3.3 Bir Operatörün Spektrumu

(I)

Tanım 3.32

(a) H bir kompleks Hilbert uzayı, $I \in B(H)$ birim operatör ve $T \in B(H)$ olsun. T operatörünün spektrumu $\sigma(T)$ ile gösterilir ve

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ bir tersinir operatör değildir.}\}$$

olarak tanımlanır.

(b) Bir A kare matrisinin spektrumu $\sigma(A)$ ile gösterilir ve

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ bir tersinir matris değildir.}\}$$

Örnek 3.33 H bir kompleks Hilbert uzayı ve I, H üzerindeki birim operatör olsun. Eğer μ herhangi bir kompleks sayı ise $\sigma(\mu I) = \{\mu\}$ dir.

Çözüm. Bir $\tau \in \mathbb{C}$ için τI operatörü $\tau = 0$ olmadıkça tersinirdir. Böylece

$$\begin{aligned}\sigma(\mu I) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu I - \lambda I \text{ tersinir değil}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\mu - \lambda) I \text{ tersinir değil}\} \\ &= \{\mu\}\end{aligned}$$

bulunur.

Lemma 3.34 H bir komp. Hilb. uzayı ve $T \in B(H)$ olsun. Eğer λ, T'nin bir özdeğeri ise o zaman λ, $\sigma(T)$'ye aittir.

İspat. λ bir özdeğer olduğundan $Tx = \lambda x$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $x \in H$ vektörü vardır. Böylece bu $x \in Ker(T-\lambda I)$ olmasını gerektirir. Buradan

$$Ker(T-\lambda I) \neq \{0\} \Rightarrow T-\lambda I \text{ bire-bir değil}$$

olup $T-\lambda I$ tersinir değildir. O halde $\lambda \in \sigma(T)$ olur.

Not: H sonlu boyutlu olduğu zaman $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ bir özd.}\}$

Örnek 3.35 Özdeğeri olmayan operatör.

Tek taraflı $S \in B(\ell^2)$ öteleme operatörünün hiç özdeğeri yoktur.

Çözüm (ℓ^2 sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayıdır.)

λ, S operatörünün bir özdeğeri ve bu özdeğere karşılık gelen sıfırdan farklı özdeğer $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ olsun.

O zaman

$$(Sx =)\ (0, x_1, x_2, x_3, \dots) \overset{*}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots) (= \lambda x)$$

yazılır. Eğer $\lambda = 0$ ise bu denklemin sağ tarafı sıfır vektör olup $0 = x_1 = x_2 = \dots = 0$ yani $x = 0$ olur. Bu ise $x \neq 0$ olması ile çelişir.

$\lambda \neq 0$ ise o zaman $\lambda x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ bulunur. Ancak o zaman $\lambda x_2 = x_1$ den $x_2 = 0$ bulunur. Bu şekilde devam edilirse $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece S operatörünün hiç bir özdeğeri yoktur.

Teorem 3.36 H bir komp. Hilb. uzayı ve $T \in B(H)$ olsun.

(a) $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow \lambda \notin \sigma(T)$

(b) $\sigma(T)$ kapalıdır.

İspat

(a) $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow \|\lambda^{-1} T\| < 1$

$\Rightarrow I - \lambda^{-1} T$ tersinirdir (Teo. 2.40)

$\Rightarrow \lambda I - T$ tersinirdir

$\Rightarrow \lambda \notin \sigma(T)$

(b) $F : \mathbb{C} \to B(H)$ operatörünü $F(\lambda) = \lambda I - T$ olarak tanımlayalım.

