İKİNCİ MERTEBEDEN SABİT KATSAYILI LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$ay''+by'+cy=f(x)$ formundaki denklemlere 2. mertebeden sabit katsayılı lineer dif. denklem denir. $f(x)=0$ ise denklem ikinci tarafsız (homojen), $f(x)\neq 0$ ise denklem ikinci taraflı denklem adını alır.

Çözüm için önce ikinci tarafsız,

$\boxed{ay''+by'+cy=0}$ denklemi çözülür:

Burada $a=0$ ise $by'+cy=0$ değişkenlere ayrılabilen diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse,

$$b\frac{dy}{dx}+cy=0$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{c}{b}dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\frac{c}{b}\int dx$$

$$\ln y=rx+\ln k \quad \left(-\frac{c}{b}=r\right)$$

$$\ln\frac{y}{k}=rx$$

$$y=ke^{rx}$$

bulunur.

İkinci tarafsız dif. denklemin $y=ke^{rx}$ şeklinde bir çözümünü bulalım.

$y'=kre^{rx}$ ve $y''=kr^2e^{rx}$ değerleri denklemde yerlerine yazılırsa,

$$(ar^2+br+c)ke^{rx}=0 \quad \text{olup,}$$

$$ar^2+br+c=0$$

bulunur.

$y=ke^{rx}$ eşitliğindeki r değeri bu denklemi sağlayan bir kök ise, $y=ke^{rx}$ ikinci tarafsız denklemin bir çözümüdür. $ar^2+br+c=0$ denklemine ikinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi denir. Bu denklem 2. tarafsız dif denklemde y'' yerine r^2, y' yerine r ve y yerine 1 yazarak elde edilir. Karakteristik denklemin köklerine göre, ikinci tarafsız denklemi inceleyelim.

1) Karakteristik denklemin r_1 ve r_2 gibi iki reel kökü var ise $y_1=k_1e^{r_1x}$ ve $y_2=k_2e^{r_2x}$ ikinci tarafsız denklemin iki özel çözümüdür. Çözümler denklemi sağladığına göre,

$$ay_1''+by_1'+cy_1=0$$
$$ay_2''+by_2'+cy_2=0$$

dır. Bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa,

$$a(y_1''+y_2'')+b(y_1'+y_2')+c(y_1+y_2)=0$$

bulunur. Bu ifadeye göre,

$$y=y_1+y_2=k_1e^{r_1x}+k_2e^{r_2x}$$

yada $\boxed{y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}}$

ikinci tarafsız dif. denklemin genel çözümüdür.

Örnek: $y''+y'-2y=0$ dif. denkleminin genel çözümünü bul.

Karakteristik denklem,

$r^2+r-2=0$ olup, denklemin kökleri $r_1=-2$ ve $r_2=1$ dir.

Bu durumda genel çözüm,

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{x}$$

dir.

2) Karakteristik denklemin iki katlı kökü varsa genel çözüm

$$y = (c_1 x + c_2)\, e^{rx} \text{ dir.}$$

__Örnek:__ $y'' - 4y' + 4y = 0$ dif. denk.nin genel çözümünü bul

Karakteristik denklem,

$r^2 - 4r + 4 = 0$ olup, kökler $r_1 = r_2 = 2$ dir.

Böylece dif. denklemin genel çözümü

$$y = (c_1 x + c_2) e^{2x} \text{ dir.}$$

3) Karakteristik denklemin kökleri

$$r_1 = \alpha + i\beta$$
$$r_2 = \alpha - i\beta$$

şeklinde kompleks ise, 2. tarafsız denklemin genel çözümü,

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x) \text{ dir.}$$

__Örnek:__ $y'' - 2y' + 5y = 0$ dif. denk.nin genel çözümünü bul.

Karakteristik denklem,

$r^2 - 2r + 5 = 0$ olup, denklemin kökleri

$r_1 = 1 + 2i$ ve $r_2 = 1 - 2i$ dir.

Buna göre, dif. denklemin genel çözümü,

$$y = e^{x} (c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$$

olarak bulunur.

$ay''+by'+cy=f(x)$ DİF. DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu tip dif. denk.ler iki yöntemle çözülür.

I. YÖNTEM Bu diferansiyel denklemin çözümü, ikinci tarafsız denklemin y_1 genel çözümü ile ikinci taraflı denklemin y_2 özel çözümünün toplamına eşittir. Yani

$\boxed{y=y_1+y_2}$ dir

İKİNCİ TARAFLI DENKLEMİN ÖZEL ÇÖZÜMÜ

Özel çözüm $f(x)$ fonksiyonuna göre bulunur.

1) $f(x)$ fonksiyonu n. dereceden bir polinom olsun.

1) $c\neq 0$ ise, y_2 özel çözümü olarak n. dereceden bir $p(x)$ polinomu alınır. Bu polinomun türevleri alınarak denklemde yerine yazılır ve özdeşlikten $p(x)$'in katsayıları bulunur.

Örnek: $y''+y'-2y=x^2-1$ dif. denk.nin özel çözümünü bul

$f(x)$ fonksiyonu 2. dereceden olup, $c\neq 0$ dır.

$y_2=a_1x^2+b_1x+c_1$ şeklinde bir polinom alınır.

$y_2'=2a_1x+b_1$ ve $y_2''=2a_1$ olup, denklemde yerlerine yazılırsa

$2a_1+2a_1x+b_1-2a_1x^2-2b_1x-2c_1\equiv x^2-1$ dir.

$-2a_1x^2+2(a_1-b_1)x+2a_1+b_1-2c_1\equiv x^2-1$ olup

$-2a_1=1,\quad a_1=-\frac{1}{2},$ ve

$2(a_1-b_1)=0,\quad a_1=b_1=-\frac{1}{2}$ ve

$2a_1+b_1-2c_1=-1,\quad -1-\frac{1}{2}-2c_1=-1,\quad c_1=-\frac{1}{4}$

bulunur. Özel çözüm, $\boxed{y_2=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}$ dür.

