

* $f(x,y) = 8x^3 + y^3 - 12xy + 8$ ekstremumlarını araştırın.

$f_x = 24x^2 - 12y = 0$ ①

①'den $y = 2x^2$ bulunur.

$f_y = 3y^2 - 12x = 0$ ②

↓ ② de yerelim

$3 \cdot 4x^4 - 12x = 0$

$12x(x^3 - 1) = 0 \rightarrow x = 0$
 $\rightarrow x = 1$

$x = 0 \xrightarrow{①} y = 0 \rightarrow \text{K.N. } (0,0)$

$x = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow (1,2)$

$A = f_{xx} = 48x$ $B = f_{xy} = -12$ $C = f_{yy} = 6y$

	$A = 48x$	$B = -12$	$C = 6y$	$B^2 - AC$
$(0,0)$	0	-12	0	$(-12)^2 - 0 > 0 \Rightarrow (0,0)$ Eyer N.
$(1,2)$	48	-12	12	$(-12)^2 - 12 \cdot 48 < 0$ $A = 48 > 0$ } $(1,2)$ yerel min. nokte

* $f(x,y) = 2y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 12xy$ max/min?

$f_x = 6x - 12y = 0$ ①

①'den $x = 2y$

$f_y = 6y^2 - 6y - 12x = 0$ ②

↓ ②

$6y^2 - 6y - 24y = 0$

$6y^2 - 30y = 0 \rightarrow y = 0$
 $\rightarrow y = 5$

$y = 0 \xrightarrow{①} x = 0 \rightarrow \text{K.N. } (0,0)$

$y = 5 \xrightarrow{①} x = 10 \rightarrow (10,5)$

$A = f_{xx} = 6$ $B = f_{xy} = -12$ $C = f_{yy} = 12y - 6$

	$A = 6$	$B = -12$	$C = 12y - 6$	$B^2 - AC$
$(0,0)$	6	-12	-6	$(-12)^2 - (-6) \cdot 6 > 0 \Rightarrow (0,0)$ Eyer N.
$(10,5)$	6	-12	54	$(-12)^2 - 54 \cdot 6 < 0$ $A = 6 > 0$ } $(10,5)$ yerel min. noktası

* $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$ ekstremum noktaları?

$$\begin{cases} f_x = y - 2x - 2 = 0 \\ f_y = x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = 2 \\ -2y + x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = y = -2 \Rightarrow (-2, -2) \rightarrow \text{kritik nokta}$$

$$A = f_{xx} = -2 \quad B = f_{xy} = 1 \quad C = f_{yy} = -2 \Rightarrow \begin{aligned} B^2 - AC &= 1 - 4 = -3 < 0 \\ A &= -2 < 0 \end{aligned} \Rightarrow (-2, -2) \text{ yerel max nokta}$$

* $f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınıflandırın.

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0 \quad (1)$$

$$f_y = 3y^2 - 3x = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x=0 &\xrightarrow{(1)} y=0 \rightarrow (0,0) \\ x=1 &\xrightarrow{(2)} y=1 \rightarrow (1,1) \end{aligned} \quad \text{K.N}$$

$$(1) \text{ den } 3x^2 - 3y = 0 \rightarrow y = x^2$$

$$\downarrow (2) \text{ 'de yazalım}$$

$$3x^4 - 3x = 0$$

$$3x(x^3 - 1) = 0 \rightarrow \boxed{x=0} \rightarrow \boxed{x=1}$$

$$A = f_{xx} = 6x \quad B = f_{xy} = -3 \quad C = f_{yy} = 6y$$

	$A = 6x$	$B = -3$	$C = 6y$	$B^2 - AC$
$(0,0)$	0	-3	0	$9 > 0 \rightarrow (0,0) \text{ Eyer N.}$
$(1,1)$	6	-3	6	$(-3)^2 - 6 \cdot 6 < 0$ $A = 6 > 0 \Rightarrow (1,1) \text{ yerel minimum nokta}$

* $f(x,y) = x^3 - 3x + 2y^2 + 2$ max/min?