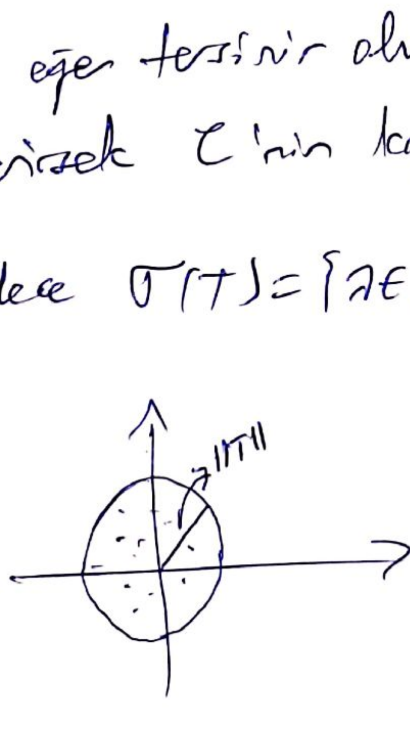
$\|F(\mu) - F(\lambda)\| = \|\mu I - T - (\lambda I - T)\| = |\mu - \lambda|$

$\Rightarrow F$ süreklidir.

Ayrıca $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : F$ tersinir değil$\}$ olup eğer tersinir olmayan operatörlerin kümesini $\mathcal{C}$ ile gösterirsek $\mathcal{C}$'nin kapalı olduğunu biliyoruz. (Sonuç 2.42)

Böylece $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : F(\lambda) \in \mathcal{C}\}$ de kapalıdır.

#2



$\sigma(T)$, bu çember içinde kalan $\mathbb{C}$'nin kapalı sınırlı bir alt kümesi

Teorem 3.37 H bir komp. Hilb. uzay ve $T \in B(H)$ ise O zaman $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$

İspat

$\lambda \notin \sigma(T)$ ise $T - \lambda I$ tersinirdir ve böylece

$(T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda} I$ da tersinirdir (Lemma 3.14).

Bu durumda $\bar{\lambda} \notin \sigma(T^*)$ dir.

Benzer şekilde T yerine T^* alırsak $\bar{\lambda} \notin \sigma(T^*)$ ise

$\lambda \notin \sigma(T)$ olduğu elde edilir.

Bu nedenle $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$ olmalıdır.

#3 Bu sonuçlar kullanılarak tek-taraflı öteleme operatörü için

$\sigma(S)$ bulunabilir.

Örnek 3.38. $S : l^2 \to l^2$ tek-taraflı öteleme operatörü olsun. O takdirde,

(a) ~~Eğer~~ $\lambda \in \mathbb{C}$ ($|\lambda| < 1$) ise λ, S^*'in bir özdeğeridir;

(b) $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$

Çözüm.

(a) $|\lambda| < 1$ ile $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. $S^*(\{x_n\}) = \lambda\{x_n\}$ olacak şekilde

sıfırdan farklı bir $\{x_n\} \in l^2$ vektörü bulmak zorundayız.

$$S^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

olup $\quad (x_2, x_3, x_4, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$

yani tüm $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = \lambda x_n$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\{x_n\} \in \ell^2$ bulmamız gerekir.

Bu denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözümü $\{x_n\} = \{\lambda^{n-1}\}$ dir. Burada $|\lambda| < 1$ olduğu için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} < \infty$$

(geometrik seri)

olarak $\{x_n\} \in \ell^2$ bulunur. Böylece $S^*(\{x_n\}) = \lambda\{x_n\}$ ve dolayısıyla λ, $\{x_n\}$ özvektörü ile S^*'ın bir özdeğeridir.

(b) (a) kısmından ve Lemma 3.34'ten

$$(*) \quad \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(S^*)$$

olduğu görülür. Böylece Lemma 3.37'den de

$$(**) \quad \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(S)$$

olur. Ancak elementer geometriden $(*)$ ve $(**)$ kümeleri eşit olup buradan $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(S)$ bulunur.

$\sigma(S)$ kapalı olduğundan $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \subseteq \sigma(S)$ çıkar.

Diğer yandan eğer $|\lambda| > 1$ ise (yine) Teorem 3.36'dan $\lambda \notin \sigma(S)$ dir. Çünkü $\|S\| = 1$ dir.