2°) $c=0$ ise, r karakteristik denklemin bir çarpanıdır. Yani $r=0$ karakteristik denklemin köküdür. y_2 özel çözümü $m+1$ dereceden alınır. Sabit terim 0 alınabilir.

ÖRNEK. $y''-y'=2x+1$ dif. denk.nin özel çözümünü bul.

$f(x)$ fonksiyonu 1. dereceden ve $c=0$ olup,

$$y_2=a_1x^2+b_1x$$

olarak alınır.

$$y_2'=2a_1x+b_1 \quad \text{ve} \quad y_2''=2a_1$$

dir. Bu değerler denklemde yerlerine yazılırsa,

$$2a_1-2a_1x-b_1 \equiv 2x+1 \qquad \text{ve}$$

$$-2a_1x+2a_1-b_1 \equiv 2x+1$$

olur. Özdeşlikten,

$$-2a_1=2 \quad , \quad a_1=-1$$

$$2a_1-b_1=1 \quad , \quad -2-b_1=1 \quad \text{ve} \quad b_1=-3$$

bulunur. Böylece ikinci taraflı diferansiyel denklemin özel çözümü,

$$y_2=-x^2-3x$$ elde edilir.

3°) $b=0$ ve $c=0$ ise, r^2 karakteristik denklemin bir çarpanıdır, yani $r=0$ karakteristik denklemin iki katlı köküdür. y_2 özel çözümü $m+2$ dereceden alınır. Sabit terimle, x'li terimin katsayısı 0 alınabilir.

Bu halde, denklemin ikinci tarafının iki defa integrali alınarak özel çözüm bulunur.

ÖRNEK. $y'' = x^3 + 2$ dif. denk.nin özel çözümünü bul.

$f(x)$ fonksiyonu 3. dereceden ve $b=0$, $c=0$ olup,

$y_2 = a_1 x^5 + b_1 x^4 + c_1 x^3 + d_1 x^2$ alınır.

$y_2' = 5a_1 x^4 + 4b_1 x^3 + 3c_1 x^2 + 2d_1 x$

$y_2'' = 20a_1 x^3 + 12b_1 x^2 + 6c_1 x + 2d_1$

değerleri denklemde yerlerine yazılırsa,

$$20a_1 x^3 + 12b_1 x^2 + 6c_1 x + 2d_1 \equiv x^3 + 2$$

olup, özdeşlikten

$$a_1 = \frac{1}{20}, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad d_1 = 1$$

bulunur. Böylece dif. denklemin özel çözümü,

$$y_2 = \frac{1}{20} x^5 + x^2$$

elde edilir. Bu çözüm $y'' = x^3 + 2$ denk.nin 2 tarafının iki defa integrali alınarakta bulunur.

$$y' = \frac{x^4}{4} + 2x, \quad y = \frac{x^5}{20} + x^2$$

2) $f(x)$ fonksiyonu $f(x) = M e^{\alpha x}$ şeklinde bir üstel fonksiyon olsun. Özel çözümün bulunması:

1°) α karakteristik denklemin kökü değilse, y_2 özel çözümü $y_2 = K e^{\alpha x}$ şeklindedir. y_2 nin türevleri alınarak denklemde yerine yazılır ve özdeşlikten K sabiti bulunur.

ÖRNEK. $y'' - 4y' + 3y = 4e^{2x}$ dif. denk.nin çöz. bul.

Karakteristik denklem, $r^2 - 4r + 3 = 0$ olup kökler $r_1 = 1$ ve $r_2 = 3$ tür. $\alpha = 2$ karak. denklemin kökü olmadığından, $y_2 = K e^{2x}$ şeklindedir.

$y_2' = 2K e^{2x}$ ve $y_2'' = 4K e^{2x}$ olup denklemde yerlerine yazılırsa, $-K e^{2x} = 4 e^{2x}$ ve $K = -4$ bulunur. Böylece $\boxed{y_2 = -4e^{2x}}$ olur.

2°) $r=\alpha$ karakteristik denklemin basit bir kökü ise, y_2 özel çözümü,

$$\boxed{y_2 = Kxe^{\alpha x}}$$

şeklindedir.

Örnek: $y''-5y'+6y=5e^{2x}$ dif. denk.nin özel çöz. bul.

Karakteristik denklem,

$r^2-5r+6=0$ olup, kökler $r_1=2, r_2=3$ tür.

$\alpha=2$ karakteristik denklemin kökü olduğundan,

$y_2 = Kxe^{2x}$ şeklinde alınır

$y_2' = Ke^{2x}+2Kxe^{2x}$

$y_2'' = 2Ke^{2x}+2K.e^{2x}+4Kxe^{2x} = 4Ke^{2x}+4Kxe^{2x}$

olup, denklemde yerlerine yazılırsa

$-Ke^{2x}=5e^{2x}$ ve $K=-5$ bulunur. Böylece özel

çözüm $y_2=-5xe^{2x}$ dir.

3°) $r=\alpha$ karakteristik denklemin iki katlı kökü ise y_2 özel çözümü,

$$\boxed{y_2 = Kx^2e^{\alpha x}}$$

şeklinde alınır.

Örnek: $4y''+4y'+y=3e^{-\frac{x}{2}}$ dif denk.nin özel çözümünü bulunuz

Karakteristik denklem

$4r^2+4r+1=0$ dır ve kökler de $r=\alpha=-\frac{1}{2}$ şeklinde iki katlı olup,

$y_2=Kx^2e^{-\frac{1}{2}x}$ alınır

$$y_2' = 2Kx e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}Kx^2 e^{-\frac{1}{2}x} = K e^{-\frac{1}{2}x}(2x - \frac{1}{2}x^2)$$

$$y_2'' = K\left[-\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}(2x - \frac{1}{2}x^2) + e^{-\frac{1}{2}x}(2-x)\right]$$

$$= K e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 2\right)$$

olup, denklemde yerlerine yazılırsa,

$$4K e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 2\right) + 4K e^{-\frac{1}{2}x}(2x - \frac{1}{2}x^2) + Kx^2 e^{-\frac{1}{2}x} \equiv 3 e^{-\frac{1}{2}}$$

$$K(x^2 - 8x + 8 + 8x - 2x^2 + x^2) = 3 \quad , \boxed{K = \frac{3}{8}}$$

bulunur. Böylece denklemin çözümü

$$y_2 = \frac{3}{8} x^2 e^{-\frac{1}{2}x}$$

şeklinde elde edilir.