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ f_y = 4y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases} \quad \text{K.N} \Rightarrow \begin{aligned} (1,0) \\ (-1,0) \end{aligned}$$

$$A = f_{xx} = 6x \quad B = f_{xy} = 0 \quad C = f_{yy} = 4$$

	$A = 6x$	$B = 0$	$C = 4$	$B^2 - AC$
$(1,0)$	6	0	4	$0 - 6 \cdot 4 < 0, A = 6 > 0 \Rightarrow (1,0) \text{ min nokta}$
$(-1,0)$	-6	0	4	$0 - 4 \cdot (-6) > 0 \rightarrow (-1,0) \text{ Eyer Noktası}$

Soru 3-a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$ elipsoidinin $\vec{r}(t) = t^{-1}\vec{i} + t\vec{j} + (3-t)\vec{k}$ eğrisine $P(1,1,2)$ noktasında paralel olup-olmadığını araştırınız. (13 P)

Yüzeyin normali, $F = x^2 + 2y^2 + z^2 - 7$ ile

$$\nabla F = \langle 2x, 4y, 2z \rangle \Big|_{(1,1,2)} = \langle 2, 4, 4 \rangle$$

Eğrinin ~~teğet~~ vektörü $\vec{r}'(t) = \langle -\frac{1}{t^2}, 1, -1 \rangle$ ve

$$t=1 \text{ ile } \vec{r}'(1) = \langle -1, 1, -1 \rangle$$

$$\nabla F \cdot \vec{r}'(1) = \langle 2, 4, 4 \rangle \cdot \langle -1, 1, -1 \rangle = -2 \neq 0 \text{ old. den}$$

yüzey, eğriye paralel değildir.

Soru 3-b) $x^2 + y^2 + z^2 = 4y + 2z + 5$ küresi ile $3x^2 + 2y^2 - 2z = 3$ paraboloidi $P(1,2,4)$ noktasında kesişmektedir. Bu noktadaki açığı bulunuz. (12 P)

$$\left. \begin{aligned} F(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z - 5 \\ G(x,y,z) &= 3x^2 + 2y^2 - 2z - 3 \end{aligned} \right\}$$

$$\nabla F = \langle 2x, 2y-4, 2z-2 \rangle \Big|_P = \langle 2, 0, 6 \rangle$$

$$\nabla G = \langle 6x, 4y, -2 \rangle \Big|_P = \langle 6, 8, -2 \rangle$$

$$\cos \theta = \frac{\nabla F \cdot \nabla G}{|\nabla F| |\nabla G|} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} //$$

* $g\left(\frac{x}{z}\right) = yz$ ise $x \cdot z_x - y \cdot z_y = z$ olduğunu gösterin.

F: $g\left(\frac{x}{z}\right) - yz = 0 \rightarrow$ Kapalı Fonk.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{f_x}{f_z} = - \frac{\frac{1}{z} \cdot g'\left(\frac{x}{z}\right)}{-\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) - y} = \frac{z \cdot g'\left(\frac{x}{z}\right)}{x g'\left(\frac{x}{z}\right) + y z^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{f_y}{f_z} = - \frac{-z}{-\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) - y} = - \frac{z^3}{x g'\left(\frac{x}{z}\right) + y z^2}$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x z g'\left(\frac{x}{z}\right)}{x g'\left(\frac{x}{z}\right) + y z^2} + \frac{y z^3}{x g'\left(\frac{x}{z}\right) + y z^2} = \frac{z (x g'\left(\frac{x}{z}\right) + y z^2)}{x g'\left(\frac{x}{z}\right) + y z^2} = z \quad \checkmark$$

* $\frac{(2,05)^2}{(0,95)^2}$ sayısını a) lineerleştirme ile b) diferansiyel hesap ile } yaklaşıklık olarak hesaplayın.