Sonuç olarak

$$\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$$

bulunur.

Teorem 6.39 H bir komp. Hilb. uzayı ve $T \in B(H)$ olsun.

(a) p polinomu için $\sigma(p(T)) = \{p(\mu) : \mu \in \sigma(T)\}$.

(b) T tersinir ise $\sigma(T^{-1}) = \{\mu^{-1} : \mu \in \sigma(T)\}$

İspat.

(a) $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $q(z) = \lambda - p(z)$ olsun. q bir polinom olup onun $c \neq 0$ ile $c, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ için çarpanlara ayrışımı

$$q(z) = c(z - \mu_1)(z - \mu_2) \cdots (z - \mu_n)$$

şeklinde vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
\lambda \notin \sigma(p(T)) &\Longleftrightarrow \lambda I - p(T) \text{ tersinir} \\
&\Longleftrightarrow q(T) \text{ tersinir} \\
&\Longleftrightarrow c(T - \mu_1 I)(T - \mu_2 I) \cdots (T - \mu_n I) \text{ tersinir} \\
&\Longleftrightarrow T - \mu_j I \ (1 \leq j \leq n) \text{ tersinir (Lemma 2.35)} \\
&\Longleftrightarrow q\text{'nun } \sigma(T) \text{ içinde bir sıfırı yok} \\
&\Longleftrightarrow q(\mu) \neq 0, \ \forall \mu \in \sigma(T) \text{ için} \\
&\Longleftrightarrow \lambda \neq p(\mu), \ \forall \mu \in \sigma(T) \text{ için}
\end{aligned}$$

Böylece $\sigma(p(T)) = \{p(\mu) : \mu \in \sigma(T)\}$

bulunur.

(b) T tersinir olduğundan $0 \notin \sigma(T)$ dir.

Böylece $\sigma(T^{-1})$ 'in herhangi bir elemanı bir $\mu \in \mathbb{C}$ için μ^{-1} olarak yazılabilir.

$$\mu^{-1}I - T^{-1} = -T^{-1}\mu^{-1}(\mu I - T)$$

ve $-T^{-1}\mu^{-1}$ tersinir olduğundan

$$\begin{aligned} \mu^{-1} \in \sigma(T^{-1}) &\iff \mu^{-1}I - T^{-1} \text{ invertible değil} \\ &\iff -T^{-1}\mu^{-1}(\mu I - T) \text{ tersinir değil} \\ &\iff \mu I - T \text{ de tersinir değil} \\ &\iff \mu \in \sigma(T) \end{aligned}$$

Böylece $\sigma(T^{-1}) = \{\mu^{-1} : \mu \in \sigma(T)\}$

bulunur.

Notasyon: H komp. Hilb. uzay ve $T \in B(H)$ olsun. Bir p polinomu için $\{p(\mu) : \mu \in \sigma(T)\}$ kümesi

$$p(\sigma(T))$$

ile gösterilecektir.

(II)

Bir sonraki sonuç üniter operatörlerin spektrumları ile ilgilidir.

Lemma 3.40 H bir komp. Hilb. uzayı ve $U \in B(H)$ bir üniter operatör olsun. Bu durumda

$$\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

İspat.

U üniter

$$\|U\| = 1 \Rightarrow \sigma(U) \overset{①}{\subseteq} \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \quad \text{(Teo. 3.36)}$$

$$\|U^*\| = 1 \Rightarrow \sigma(U^*) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$$

U^* da üniter

Tanımdan

$$U^* = U^{-1} \Rightarrow \sigma(U) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(U^*)\} \quad \text{(Teo. 3.39)}$$

$$\overset{②}{\subseteq} \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 1\}$$

① ve ② den $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ bulunur.

Tanım 3.41 H bir komp. Hilb. uzayı ve $T \in B(H)$ olsun.