3) $f(x)$ fonksiyonu $f(x) = M \sin \lambda x + N \cos \lambda x$ şeklinde ise özel çözüm:

1°) y_2 özel çözümü ikinci tarafın aynı şekilde bir fonksiyonu olup, $y_2 = \alpha \sin \lambda x + \beta \cos \lambda x$ şeklindedir.

Örnek: $y'' - 5y' + 6y = 2\cos x$ dif. denk.nin özel çözümünü bulunuz.

Dif. Denklemin özel çözümü,

$$y_2 = \alpha \sin x + \beta \cos x \quad \text{şeklinde olup,}$$

$$y_2' = \alpha \cos x - \beta \sin x \quad \text{ve} \quad y_2'' = -\alpha \sin x - \beta \cos x$$

değerleri yerlerine yazılırsa,

$$(5\alpha + 5\beta)\sin x + (-5\alpha + 5\beta)\cos x \equiv 2\cos x$$

bulunur. Her iki tarafta $\sin x$ ve $\cos x$ in katsayıları eşitlenirse

$$5\alpha + 5\beta = 0$$
$$-5\alpha + 5\beta = 2$$

olur. Bu iki denklemden,

$$\alpha = -\frac{1}{5} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{1}{5}$$

bulunur. Buna göre dif. denklemin özel çözümü

$$y_2 = -\frac{1}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x$$

şeklindedir.

2°) Eğer $b=0$ ve $c=a\lambda^2$ ise, özel çözüm

$$y_2 = x(\alpha \sin\lambda x + \beta\cos\lambda x) \text{ dir.}$$

Örnek:

$$y'' + 4y = \sin 2x$$ dif. denkleminin özel çözümünü bulunuz.

ya da $y''+y=\sin x$, $y_2=-\frac{2}{x}\cos x$

$b=0$ ve $c=a\lambda^2=4$ olup,

$$y_2 = x(\alpha\sin 2x + \beta\cos 2x) \text{ dir.}$$

$$y_2' = \alpha\sin 2x + \beta\cos 2x + 2\alpha x\cos 2x - 2\beta x\sin 2x$$
$$= (\alpha - 2\beta x)\sin 2x + (\beta + 2\alpha x)\cos 2x$$
$$y_2'' = (-4\beta - 4\alpha x)\sin 2x + (4\alpha - 4\beta x)\cos 2x$$

değerleri denklemde yerlerine yazılırsa,

$$(-4\beta - 4\alpha x)\sin 2x + (4\alpha - 4\beta x)\cos 2x + 4\alpha x\sin 2x + 4\beta x\cos 2x \equiv \sin 2x$$

olur. Her iki tarafın $\sin 2x$ ve $\cos 2x$ katsayıları eşitlenirse

$$-4\beta - 4\alpha x + 4\alpha x = 1 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{4}$$
$$4\alpha - 4\beta x + 4\beta x = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

olup, özel çözüm, $\boxed{y_2 = -\frac{1}{4}x\cos 2x}$ bulunur.

257

4) $f(x)$ fonksiyonu $f(x)=P(x)e^{\alpha x}$ şeklinde ise dif. denklemin özel çözümü:

$y_2 = z(x)e^{\alpha x}$ şeklindedir. y_2 nin türevleri denklemde yerine yazılırsa, ikinci tarafı bir polinom olan dif. denklem elde edilir. Bu denklemin özel çözümü bulunur ve $y_2 = z e^{\alpha x}$ de yerine yazılırsa, verilen denklemin özel çözümü bulunur.

<u>Örnek:</u>

$y'' + 3y' + 2y = (x+1)e^x$ dif. denk. nin özel çözümünü bulunuz. Denklemin özel çözümü, $y_2 = z(x)e^x$ şeklindedir.

$$y_2' = z'e^x + ze^x = e^x(z'+z)$$

$$y_2'' = e^x(z'+z) + e^x(z''+z') = e^x(z''+2z'+z)$$

olup, denklemde yerlerine yazılırsa,

$$e^x(z''+2z'+z) + 3e^x(z'+z) + 2ze^x = (x+1)e^x$$

$$z'' + 5z' + 6z = x+1$$

elde edilir. Bu denklemin z_2 özel çözümünü bulalım.

$z_2 = a_1 x + b_1$ olup,

$z_2' = a_1$ ve $z_2'' = 0$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$5a_1 + 6a_1 x + 6b_1 \equiv x+1$$

olur. Özdeşlikten,

$$6a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{6}$$

$$5a_1 + 6b_1 = 1 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{36}$$

bulunur. O halde $z_2 = \frac{1}{6}x + \frac{1}{36}$

olup, verilen dif. denklemin özel çözümü

$y_2 = e^x\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{36}\right)$ bulunur.

5) $f(x)$ fonksiyonu $f(x)=M(x)\sin\lambda x+N(x)\cos\lambda x$ olsun. Burada $M(x)$ ve $N(x)$, sırasıyle m ve n dereceden fonksiyonlardır $(m>n)$. Denklemin özel çözümü $K(x)$ ve $R(x)$ m. dereceden fonksiyonlar olmak üzere

$$y_2=K(x)\sin\lambda x+R(x)\cos\lambda x$$

formundadır.