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y^2} \quad x_0 = 2 \quad y_0 = 1 \text{ olsun.}$$

$$a) L(x,y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$f_x = \frac{2x}{y^2} \quad f_x(2,1) = 4 \quad f_y = -\frac{2x^2}{y^3} \quad f_y(2,1) = -8 \quad f(2,1) = 4$$

$$L(x,y) = 4 + 4(x - x_0) - 8(y - y_0) \approx f(x,y) \Rightarrow f(2,05, 0,95) \approx L(2,05, 0,95) \\ = 4 + 4(2,05 - 2) - 8(0,95 - 1) \\ = 4 + 4 \cdot 0,05 - 8 \cdot (-0,05) = 4,6$$

$$b) dz = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy \quad x_0 = 2 \quad y_0 = 1 \\ f_x(2,1) = 4 \quad f_y(2,1) = -8 \quad x = 2,05 \quad y = 0,95$$

$$dx \approx \frac{x - x_0}{\Delta x} = 2,05 - 2 = 0,05 \quad dy \approx \Delta y = y - y_0 = 0,95 - 1 = -0,05$$

$$dz \approx \Delta z = f(2,05, 0,95) - f(2,1) = \frac{(2,05)^2}{(0,95)^2} - 4$$

bulduğlarımızı yerine koyalım:

$$\frac{(2,05)^2}{(0,95)^2} - 4 \approx 4 \cdot 0,05 - 8 \cdot (-0,05) \Rightarrow \frac{(2,05)^2}{(0,95)^2} \approx 4 + 0,2 + 0,4 = 4,6$$

* $w = x^2y^2 + yz - z^3$ ve $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ ise $(w, x, y, z) = (4, 2, 1, -1)$ noktasında a) $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y = ?$ b) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y = ?$

a) $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y \Rightarrow$ x, y : bağımsız değişken
 w, z : bağımlı, "

$$w = x^2y^2 + yz - z^3 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 2xy^2 + y \frac{\partial z}{\partial x} - 3z^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$f: x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy^2 + y \cdot \left(-\frac{x}{z}\right) + 3z^2 \cdot \left(-\frac{x}{z}\right) \Rightarrow \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(4,2,1,-1)} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1 \cdot 2}{-1} + 3 \cdot (-1) \cdot 2 = \underline{\underline{0}}$$

b) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y \Rightarrow$ z, y : bağımsız
 w, x : bağımlı,

$$w = x^2y^2 + yz - z^3 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 2xy^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + y - 3z^2$$

$$f: x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{f_z}{f_x} = -\frac{2z}{2x} = -\frac{z}{x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -2y^2 + y - 3z^2 \Rightarrow \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{(4,2,1,-1)} = -2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 - 3 = \underline{\underline{0}}$$

3.a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} - 1}{\sin^2 x}$ limitini fonksiyonların kuvvet seri temsillerinden faydalanarak hesaplayınız (L'Hopital kullanmayınız).

$$1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots \quad (2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow e^{1-\cos x} = 1 + (1 - \cos x) + \frac{(1 - \cos x)^2}{2!} + \dots \quad (2)$$

$$e^{1-\cos x} = 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots\right)^2 + \dots \quad (2)$$

$$e^{1-\cos x} - 1 = \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots\right)^2 + \dots$$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)^2 = x^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots\right)^2 \quad (2)$$

$$e^{1-\cos x} = x^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} + \dots\right) + \left(\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} + \dots\right)^2 + \dots\right] \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} + \dots\right) + \left(\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} + \dots\right)^2 + \dots\right]}{x^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots\right)^2} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

b) g türevlenebilir bir fonksiyon ve $g(0)=2$ olmak üzere, $z = xy \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)$ yüzeyine $P(1,0,0)$ noktasında teğet olan düzlem denklemini bulunuz.

