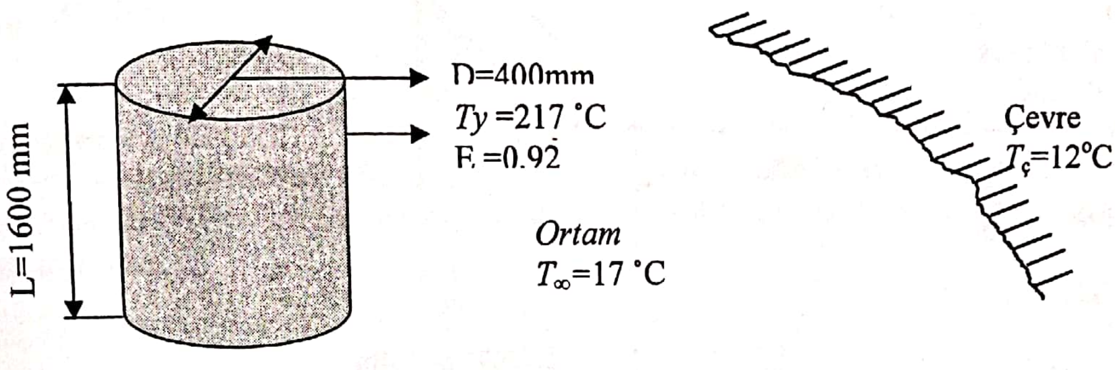
bulunur. Taşınım ve ışınımla geçen toplam ısı miktarı,

$$q_{top} = 7{,}29\pi\,x0{,}1(165-23) + 0{,}85\pi\,x0{,}1x5{,}67x10^{-8}(438^4 - 296^4)$$

$$\mathbf{q_{top} = 766\ W/m}$$

olur.

5.6 Dış çapı 400 mm, yüksekliği 1600 mm olan düşey duran silindirik saçtan yapılan soba ile atölye ısıtılmak istenmektedir. Sobanın yüzey sıcaklığı 217 °C ve ışınım yayma katsayısı 0,92, atölye yüzeylerinin sıcaklığı 12 °C ve atölyenin ortam sıcaklığı 17 °C 'dir. Sobanın yanında atölye yüzey alanı çok büyüktür. Sobanın yan yüzeylerinden atölyeye taşınım ve ışınımla olan ısı geçişini hesaplayınız.



$T_f = \dfrac{217+17}{2} = 117\,°C = 390\,K$ için havanın özellikleri: k= 0,030 W/mK, μ= 22x10^{-6} Ns/m^2, υ= 24x10^{-6} m^2/s , ρ=0,92 kg/m^3, c_p= 1000 J/kgK , g= 9,81m/s^2

Atölye ortamının havası durgun olduğundan ısı taşınım türü doğal taşınımdır.

$$\Pr = \frac{\gamma}{a} = \frac{\mu/\rho}{k/\rho c_p} = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{22\times10^{-6}\times1000}{0,030} = 0,73 \quad ; \quad \beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{390} = 0,00256\,K^{-1}$$

$$Gr = \frac{g\beta(Ty - T\infty)L^3}{\nu^2} = \frac{9,81\times0,00256(217-17)\times1,6^3}{(24\times10^{-6})^2} = 3,57\times10^{10}$$

Akış türbülanslı akıştır denk. 5.13b kullanılabilir.

$$Nu = 0,59(Gr\cdot\Pr)^{0,25} = 0,59.(3,57\cdot10^{10}\cdot0,73)^{0,25} = 236,9$$

$$\frac{hL}{k} = 236,9 \;\rightarrow\; h = \frac{k\cdot236,9}{L} = \frac{0,030\cdot236,9}{1,6}$$

h = 4,44 W/m^{2}K

$$Q_t = h\cdot A(T_y - T_\infty) = h\cdot\pi\cdot D\cdot L(T_y - T_\infty) = 4,44\cdot\pi\cdot0,4\cdot1,6\cdot(217-17)$$