ÖRNEK. $y''+2y'-3y=2\sin x+x\cos x$ denkleminin özel çözümünü bulunuz. $M(x)=x$, $N(x)=2$ ve $m=1$dir. Böylece özel çözüm,

$$y_2=(a_1x+b_1)\sin x+(a_2x+b_2)\cos x$$

şeklinde olacaktır. O halde

$$y_2'=(a_1-b_2-a_2x)\sin x+(a_2+b_1+a_1x)\cos x$$

$$y_2''=(-2a_2-b_1-a_1x)\sin x+(2a_1-b_2-a_2x)\cos x$$

değerler yerlerine yazılırsa,

$$-2[(2a_1+a_2)x-a_1+a_2+2b_1+b_2]\sin x$$
$$+2[(a_1-2a_2)x+a_1+a_2+b_1-2b_2]\cos x\equiv 2\sin x+x\cos x$$

bulunur. O halde

$$\left.\begin{array}{l}-2[(2a_1+a_2)x-a_1+a_2+2b_1+b_2]\equiv 2\\ 2[(a_1-2a_2)x+a_1+a_2+b_1-2b_2]\equiv x\end{array}\right\}\quad\begin{array}{c}2a_1+a_2=0\\ +2(a_1-a_2-2b_1-b_2)=2\\ 2(a_1-2a_2)=1\\ a_1+a_2+b_1-2b_2=0\end{array}$$

denklemlerinden, $a_1=\frac{1}{10}$, $a_2=-\frac{1}{5}$, $b_1=-\frac{13}{50}$ ve $b_2=-\frac{9}{50}$

olup, özel çözüm,

$$y_2=\left(\frac{1}{10}x-\frac{13}{50}\right)\sin x+\left(-\frac{1}{5}x-\frac{9}{50}\right)\cos x$$

elde edilir.

b) $f(x)$ farklı cinsten fonksiyonların toplamı ise özel çözüm, fonksiyonların herbiri için bulunacak özel çözümlerin toplamından oluşur.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

olsun. Denklemin ikinci yanında yalnız $f_1(x)$ in olduğunu düşünerek bulunacak özel çözüm y_{21} ve yalnız $f_2(x)$ in olduğunu düşünerek bulunacak özel çözümde y_{22} olursa, dif denklemin özel çözümü,

$$\boxed{y_2 = y_{21} + y_{22}}$$ dir.

<u>ÖRNEK</u>. $y'' + 4y = e^x + \sin 2x$ dif denk.nin özel çözümünü bul.

$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = e^x + \sin 2x$ olup, denklemin özel çözümü,

$y_2 = y_{21} + y_{22}$ dir.

$y'' + 4y = e^x$ dif. denk.nin özel çözümü, $\alpha = 1$ karakteristik denklemin kökü olmadığından

$y_{21} = Ke^x$ dir. $y'_{21} = Ke^x = y''_{21}$ olup, yerlerine yazılırsa

$Ke^x + 4Ke^x = e^x$ ve $K = \frac{1}{5}$ bulunur. Böylece

$\boxed{y_{21} = \frac{1}{5}e^x}$ bulunur.

$y'' + 4y = \sin 2x$ dif. denkleminin özel çözümü

$b = 0$ ve $c = a\lambda^2 = 4$ olduğundan

$$y_2 = x(\alpha \sin 2x + \beta \cos 2x) = -\frac{1}{4}x\cos 2x \qquad (\alpha = 0, \beta = -\frac{1}{4})$$

dir. Bu durumda dif. denklemin özel çözümü

$$y_2 = y_{21} + y_{22} \text{ den}$$

$$\boxed{y_2 = \frac{1}{5}x - \frac{1}{4}x\cos 2x}$$

bulunur

2. Yöntem. Sabitlerin Değişimi Yöntemi
(LAGRANGE YÖNTEMİ)

İkinci taraflı denklemin denklemin çözümü, ikinci tarafsız denklemin genel çözümünden elde edilir. Birinci yöntemle çözülemeyen denklemler bu yöntemle çözülür. Bu yöntemin zorluğu, çözümde karışık integrallerle karşılaşılmasından gelmektedir. ~~Genelde I. yöntem tercih edilir.~~

İkinci tarafsız $ay''+by'+cy=0$ denkleminin genel çözümü $y=c_1y_1+c_2y_2$ olsun. Bu çözümün ikinci taraflı denklemin çözümü olabilmesi için c_1 ve c_2 nin nasıl birer fonksiyon olduğunu inceleyelim.

$$y'=c_1'y_1+c_1y_1'+c_2'y_2+c_2y_2'=c_1y_1'+c_2y_2'+c_1'y_1+c_2'y_2$$

dir. c_1 ve c_2 nin türevlerinin olduğu terimlerin toplamı sıfır kabul edilir. Yani, $c_1'y_1+c_2'y_2=0$ dır. Bu durumda,

$y'=c_1y_1'+c_2y_2'$ ve $y_2''=c_1y_1''+c_2y_2''+c_1'y_1+c_2'y_2'$

değerleri ikinci taraflı denklemde yerlerine yazılırsa,

$$c_1(ay_1''+by_1'+cy_1)+c_2(ay_2''+by_2'+cy_2)+a(c_1'y_1'+c_2'y_2')=f(x)$$

bulunur. y_1 ve y_2 ikinci tarafsız denklemin çözümleri olduğundan parantezlerin içindeki ifadeler sıfırdır.

$c_1'y_1'+c_2'y_2'=\frac{f(x)}{a}$ olur.

$\left.\begin{array}{l} c_1'y_1+c_2'y_2=0 \\ c_1'y_1'+c_2'y_2'=\frac{f(x)}{a} \end{array}\right\}$ denklem sisteminden $c_1'=R_1(x)$ ve $c_2'=R_2(x)$ bulunur. İntegral alınırsa,

$c_1=\int R_1(x)dx+k_1$ ve $c_2=\int R_2(x)dx+k_2$ elde edilir.

Bu değerler $y=c_1y_1+c_2y_2$ de yerlerine konulursa, ikinci taraflı denklemin çözümü bulunur.

Örnek: $y''-5y'+6y=2\cos x$ dif. denklemini çözünüz.