$$0 = xy \cdot g\left(\frac{y}{x}\right) - z$$

$$f(x,y) = xy \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f_x|_P \cdot (x - x_0) + f_y|_P \cdot (y - y_0) - (z - z_0) = 0 \quad (2)$$

$$f_x = y \cdot g\left(\frac{y}{x}\right) + xy \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = y \cdot g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x} \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2)$$

$$f_y = x \cdot g\left(\frac{y}{x}\right) + xy \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = x \cdot g\left(\frac{y}{x}\right) + y \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2)$$

$$f_x|_P = 0 \cdot g(0) - 0 \cdot g'(0) = 0 \quad (1)$$

$$f_y|_P = 1 \cdot g(0) + 0 \cdot g'(0) = 1 \cdot g(0) = 1 \cdot 2 = 2 \quad (1)$$

$$0 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 0) - (z - 0) = 0$$

$$\boxed{2y = z} \quad (2)$$

$$\nabla f = \nabla$$

* $f(x,y,z) = x e^{yz}$ fonksiyonunun. $C: \begin{cases} x=t^2 \\ y=t+1 \\ z=2t \end{cases}$ eğrisinin

(4,3,4) noktasındaki teğeti boyunca (4,3,4) noktasındaki türevini hesaplayınız.

$$\nabla f = e^{yz} \vec{i} + xze^{yz} \vec{j} + xye^{yz} \vec{k} \quad \nabla f|_{(4,3,4)} = \langle e^{12}, 16e^{12}, 12e^{12} \rangle$$

C eğrisi: $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + (t+1) \vec{j} + 2t \vec{k}$

↓ Teğeti

$$\vec{r}'(t) = 2t \vec{i} + \vec{j} + 2 \vec{k}$$

(4,3,4) noktası için $t=2$ olur.

$$\vec{r}'(2) = \langle 4, 1, 2 \rangle$$

$$|\vec{r}'(2)| = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}'(2)}{|\vec{r}'(2)|} = \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \right\rangle$$

$$(D_u f)|_{(4,3,4)} = \nabla f|_{(4,3,4)} \cdot \vec{u} = \langle e^{12}, 16e^{12}, 12e^{12} \rangle \cdot \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \right\rangle = \frac{44}{\sqrt{21}} e^{12}$$

* $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$ yüzeyinin (1,1,2) noktasındaki teğet düzlemi ve normal doğrusu?

$$F: x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4 = 0$$

$$\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k} = \langle 3x^2 - 3yz, 3y^2 - 3xz, 3z^2 - 3xy \rangle$$

$$\nabla f|_{(1,1,2)} = \langle -3, -3, 9 \rangle \rightarrow \text{Teğet düzleme normal}$$

$$\frac{a}{-3} = \frac{b}{-3} = \frac{c}{9} \rightarrow \text{Normal doğruya paralel}$$

$$(1,1,2) \\ x_0 y_0 z_0$$



Teğet Düzlem

$$-3(x-1) - 3(y-1) + 9(z-2) = 0$$

Normal Doğru

$$x = 1 - 3t$$

$$y = 1 - 3t$$

$$z = 2 + 9t$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + u^2 - v^3 + 3 = 0 \\ xy + y^2 - u^3 + 2v^2 - 9 = 0 \end{cases} \quad a) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_y = ? \quad b) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_x = ?$$

$(1, 2, -1, 1)$
 x, y, u, v

a) $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_y \Rightarrow u, v \rightarrow \text{bağımlı}$
 $x, y \rightarrow \text{bağımsız}$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + u^2 - v^3 + 3 = 0 & \xrightarrow{x' \text{ göre türev}} 2x + 2u \cdot u_x - 3v^2 v_x = 0 \xrightarrow{(1, 2, -1, 1)} \boxed{2u_x + 3v_x = 2} \\ xy + y^2 - u^3 + 2v^2 - 9 = 0 & \xrightarrow{x' \text{ göre türev}} y - 3u^2 \cdot u_x + 4v v_x = 0 \xrightarrow{(1, 2, -1, 1)} \boxed{2 = 3u_x - 4v_x} \end{aligned}$$

$$+ 4 / 2u_x + 3v_x = 2$$

$$+ 3 / 3u_x - 4v_x = 2$$

$$+ \quad \underline{\quad} \quad 17u_x = 14 \quad \rightarrow \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \underline{\underline{\frac{14}{17}}}$$