(i) T'nin spektral yarıçapı $\rho(T)$ ile gösterilir ve

$$\rho(T) = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(T) \}$$

şeklinde tanımlanır.

(ii) T'nin sayısal bölgesi $V(T)$ ile gösterilir ve

$$V(T) = \{ (Tx, x) : \|x\| = 1 \}$$

şeklinde tanımlanır.

A bir $n \times n$ matris olsun.

(i) A'nın spektral yarıçapı $\rho(A)$ ile gösterilir ve

$$\rho(A) = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \}$$

şeklinde tanımlanır.

(ii) A'nın sayısal bölgesi $V(A)$ ile gösterilir ve

$$V(A) = \{ (Ax, x) : x \in \mathbb{C}^n \text{ ve } \|x\| = 1 \}$$

Önce normal operatörler için ve sonra da kendine-eş operatörler için spektrum sonuçlarını göreceğiz.

Lemma 3.42 H bir Hilbert uzayı (komp.) ve $T \in B(H)$ olsun. O takdirde,

$$\sigma(T) \subseteq \overline{V(T)}$$

dir.

İspat. $\lambda \in \sigma(T)$ olsun. $T-\lambda I$ normal operatör olup Sonuç 3.20 den $\|x_n\|=1$ $(n \in \mathbb{N})$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \|(T-\lambda I)x_n\| = 0$ olacak şekilde H de bir $\{x_n\}$ dizisi vardır.

Böylece Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to\infty} ((T-\lambda I)x_n, x_n) = 0$$

bulunur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} (Tx_n, x_n) - \lambda \underbrace{(x_n, x_n)}_{1} = 0$$

yazılır. O halde

$$\lim_{n\to\infty} (Tx_n, x_n) = \lambda$$

bulunur. Bu nedenle $\lambda \in \overline{V(T)}$ elde edilir.

Teorem 3.43 H bir komp. Hilb. uzayı ve $S \in B(H)$ kendine-eş olsun.

(a) $V(S) \subseteq \mathbb{R}$, (b) $\sigma(S) \subseteq \mathbb{R}$,

(c) $\|S\|$ ya da $-\|S\|$ den en az birisi $\sigma(S)$ içindedir

(d) $r(S) = \sup\{|\tau| : \tau \in V(S)\} = \|S\|$

(e) $\inf\{\lambda : \lambda \in \sigma(S)\} \leq \mu \leq \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma(S)\}$ Tüm $\mu \in V(S)$ için

İspat.

(a) S kendine-eş $\Rightarrow (Sx, x) = (x, Sx) = \overline{(Sx, x)}$, $\forall x \in H$

Böylece $\forall x \in X$ için $(Sx, x) \in \mathbb{R}$ ve dolayısıyla $V(S) \subseteq \mathbb{R}$ bulunur.

(b)

$$\sigma(S) \subseteq \overline{V(S)} \quad \text{(bir önceki lemma)}$$

$$\Rightarrow \sigma(S) \subseteq \mathbb{R} \quad \text{((a) şıkkından)}$$

(c) $S = 0 \Rightarrow$ sonuç doğrudur.

$\|S\| = 1$ kabul edelim. Norm tanımından

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \|Sx_n\| = 1$$

olacak şekilde H de bir $\{x_n\}$ dizisi vardır. O halde

$$\begin{aligned}
\|(I - S^2)x_n\|^2 &= ((I - S^2)x_n, (I - S^2)x_n) \\
&= \|x_n\|^2 + \|S^2 x_n\|^2 - 2(S^2 x_n, x_n) \\
&\leq 2 - 2(S^2 x_n, x_n) = 2 - 2(Sx_n, Sx_n) \\
&= 2 - 2\|Sx_n\|^2
\end{aligned}$$

olup $\lim_{n\to\infty} \|(I - S^2)x_n\|^2 = 0$ ve böylece $1 \in \sigma(S^2)$

bulunur. Teo. 3.39 dan $1 \in (\sigma(S))^2$ ve böylece 1 ya da -1

$\sigma(S)$ ye ait olur.