$y''-5y'+6y=0$ denkleminin karakteristik denklemi $r^2-5r+6=0$ dan kökler $r_1=2$ ve $r_2=3$ bulunur.
İkinci tarafsız denklemin genel çözümü,

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1'e^{2x}+c_2'e^{3x}&=0 \\ 2c_1'e^{2x}+3c_2'e^{3x}&=2\cos x \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminden c_1' ve c_2' çözülür.

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}=3e^{5x}-2e^{5x}=e^{5x}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ 2\cos x & 3e^{3x} \end{vmatrix}=-2e^{3x}\cos x$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 2\cos x \end{vmatrix}=2e^{2x}\cos x$$

$c_1'=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-2e^{-2x}\cos x$ ve $c_2'=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=2e^{-3x}\cos x$ olur.

integralleri alınırsa

$$c_1=-2\int e^{-2x}\cos x\,dx=-\frac{2}{5}(e^{-2x}\sin x-2e^{-2x}\cos x)+k_1$$

$$c_2=2\int e^{-3x}\cos x\,dx=\frac{2}{10}(e^{-3x}\sin x-3e^{-3x}\cos x)+k_2$$ bulunur.

$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ eşitliğinden, dif. denklemin çözümü

$$y=-\frac{1}{5}\sin x+\frac{1}{5}\cos x+k_1e^{2x}+k_2e^{3x}$$

olarak elde edilir.

n. MERTEBEDEN SABİT KATSAYILI LİNEER DİF. DENKLEMLER

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

şeklindeki denklemlere, n. mertebeden sabit katsayılı lineer dif. denklem denir. $f(x)=0$ ise denkleme ikinci tarafsız (homojen) denklem, $f(x) \neq 0$ ise denkleme ikinci taraflı denklem denir. Çözüm için önce ikinci tarafsız denklem çözülür.

İKİNCİ TARAFSIZ

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Denklemin çözümleri $y = ke^{rx}$ şeklindedir. Türevleri alınıp denklemde yerleine yazılırsa,

$$(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) ke^{rx} = 0$$

bulunur. $a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$ denklemi ikinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi olup, denklemin köklerine göre çözümler $y_1, y_2, \dots, y_n$ ise ikinci tarafsız denklemin genel çözümü

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

olur.

Karakteristik denklemin katlı reel kökü olması halinde, e^{rx} in çarpanı olan polinomların dereceleri ve katlı kompleks kök olması halinde de $\sin\beta x$ ve $\cos\beta x$ in çarpanı olan polinomların dereceleri katlılık mertebesinden bir eksiktir.

$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$

reel kökler $r_1, r_2, \dots, r_l$

katlılık mert. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$

kompleks kökler $\alpha_1 \mp \beta_1 i, \alpha_2 \mp \beta_2 i, \dots, \alpha_m \mp \beta_m i$

katlılık mert. $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$

ise dif. denk.in genel çözümü

$$y = \sum_{k=1}^{l} e^{r_k x} P_{\lambda_k - 1}(x) + \sum_{k=1}^{m} e^{\alpha_k x} \left[S_{\nu_k - 1}(x) \sin \beta_k x + T_{\nu_k - 1}(x) \sin \beta_k x \right]$$ dir.

P, S, T ler dereceleri indislerine eşit x in tam polin. dir.

Örnek 1. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ dif. denk.nin genel çözümünü bulunuz. Karakteristik denklem,

$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$ olup kökler,

$r_1 = -1$, $r_2 = 1$ ve $r_3 = 2$ olur. Böylece genel çözüm

$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$ dir.

Örnek 2. $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + y' = 0$ dif. denk.nin genel çözümünü bulunuz. Karak. denklem,

$r^4 + 3r^3 + 3r^2 + r = 0$ yada $r(r+1)^3 = 0$ olup

kökler $r_1 = 0$, $r_2 = -1$ de üç katlıdır. Genel çözüm.

$y = c_1 + (c_2 x^2 + c_3 x + c_4) e^{-x}$ olur.

Örnek 3. $y^{IV} + 9y'' = 0$ dif. denk.nin genel çözümünü bulunuz. Karak. denklem

$r^4 + 9r^2 = 0$ yada $r^2(r^2 + 9) = 0$ olup

$r_1 = 0$ (iki katlı) ve $r_2 = \mp 3i$ dir. Genel çözüm,

$y = c_1 + c_2 x + c_3 \sin 3x + c_4 \cos 3x$ dir.

Örnek 4. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ dif. denk.nin genel çözümünü bulunuz. Karak. denk,

$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$ olup $r = \mp i$ (iki katlı) dir. Genel çözüm,

$y = (c_1 + c_2 x) \sin x + (c_3 + c_4 x) \cos x$

bulunur.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

1. Yöntem. Bu dif. denklemin çözümü, ikinci tarafsız denklemin y_1 genel çözümü ile ikinci taraflı denklemin y_2 özel çözümünün toplamına eşittir. Yani,

$$y = y_1 + y_2 \text{ dir.}$$

İkinci taraflı denklemin Özel çözümü

1) $f(x)$ fonksiyonu m. dereceden polinom ise y_2 özel çözümü olarak yine m. dereceden bir polinom alınır. Eğer $r=0$ karak. denklemin p katlı kökü ise y_2 olarak aynı dereceden bir polinomun x^p ile çarpımı alınır.

2) $f(x) = Me^{\alpha x}$ ise $y_2 = ke^{\alpha x}$ dir. $r=\alpha$ karak. denk.in p katlı kökü ise,

$$y_2 = kx^p e^{\alpha x} \text{ dir.}$$

3) $f(x) = M\sin\lambda x + N\cos\lambda x$ olsun. Özel çözüm olarak $y_2 = \alpha\sin\lambda x + \beta\cos\lambda x$ alınır. Eğer $r = \mp\lambda i$ karak. denk.in p katlı kökü ise,

$$y_2 = x^p(\alpha\sin\lambda x + \beta\cos\lambda x) \text{ şeklindedir.}$$

4) $f(x) = R(x)e^{\alpha x}$ olsun. Denklemin özel çözümü $y_2 = z(x)e^{\alpha x}$ dir. Dönüşüm yapılırsa, ikinci tarafı polinom olan bir dif. denklem bulunur. Bu denklemin özel çözümü bulunarak $y_2 = ze^{\alpha x}$ de yerine yazılırsa verilen denklemin özel çözümü bulunur.