b) $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_x \rightarrow u, v \rightarrow \text{bağımlı d.}$
 $x, y \rightarrow \text{bağımsız d.}$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + u^2 - v^3 + 3 = 0 & \xrightarrow{y' \text{ göre türev}} -2y + 2u \cdot u_y - 3v^2 v_y = 0 \xrightarrow{(1, 2, -1, 1)} \boxed{4 = -2u_y - 3v_y} \\ xy + y^2 - u^3 + 2v^2 - 9 = 0 & \xrightarrow{y' \text{ göre türev}} x + 2y - 3u^2 u_y + 4v v_y = 0 \xrightarrow{(1, 2, -1, 1)} \boxed{-5 = -3u_y + 4v_y} \end{aligned}$$

$$4 / -2u_y - 3v_y = 4$$

$$3 / -3u_y + 4v_y = -5$$

$$+ \quad \underline{\quad} \quad -17u_y = 1 \quad \rightarrow \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \underline{\underline{-\frac{1}{17}}}$$

* Eğer f ve g iki kez türevlenebilir tek değişkenli fonksiyonlar ise $w = f(x-ct) + g(x+ct)$ için $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ olduğunu gösterin.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -c f'(x-ct) + c g'(x+ct) \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f'(x-ct) + g'(x+ct) \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f''(x-ct) + g''(x+ct) \quad \downarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

* $z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$ yüzeyine teğet olan yatay düzlem hangisidir? Teğet noktasını bulunuz.

Bir düzlem eğer denklemi $z = k$ formunda ise yataydır. Bu ise denklemin x ve y den bağımsız olduğunu yani $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ olduğunu gösterin.

$$F: z - x^2 + 4xy + 2y^2 - 12x + 12y + 1 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} F_x = -2x + 4y - 12 = 0 \\ F_y = 4x + 4y + 12 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -4 \\ y = 1 \end{array} \Rightarrow z = -31 \text{ bulunur.}$$

Aranan düzlem $z = -31$, nokta ise $(-4, 1, -31)$ noktasıdır.

* $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$ fonksiyonu verilsin. $f(2.2, -0.2)$ için yaklaşık bir değer bulunuz.

$(2, 0)$ noktasında lineerleştirme yapalım. $x_0 = 2$ $y_0 = 0$

$$f(2, 0) = 3$$

$$F_x = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + e^{2y}}}$$

$$F_x(2, 0) = \frac{4}{3}$$

$$F_y = \frac{e^{2y}}{2\sqrt{2x^2 + e^{2y}}}$$

$$F_y(2, 0) = \frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} L(x, y) = 3 + \frac{4}{3}(x-2) + \frac{1}{3}(y-0) \\ F(x, y) \approx L(x, y) \Rightarrow f(2.2, -0.2) \approx L(2.2, -0.2) \end{array} \right\}$$

$$L(2.2, -0.2) = 3 + \frac{4}{3} \cdot (2.2 - 2) + \frac{1}{3} \cdot (-0.2) = 3.2$$

* $z = \arctan(x^2 - xy)$ yüzeyinin $(0, -1)$ deki teğet düzlemini bulunuz.

$$x=0, y=-1 \Rightarrow z = \arctan 0 = 0 \Rightarrow \text{Nokta } (0, -1, 0)$$

$$\nabla f|_{(0, -1, 0)} \rightarrow \text{Teğet düzleme dik vektör } (f: \arctan(x^2 - xy) - z = 0)$$

$$f_x|_{(0, -1, 0)} = \frac{2x - y}{1 + (x^2 - xy)^2} \Big|_{(0, -1, 0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f_y|_{(0, -1, 0)} = \frac{-x}{1 + (x^2 - xy)^2} \Big|_{(0, -1, 0)} = 0 \quad f_z|_{(0, -1, 0)} = -1$$

$$\nabla f|_{(0, -1, 0)} = \vec{i} - \vec{k}$$

$$\text{Teğet Düzlem: } 1(x-0) + 0(y+1) - 1(z-0) = 0 \Rightarrow \boxed{x = z}$$

* $z = \sin(x+y^2)$ nin $(\pi, 0)$ deki teğet düzlemi? Normal doğrusu?