(d) (c) şıkkından lemma 3.42 ve C-S eşitsizliğinden

$$\|S\| \leq r_\sigma(S) \leq \sup\{|z| : z \in V(S)\} \leq \|S\|$$

yazılır. Böylece bu eşitsizliklerin her biri bir eşitliktir.

(e)

Sonuç 3.44 (a) A kendine-eş bir matris ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ bu matrisin özdeğerleri olsun. O takdirde

$$\|A\| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}$$

(b) B bir kare matris ise B^*B kendine-eştir ve $\|B\|^2 = \|B^*B\|$ dir.

İspat. (a) Bir önceki teoremden $\sigma(A)$ sadece özdeğerlerden oluştuğu için

$$\|A\| = r_\sigma(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}$$ bulunur.

(b) Teo. 3.10 dan ve lemma 3.26 dan direk yazılır.

Alıştırmalar 3.3

① $T \in B(l^2)$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \ldots)$

(a) 1 ve −1 T nin özdeğerleri ve karşılık gelen özvektörler $(1,0,0,\ldots)$ ve $(0,1,0,\ldots)$ olduğunu gösteriniz

(b) T^2'yi bulunuz ve böylece $\sigma(T) = \{-1, 1\}$ old. göst.

② $S \in B(l^2)$ tek-taraflı öteleme op. olsun. $S^*S = I$ olduğunu ancak $\lambda = 0$, SS^* in bir özdeğeri olduğunu gösteriniz

Çözümler

①

~~(c) (10 points) Find an orthonormal basis for S.~~

(3) $c=\{c_n\}\in \ell^\infty$ ve $T_c\in B(\ell^2)$, $T_c(\{x_n\})=\{c_n x_n\}$

(a) $c_m\in\{c_n : n\in\mathbb{N}\}$ ve $\{e_n\}$, ℓ^2 de birim baz vektörler.

$\lambda=c_m$, T_c nin e_m özvektörü ile bir özdeğeridir.

(b) $\overline{\{c_n : n\in\mathbb{N}\}}\subseteq\sigma(T_c)$ old. gösteriniz

Çözümler

~~(b) (5 points) Let~~

$$v=\begin{pmatrix}1\\5\\-1\\1\end{pmatrix}$$

~~find the projection p_S of v on S.~~

(a)

~~(c) (5 points) Show that p_S and $v-p_S$ are orthogonal.~~

(b)

~~diagonalizing matrix X and a diagonal matrix D such that $A = XDX^{-1}$.(Clearly multiply XDX^{-1} to show this equality)~~

(4) $T \in B(\ell^2)$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)$ olsun.

(a) $(T^*)^2 = ?$, $|\mu| < 4$ olmak üzere $(T^*)^2 x = \mu x$, $x \neq 0$ old. göst.

(b) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 2\}$

Gösterinde

(b) (5 points) Find A^{73} in terms of X, D, and X^{-1}.

~~is a subspace in R^4. Find a basis for $S^\perp$, the orthogonal complement of S in R^4.~~

5 (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ve (b) $= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B$ matrislerinin normlarını bulunuz.

6 $S \in B(H)$ kendine eş ise S^n de kendine eştir ve $\|S^n\| = \|S\|^n$ sağlanır.

(7) $S \in B(H)$ kendine-eş olsun.
Eğer $\sigma(S)=\{\lambda\}$ ise $S=\lambda I$ olmalıdır.

(8) $T \in B(\ell^2)$, $T \neq 0$ ancak $\sigma(T)=\{0\}$ olacak şekilde T operatörünü bulunuz.

$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, x_1, 0, x_3, 0, \dots)$ olsun.

(a) (5 points) Find A^{73} in terms of X, D, and X^{-1}.