Q_t = 1784,5 W

Işınım ile geçen ısı miktarı:

$$Q_I = \sigma\cdot\varepsilon\cdot A(T_y{}^4 - T_ç{}^4) = 5,67\cdot10^{-8}\cdot0,92\cdot\pi\cdot0,4\cdot1,6(490^4 - 285^4)$$

Q_I = 5351,5 W

Sobadan atölyeye olan toplam ısı geçişi:

Q_{top}= Q_t + Q_I= 1784,5 + 5351,5 = **7136 W**

Bir metre borudan olan toplam ısı kaybı;

$$Q_{top} = Q_{taş} + Q_{ısı}$$

$$Q_{top} = hA(T_y - T_ç) + \sigma\varepsilon A({T_y}^4 - {T_ç}^4)$$

$$A = \pi DL = \pi \cdot 0{,}15 \cdot 1$$

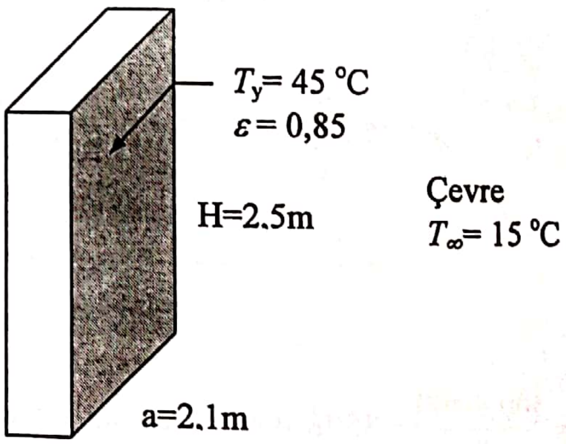
$$Q_{top} = 6{,}38 \cdot \pi \cdot 0{,}15.(400 - 300) + 5{,}67.10^{-8} \cdot 0{,}85 \cdot \pi \cdot 0{,}15.(400^4 - 300^4)$$

$$Q_{top} = 301 + 397$$

Q_{top}**= 698 W**

5.9 2,1 m genişliğinde ve 2,5 m yüksekliğinde 45°C sıcaklığındaki bir duvar, 15°C sıcaklığında durgun atmosfer havası ile temas halindedir. Isı taşınım katsayısını ve doğal ısı geçişini hesaplayınız. Çevre sıcaklığının 15°C ve duvarın ışınım yayma katsayısının 0,85 olması halinde duvardan çevreye geçen toplam ısı miktarı ne olur?

Çözüm:



$$T_f = \frac{T_y + T_\infty}{2} = \frac{45 + 15}{2} = 30°C = 303K$$

$$\beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{303} = 0{,}0033K^{-1}$$

T_f=303 K'deki hava için; ; k=0,0265 W/mK , ν= 15,99.10^{-6} m^2/s, Pr=0,7 ρ=1,161 kg/m^3

$$Gr = \frac{g.\beta(T_y - T_\infty)H^3}{\nu^2} = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}0033 \cdot (45 - 15) \cdot 2{,}5^3}{(15{,}99 \cdot 10^{-6})^2} = 5{,}9 \cdot 10^{10}$$

Gr > 10^9 olduğundan akış türbülanslıdır. Aşağıdaki bağıntı kullanılabilir.

$$Nu = 0{,}13.(Gr.Pr)^{1/3} = 0{,}13(5{,}9.10^{10}.0{,}7)^{1/3} = 449{,}3$$

$$Nu = \frac{h.H}{k} \rightarrow h = \frac{k.Nu}{H} = \frac{0{,}0265 \cdot 449{,}3}{2{,}5}$$

h **= 4,7 W/m²K**

Taşınımla olan ısı geçişi;

$$Q_{taş} = h.A(T_y - T_\infty) = 4{,}7.2{,}1.2{,}5.(45-15)$$

$$\mathbf{Q_{taş} = 740{,}2\ W}$$

Işınımla olan ısı geçişi;

$$Q_{ışı} = \sigma.A.\varepsilon.(T_y^4 - T_\infty^4) = 5{,}67.10^{-8}.2{,}1.2{,}5.0{,}85(318^4 - 288^4)$$

$$\mathbf{Q_{ışı} = 847\ W}$$

Toplam ısı geçişi;