$$x=\pi, y=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow \text{Nokta: } (\pi, 0, 0)$$

$$f: \sin(x+y^2) - z = 0 \Rightarrow \nabla f|_{(\pi, 0, 0)} \rightarrow \text{Düzlemin normali}$$

$$\nabla f|_{(\pi, 0, 0)} = \cos(x+y^2) \Big|_{(\pi, 0, 0)} \vec{i} + 2y \cos(x+y^2) \Big|_{(\pi, 0, 0)} - \vec{k} = -\vec{i} - \vec{k}$$

$$\text{T. Düzlem: } -1 \cdot (x - \pi) + 0 \cdot (y - 0) - 1 \cdot (z - 0) = 0$$

$$-x + \pi - z = 0 \Rightarrow \boxed{x + z = \pi}$$

$$\nabla f|_{(\pi, 0, 0)} \rightarrow \text{Doğruya paralel vektör}$$

$$\text{N. Doğru: } \begin{cases} x = \pi - t \\ y = 0 + 0t = 0 \\ z = 0 - t = -t \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} x = \pi - t, y = 0, z = -t \end{array} \right\}$$

* $f(x,y) = x + y \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) fonksiyonunun ekstremumlarını inceleyin.

$$f_x = 1 + y \cos x = 0 \quad (1)$$

$$f_y = \sin x = 0 \quad (2) \rightarrow \begin{array}{cc} x=0 & x=\pi \\ \downarrow (1) & \downarrow (1) \\ \boxed{y=-1} & \boxed{y=1} \\ \downarrow & \downarrow \\ (0,-1) & (\pi,1) \rightarrow \text{Kritik noktalar} \end{array}$$

$$A = f_{xx} = -y \sin x \quad B = f_{xy} = \cos x \quad C = f_{yy} = 0$$

	$A = -y \sin x$	$B = \cos x$	$C = 0$	$B^2 - AC$
$(0,-1)$	0	1	0	$1^2 - 0 = 1 > 0 \rightarrow (0,-1) \in \text{yer N.}$
$(\pi,1)$	0	-1	0	$(-1)^2 - 0 = 1 > 0 \rightarrow (\pi,1) \in \text{yer N.}$

* $x = u^2 + v^2$, $y = u \cdot v$ ise $(u,v) = (\sqrt{2}, 1)$ noktasında

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_x = ?$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_x \Rightarrow \begin{array}{l} x, y \rightarrow \text{bağımsız değişken} \\ u, v \rightarrow \text{bağımlı değişken} \end{array}$$

$$x = u^2 + v^2 \quad \begin{array}{l} \text{y'ye göre} \\ \text{türev} \end{array}$$

$$y = uv \quad \begin{array}{l} \text{y'ye göre} \\ \text{türev} \end{array}$$

$$\begin{cases} 0 = 2u \cdot u_y + 2v \cdot v_y \\ 1 = v \cdot u_y + u \cdot v_y \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{2} \\ v = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2\sqrt{2} u_y + 2v_y \\ 1 = u_y + \sqrt{2} v_y \end{cases}$$

$$-\sqrt{2}/2\sqrt{2} u_y + 2v_y = 0$$

$$+ \frac{2}{1} u_y + \sqrt{2} v_y = 1$$

$$-2u_y = 2 \rightarrow u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \underline{\underline{-1}}$$

* $x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2 = 0$ yüzeyi ile $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ yüzeyinin kesişiminden oluşan eğriye $P(1,1,3)$ noktasında teğet olan doğrunun parametrik denklemi?