5) $f(x)$ farklı cinsten fonksiyonların toplamı ise, dif. denklemin özel çözümü, fonksiyonların her biri için bulunacak özel çözümlerin toplamından oluşur.

Örnek $y''' + 3y'' + 3y' + y = 5e^{x}\sin x$ dif. denk. çözünüz.

İkinci tarafsız denklemin genel çözümü

Karak. denk. $r^3+3r^2+3r+1=(r+1)^3=0$ olup; kökler $r_1=-1$ (üç katlı) dir. Genel çözüm;

$$y_1=(c_1x^2+c_2x+c_3)e^{-x} \text{ dir.}$$

İkinci taraflı denklemin özel çözümü

$y=ze^{x}$ olup, dönüşümü yapılırsa

$z'''+6z''+12z'+8z=5\sin x$ bulunur. Bu denklemin özel çözümü $z_2=\alpha\sin x+\beta\cos x$ şeklindedir. Türevler denklemde yerine yazılırsa, özdeşlikten,

$$\alpha=\frac{2}{25}, \quad \beta=-\frac{11}{25} \text{ ve böylece } z_2=\frac{1}{25}(2\sin x-11\cos x)$$

bulunur. Buradan ikinci taraflı denklemin özel çözümü

$$y_2=ze^{x}=\frac{1}{25}e^{x}(2\sin x-11\cos x) \text{ olur. O halde}$$

dif. denklemin çözümü,

$$y=y_1+y_2=(c_1x^2+c_2x+c_3)e^{-x}+\frac{1}{25}e^{x}(2\sin x-11\cos x)$$

olarak bulunur.

2. Yöntem. SABİTLERİN DEĞİŞİMİ YÖNTEMİ
(LAGRANGE YÖNTEMİ)

İkinci tarafsız denklemin genel çözümünden, ikinci taraflı denklemin çözümü bulunur. 1. yöntemle çözüle-bilen denklemler bu yöntemle çözülebileceği gibi, 1. yöntemle çözülemeyen denklemlerde bu yöntemle çözülür.

İkinci tarafsız denklemin genel çözümü,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

olsun. Bu çözümün ikinci taraflı denklemin çözümü olabilmesi için $c_1, c_2, \dots, c_n$ lerin nasıl birer fonk-siyon olduklarını bulalım.

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + \dots + c_n y_n' + c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n$$

dir. $c_1, c_2, \dots, c_n$ lerin türevlerinin olduğu terimlerin top-lamı sıfır olarak kabul edilir:

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n = 0$$

olur. Bu halde $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + \dots + c_n y_n'$ dir. y'' tü-revinde $c_1, c_2, \dots, c_n$ lerin türevlerinin olduğu terimlerin toplamı sıfır olarak kabul edilir:

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + c \dots + c_n' y_n' = 0$$

olur.

$$y'' = c_1 y'' + c_2 y_2'' + \dots + c_n y_n''$$

dir. Bu şekilde devam edilecek $c_1, c_2, \dots, c_n$ lerin türevlerinin olduğu terimlerin toplamı sıfır olan n-1 tane denklem elde edilir. y ve y nin türevleri denklemde yerine yazılırsa,

$$c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0}$$

bulunur. Böylece elde edilen n tane denklemin oluşturduğu,

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 + \cdots + c_n' y_n = 0$$
$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + \cdots + c_n' y_n' = 0$$
$$c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + \cdots + c_n' y_n'' = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0$$
$$c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0}$$

denklem sisteminden $c_1', c_2', \ldots, c_n'$ çözülür. İntegralleri alınırsa $c_1, c_2, \ldots, c_n$ bulunur. Bu değerler

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

de yerlerine yazılırsa, dif. denklemin çözümü bulunur.

Örnek $\quad y''' + y' = \frac{1}{\cos x}$ dif. denk. nin çözümünü bulunuz.

İkinci tarafsız denklemin genel çözümü:

$$y''' + y' = 0 \Rightarrow r^3 + r = 0 \Rightarrow r(r^2+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 0,\; r_2 = \mp i$$

olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü

$$y = c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x \text{ dir.}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1' + c_2' \sin x + c_3' \cos x &= 0 \\ c_2' \cos x - c_3' \sin x &= 0 \\ -c_2' \sin x - c_3' \cos x &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}\right\}$$

denklem sisteminden c_1', c_2', c_3' bulunur.

ikinci denklem Cosx ile ve üçüncü denklem sinx ile çarpılırsa,

$$c_2' \cos^2 x - c_3' \sin x \cos x = 0$$

$$-c_2' \sin^2 x - c_3' \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

elde edilir. Bu iki denklem taraf tarafa çıkarılırsa,

$$c_2' = -\operatorname{tg} x \quad \text{bulunur.}$$

İkinci denklem Sinx ile ve üçüncü denklem Cosx ile çarpılırsa,

$$c_2' \sin x \cos x - c_3' \sin^2 x = 0$$

$$-c_2' \sin x \cos x + c_3' \cos^2 x = 1$$

elde edilir. Bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa,

$$c_3' = -1 \quad \text{bulunur.}$$

$$c_1' + c_2' \sin x + c_3' \cos x = 0$$

denkleminde c_2' ve c_3' degerleri yerleine yazılırsa,

$$c_1' - \operatorname{tg} x \sin x - \cos x = 0 \quad \text{dır.}$$

$$c_1' = \cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \quad \text{bulunur.}$$

c_1', c_2' ve c_3' nün integralleri alınırsa,

$$c_1 = \int \frac{1}{\cos x}\, dx \quad \text{dir.}$$

$\sin x = t$ denirse, $\cos x\, dx = dt$ olur.

$$c_1 = \int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\cos x} \frac{dt}{\cos x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dt = \int \frac{1}{1-\sin^2 x}\, dt$$

$$= \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}+k_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+k_1$$

$c_2 = \int -\tan x\,dx = \ln\cos x + k_2$ dir.