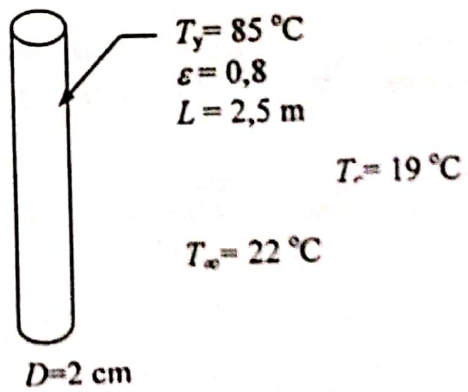
$$Q_{top} = Q_{taş} + Q_{ışı}$$

$$Q_{top} = 740{,}2 + 847 = 1587{,}2\ W$$

$Q_{ışı} > Q_{taş}$ dır.Işınım ile geçen ısı miktarı taşınımla geçen ısı miktarından büyük çıkmıştır. Sıcaklık farkının yüksek olduğu durumlarda ışınım ile olan ısı geçişi ihmal edilmemelidir.

5.10 Bir oda içinden 2 cm dış çapında düşey olarak kalorifer borusu geçmektedir. Borunun dış yüzey sıcaklığı 85°C ve ışınım yayma katsayısı 0,8 dir. Oda sıcaklığı 22°C ve duvarların sıcaklığı 19°C olduğuna göre borudan olan toplam ısı kaybını hesaplayınız. Oda yüksekliği 2,5 m'dir.

Çözüm:



$$T_f = \frac{T_y + T_\infty}{2} = \frac{85+22}{2} = 53{,}5°C = 326{,}5K$$

$$\beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{326{,}5} = 0{,}003K^{-1}$$

T_f=326,5 K'deki hava için; ; k=0,0282 W/mK , γ= 18,4.10^{-6} m²/s, Pr=0,7

Düşey boru düşey levha gibi hesaplanır. Karakteristik uzunluk düşey borunun yüksekliğidir.

$$Gr = \frac{g.\beta.(T_y - T_\infty).L^3}{\gamma^2} = \frac{9{,}81\cdot 0{,}003\cdot(85-22)\cdot 2{,}5^3}{(18{,}4\cdot 10^{-6})^2} = 1{,}57\cdot 10^{12}$$

$$\mathrm{Re} = Gr.\mathrm{Pr} = 1{,}57.10^{12}.0{,}7 = 1{,}1.10^{12}$$

$$Nu = 0{,}1.(Re)^{1/3} = 0{,}1(1{,}1.10^{12})^{1/3} = 1022{,}7$$

$$Nu = \frac{h.L}{k} \rightarrow h = \frac{k.Nu}{L} = \frac{0,0282 \cdot 1022,7}{2,5}$$

$$h = 11,5\ W / m^2 K$$

$$Q_{taş} = h.\pi.D.L.(T_y - T_\infty) = 11,5.\pi.0,02.2,5.(85 - 22) = 113,7\ W$$

$$Q_{ışı} = \sigma.\pi.D.L.\varepsilon.(T_y{}^4 - T_\infty{}^4) = 5,67.10^{-8}.0,02.2,5.0,8.(358^4 - 295^4) = 63\ W$$

$$Q_{top} = 113,7 + 63 = 176,7\,W$$

Kalorifer borusunun iç çapı 1.5cm ve su hızı 0,3 m/s olması halinde, su sıcaklığındaki azalma miktarı hesaplanmak istenirse; ρ_{su}=987 kg/m3 , c_p=4182 j/kgK

$$m_{su} = V \cdot \rho \cdot A = V \cdot \rho \frac{\pi D^2}{4} = 0,3 \cdot 987 \frac{\pi 0,015^2}{4} = 0,052\ kg / s$$

$$Q = m \cdot c_p \cdot \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{Q}{m.c_p} = \frac{176,7}{0,052.4182} = 0,81°C$$