Teğet doğru P 'de hem 1. yüzeyin hem de 2. yüzeyin gradyanına diktir.

$$F: x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2 = 0 \Rightarrow \nabla F = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$F_x = 3x^2 + 6xy^2 + 4y \quad F_x|_P = 13$$

$$F_y = 6x^2y + 3y^2 + 4x \quad F_y|_P = 13$$

$$F_z = -2z$$

$$F_z|_P = -6$$

$$\nabla F|_P = \langle 13, 13, -6 \rangle$$

$$G: x^2 + y^2 + z^2 - 11 = 0$$

$$\nabla G = G_x \vec{i} + G_y \vec{j} + G_z \vec{k}$$

$$G_x = 2x \quad G_y = 2y \quad G_z = 2z$$

$$G_x|_P = 2 \quad G_y|_P = 2 \quad G_z|_P = 6$$

$$\nabla G|_P = \langle 2, 2, 6 \rangle$$

$$\vec{v} = \nabla G|_P \times \nabla F|_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 6 \\ 13 & 13 & -6 \end{vmatrix} = 90\vec{i} - 90\vec{j} = \langle 90, -90, 0 \rangle \rightarrow \text{Doğrunun yön vektörü}$$

x_0, y_0, z_0
 $P(1,1,3)$

$$x = x_0 + at = 1 + 90t$$

$$y = y_0 + bt = 1 - 90t$$

$$z = z_0 + ct = 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 90t \\ y = 1 - 90t \\ z = 3 \end{array} \right\} \text{ teğet doğru}$$



Adı Soyadı	Öğrenci No	Grup No	1.S	2.S	3.S	4.S	TOPLAM
Bölümü			Sınav Tarihi		30/05/2016		
Dersin Adı	MAT1072 MATEMATİK 2		Süre	100dk	Derslik		
Öğretim Üyesinin Adı Soyadı				İmza			

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

1-a) $\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n \right\}$ dizisinin limitini bulunuz. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini belirleyiniz. (12 Puan)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{n+2} \right]^{\frac{n}{n+2}} = e^{-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-1} \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serisi} \text{ ıraksak bir seridir.}$$

1-b) f fonksiyonu, tek değişkenli ve türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, $z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$ yüzeyi üzerinde herhangi bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasında, yüzeye teğet olan düzlemin orijinden geçtiğini gösteriniz. (13 Puan)

$$F = x f\left(\frac{y}{x}\right) - z$$

$$F_x = 1 \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot x, \quad F_x(P_0) = f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \left(\frac{y_0}{x_0}\right) f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

$$F_y = x \cdot \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right), \quad F_y(P_0) = f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

$$F_z = -1$$

Teğet Düzlem

$$\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \left(\frac{y_0}{x_0}\right) f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \right) (x - x_0) + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) (y - y_0) - (z - x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)) = 0$$

(0,0,0) da sağlamalıdır.

$$-\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \left(\frac{y_0}{x_0}\right) f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \right) x_0 + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) (-y_0) + (-x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)) = 0$$

$$-f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \cdot x_0 + \left(\frac{y_0}{x_0}\right) f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) x_0 - f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) y_0 - x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = 0 //$$

3- a) $\sin[\pi(0.01)(1.05) + \ln(1.05)]$ nin yaklaşık değerini toplam diferansiyel veya lineer yaklaşım kullanarak hesaplayınız. (12 Puan)

$$f(x,y) = \sin(\pi xy + \ln y) \quad f(0,1) = 0 \quad h = \Delta x = 0.01 \\ k = \Delta y = 0.05$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \pi y \cos(\pi xy + \ln y), \quad \frac{\partial f(0,1)}{\partial x} = \pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\pi x + \frac{1}{y}\right) \cos(\pi xy + \ln y) \quad \frac{\partial f(0,1)}{\partial y} = 1$$

$$f(0,01; 1,05) \approx 0 + 0,01 \cdot \pi + 0,05 \cdot 1 \approx 0,081416$$

3-b) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız. (13 Puan)
bulunuz. (13 Puan)

$$\begin{aligned} f_x = y - \frac{1}{x^2} = 0 &\Rightarrow y = \frac{1}{x^2} \\ f_y = x - \frac{8}{y^2} = 0 &\Rightarrow x = \frac{8}{y^2} \end{aligned} \Rightarrow x = \frac{8}{(\frac{1}{x^2})^2} \Rightarrow x - 8x^4 = 0 \\ x=0 \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{Kritik N.}$$

$$x=0 \notin D_f$$

$$P(1/2, 4) \text{ için}$$

$$f_{xx} = \frac{2}{x^3} \quad f_{yy} = \frac{16}{y^3} \quad f_{xy} = 1$$

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} \cdot \frac{16}{4^3} - 1 = 3 > 0$$

$$f_{xx} = 16 > 0$$

$$\Rightarrow P(1/2, 4) \text{ lokal min noktadır.}$$

2b) f in tanım kümesi $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$

$x=0$ iken f_x tanımsız old. dan, $\forall b \in \mathbb{R}$ için $(0,b)$ şeklindeki noktalar Kritik noktalar