$c_3 = \int -dx = -x + k_3$ dir.

O halde dif denklemin çözümü

$y = c_1 + c_2\sin x + c_3\cos x$ den

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+k_1 + (\ln\cos x + k_2)\sin x + (-x+k_3)\cos x$$

$$= k_1 + k_2\sin x + k_3\cos x - x\cos x + \sin x\ln\cos x + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

olur.

Problemler:

1) $y''' + 2y'' - y' - 2y = x^2 + e^x$

Yanıt: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x} + \frac{x}{6}e^x - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{5}{4}$

2) $y''' + 3y'' - 4y = xe^{-2x}$

Yanıt: $y = c_1 e^{x} + (c_2 + c_3 x)e^{-2x} - \frac{1}{18}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{18}x^3 e^{-2x}$

3) $y^{IV} + 8y'' - 9y = \cos 3x + e^{2x}$

Yanıt: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3\sin 3x + c_4\cos 3x - \frac{1}{60}x\sin 3x$
$+ \frac{1}{39}e^{2x}$

4) $y''' - 3y' + 2y = 2e^x$ Yanıt: $y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{3}x^2 e^x$

DEĞİŞKEN KATSAYILI LİNEER DİF. DENKLEMLER

$$A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = f(x)$$

denkleminde A_i ler x in fonksiyonları ise, bu denklem değişken katsayılı lineer dif denklem adını alır.

$f(x) \equiv 0$ ise ikinci tarafsız denklem elde edilir.

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ ikinci tarafsız denklemin n çözümü ise

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

ikinci tarafsız denklemin genel çözümüdür. u, ikinci taraflı denklemin bir özel çözümü ise

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n + u$$

ikinci taraflı denklemin genel çözümüdür. Bu çözümü elde ~~etmek~~ için genel bir kural yoktur. Ancak, bazı özel hallere uygulanabilecek özel kurallar vardır. Biz bunlardan birini inceleyeceğiz.

EULER (veya CAUCHY) dif denklemi

$$A_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} x \frac{dy}{dx} + A_n y = f(x)$$

şeklindedir. Bu denklemde $x = e^t$ dönüşümü yapılırsa denklem sabit katsayılı lineer denkleme dönüşür.

$$x = e^t \quad \text{ise} \quad t = \ln x$$

olur.

$$D_x y = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} D_t y = e^{-t} D_t y$$

olup $\boxed{x D_x y = D_t y}$

dir. ($D_x = \frac{d}{dx}$, $D_t = \frac{d}{dt}$ türetme operatörleridir)

$$D_x^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2} = D_x D_x y = e^{-t} D_t (e^{-t} D_t y)$$

$$= e^{-t}(-e^{-t} D_t + e^{-t} D_t^2) y = e^{-2t}(D_t^2 - D_t) y$$

ve buradan

$$\boxed{x^2 D_x^2 y = (D_t^2 - D_t) y = D_t (D_t - 1) y}$$

dir.

$$D_x^3 y = \frac{d^3 y}{dx^3} = D_x D_x^2 y = e^{-t} D_t [e^{-2t}(D_t^2 - D_t) y]$$

$$= e^{-t}[-2e^{-2t}(D_t^2 - D_t) y + e^{-2t}(D_t^3 - D_t^2) y]$$

$$= e^{-3t}(D_t^3 - 3D_t^2 + 2D_t) y$$

$$= e^{-3t} D_t (D_t - 1)(D_t - 2) y$$

ve buradan

$$x^3 D_x^3 y = D_t (D_t - 1)(D_t - 2) y$$

olur. Böyle devam edilirse

$$x^k D_x^k y = D_t (D_t - 1)(D_t - 2) \cdots (D_t - k + 1) y$$

formülü elde edilir.

Bu değerler Euler denkleminde yerlerine konursa denklem

$$[A_0 D_t (D_t-1)\dots(D_t-n+1) + A_1 D_t (D_t-1)\dots(D_t-n+2) + \dots + A_{n-1} D_t + A_n] y = f(e^t)$$

şeklinde sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denkleme dönüşür.

ÖRNEK. $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 5x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} = x^2$ dif. dek.'i çözünüz.

$x = e^t$ dönüşümü yapılırsa $t = \ln x$ olarak denklem

$$[D_t(D_t-1)(D_t-2) + 5D_t(D_t-1) + 3D_t] y = e^{2t}$$

$$(D_t^3 + 2D_t^2) y = e^{2t}$$

şeklini alır. Bu ise

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} = e^{2t}$$

şeklinde sabit katsayılı lineer bir dif denklemdir. Genel çözüm bulunur ve $t = \ln x$, $e^t = x$ olduğu göz önüne alınırsa verilen denklemin genel çözümü olarak

$$y = c_1 + c_2 \ln x + \frac{c_3}{x^2} + \frac{1}{16} x^2$$

elde edilir.

Aşağıdaki Euler denklemlerini çözünüz.

1) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ cevap $y = c_1 x + c_2 x^2$

2) $x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = 0$ cevap: $y = c_1 x + c_2 \cos \ln x + c_3 \sin \ln x$

3) $x^2y'' + xy' + 4y = 0$ " : $y = c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x)$

4) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ " $y = (c_1 + c_2 \ln x)\frac{1}{x}$

5) $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ " : $y = c_1 x^3 + \frac{c_2}{x}$

6) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$ " : $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$

7) $x^2y'' - 4xy' + 6y = x$ " : $y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + \frac{1}{2} x$

Legendre Dif Denklemi :

$$(ax+b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 (ax+b)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(ax+b)\frac{dy}{dx} + a_n y = f(x).$$

$ax+b = e^t$ dönüşümü uygulanır.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{e^t}{a}} = a e^{-t} \frac{dy}{dt} = a e^{-t} Dy \qquad \frac{d}{dt} = D$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left[a e^{-t} \frac{dy}{dt}\right]}{\frac{1}{a} e^t}$$

$$= a e^{-t}\left[-a e^{-t}\frac{dy}{dt} + a e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right]$$

$$= a^2 e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

$$y'' = a^2 e^{-2t} D(D-1)y$$

$$y^{(n)} = a^n e^{-nt} D(D-1)\cdots(D-n+1)y$$

$$e^{nt} a^n \cancel{e^{-nt}} D(D-1)\cdots(D-n+1)y + a_1 \cancel{e^{(n-1)t}} a^{n-1} \cancel{e^{-(n-1)t}} D(D-1)\cdots(D-n+2)y$$

$$+ \dots + a_{n-1} e^t a e^{-t} Dy + a_n y = f\left(\frac{e^t - b}{a}\right)$$

$$\left[a^n D(D-1)\dots(D-n+1) + a_1 a^{n-1} D\cdots(D-n+2) + \dots + a_{n-1} a D + a_n\right] y = f\left(\frac{e^t-b}{a}\right)$$

$$F(D)y = f\left(\frac{e^t - b}{a}\right)$$

şeklinde sbt. katsayılı ve ikinci taraflı bir denkleme ulaşılmış olur.

$y = \varphi(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$ olur.

$t = \ln(ax+b) \implies y = \varphi\left[\ln(ax+b), c_1, c_2, \dots, c_n\right]$

Ör: $(1+2x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2(1+2x)\frac{dy}{dx} - 12y = 3x+1$

Leg. Dif. Denk

$1+2x = e^t \qquad x = \frac{e^t - 1}{2}$

$3x+1 = \frac{3}{2}e^t - \frac{3}{2} + 1 = \frac{3e^t - 1}{2}$

$y' = a e^{-t} Dy = 2e^{-t} Dy$

$y'' = a^2 e^{-2t} D(D-1)y = 4e^{-2t} D(D-1)y$

$e^{2t}\, \cancel{4} e^{-2t} D(D-1)y - 2\cancel{e^t}\, 2\cancel{e^{-t}} Dy - 12y = \frac{3e^t - 1}{2}$

$4D(D-1)y - 4Dy - 12y = \frac{3e^t - 1}{2}$

$[D(D-1) - D - 3]y = \frac{3e^t - 1}{8}$

$(D^2 - 2D - 3)y = \frac{3e^t - 1}{8}$

$F(D) = D^2 - 2D - 3 = (D-3)(D+1) = 0$

$y_1 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$

$f(t) = \frac{3e^t - 1}{8} = \frac{3}{8}e^t - \frac{1}{8}$

$y_{21} = \frac{\frac{3e^t}{8}}{D^2 - 2D - 3} = \frac{\frac{3e^t}{8}}{1-2-3} = \frac{-3}{32}e^t$

$y_{22} = \frac{-\frac{1}{8}}{-3 - 2D + D^2} = \frac{\frac{1}{8}}{3 + 2D - D^2}$

$$\begin{array}{l|l} 1 & 3+2D-D^2 \\ \hline 1 + \frac{2}{3}D - \frac{D^2}{3} & \frac{1}{3} - \frac{2}{9}D \\ -\frac{2}{3}D + \frac{D^2}{3} & \end{array}$$

$y_{22} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}D\right)\frac{1}{8} = \frac{1}{24} + 0 = \frac{1}{24}$

$$y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} - \frac{3}{32} e^{t} + \frac{1}{24}$$

$$= C_1 (1+2x)^3 + \frac{C_2}{1+2x} - \frac{3}{32}(1+2x) + \frac{1}{24}$$

$$= C_1 (1+2x)^3 + \frac{C_2}{1+2x} - \frac{3}{16} x - \frac{5}{96} \quad //$$

2°) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x \cdot \dfrac{dy}{dx} + y = 0$ d.d. genel çöz.

<u>Çözüm:</u> $x = e^t$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} (y'' - y') + e^t \cdot e^{-t} \cdot y' + y = 0$$

$$y'' + y = 0 \quad \text{s.k.l.d.d.}$$

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \mp i$$

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$$

3°)

<u>Örnek:</u> $(x-1)y''' + 2(x-1)^2 y'' - 4(x-1)y' + 4y = \ln(x-1)$

$$\left.\begin{aligned} & x-1 = e^t \Rightarrow t = \ln(x-1) \\ & y' = 1 \cdot e^{-t} Dy \\ & y'' = e^{-2t} D(D-1)y \\ & y''' = e^{-3t} D(D-1)(D-2)y \end{aligned}\right\}$$

$$e^{3t} \cdot e^{-3t} D(D-1)(D-2)y + 2e^{2t} \cdot e^{-2t} D(D-1)y - 4 \cdot e^t \cdot e^{-t} Dy + 4y = t$$

$$D(D-1)(D-2)y + 2D(D-1)y - 4Dy + 4y = t$$

$$(D^3 - D^2 - 4D + 4)y = t$$

$$r^3 - r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$r_1 = 1 \quad r_2 = -2 \quad r_3 = 2$$

$$y_1 = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{2t}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = at + b \\ y_2' = a \\ y_2'' = 0 \\ y_2''' = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} 0 - 0 - 4a + 4at + 4b = t \\ 4a = 1 \Rightarrow a = 1/4 \\ b = 1/4 \end{array}$$

$$y_2 = 1/4\, t + 1/4$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{2t} + \frac{1}{4} t + \frac{1}{4}$$

$$y = c_1 (x-1) + \frac{c_2}{(x-1)^2} + c_3 (x-1)^2 + \frac{1}{4} \left(\ln(x-1) + 1 \right)$$