S. 2-a) Bir $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, parçalı olarak,
 $\exists$ m kritik noktalarda $f(x,y)=0$
 ve $\forall (x,y) \in D$ için $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{1}{2}, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
 $f(x,y) \geq 0$ old. dan, $\lim$ kritik noktalar min. noktasıdır ve min değeri 0'dır.
 ile veriliyor. f nin $\mathbb{R}^2$ üzerinde sürekli olup-olmadığını araştırınız. (13 P)

$f_x = f_y = 0 \Leftrightarrow y=0$.
 O halde $\forall a > 0$ için $(a,0)$ şeklindeki noktalar kritik noktalar

$$(x,y) \neq (0,0) \text{ için } f(x,y) = \frac{1 - \cos \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \text{ olup}$$

$f, \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ da sürekli dir. $(x,y) = (0,0)$ da

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ ise $f, \mathbb{R}^2$ de sürekli olur.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \quad \left[\begin{array}{l} u = x^2+y^2 \\ (x,y) \rightarrow (0,0) \text{ iken } u \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow 0^+ \text{ iken } x^2+y^2 \rightarrow 0 \end{array} \right] \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos u}{u^2} \\ &\stackrel{L}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sin u}{2u} = \frac{1}{2} = f(0,0) \text{ old. dan } f, \\ &\quad \mathbb{R}^2 \text{ de sürekli dir.} \end{aligned}$$

S. 2-b) $f(x,y) = y^2 \cdot \sqrt{x}$ ile tanımlı f fonksiyonunun bütün kritik noktalarını ve varsa ekstremum (maksimum-minimum) değer(ler)ini bulunuz. (12 P)

$$\left. \begin{array}{l} f_x = \frac{y^2}{2\sqrt{x}} \\ f_y = 2y\sqrt{x} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} f_x = 0 \Rightarrow \forall x > 0 \text{ için } y=0 \\ f_y = 0 \Rightarrow x=0 \text{ veya } y=0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} (0,b) \text{ için} \\ f_x \text{ tanımsız old. dan} \\ (0,b) \text{ Kritik Nokta} \end{array} \right.$$

$a \geq 0$ olmak üzere $(a,0)$ Kritik noktalar

$\forall x \geq 0$ ve y için

$$f(x,y) - f(a,0) = y^2 \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow f(a,0) = 0 \text{ bir yerel minimumdur.}$$

$$\rightarrow f(x,y) - f(0,b) = y^2 \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow f(0,b) = 0 \text{ yerel minimum}$$

S.2-a) Kabul edelim ki z , x ve y 'nin diferansiyellenebilen bir fonksiyonu olarak $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

denklemini sağlamaktadır. Kutupsal koordinatlara geçildiğinde $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ ne olur?

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} (r \cos \theta) \\ &= -y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 // \end{aligned}$$

-b) $f(x, y) = \sqrt{1+x^2y^2}$ ile verilen f fonksiyonunun bütün kritik noktalarını belirleyiniz ve ekstremum değerlerini bulunuz.

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}} \\ f_y &= \frac{x^2y}{\sqrt{1+x^2y^2}} \end{aligned} \right\} \nabla f = \vec{0} \Rightarrow \text{Kritik noktalar } (a, 0) \text{ ve } (0, b)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ için } \sqrt{1+x^2y^2} \geq 1 \text{ old. dan}$$

$$f(a, 0) = 1 = f(0, b) \text{ bir min değerdir}$$

$$\left[\begin{aligned} f(x, y) &\geq f(a, 0) \\ f(x, y) &\geq f(0, b) \end{aligned} \right]$$