

Yıldız Teknik Üniversitesi
Matematik Bölümü
2019-2020 Bahar Dönemi
Lineer Operatörlere Giriş
Final Sınavı

Çözümler

1. H ve K Hilbert uzayları ve $T : H \rightarrow K$ sınırlı lineer bir operatör olsun. T^* adjoint operatörünün lineer, sınırlı olduğunu ve $\|T\| = \|T^*\|$ olduğunu gösteriniz.

1) $y_1, y_2 \in K$ ve $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$ olsun. $x \in H$ için (3.1) den

$$\begin{aligned}
 (x, T^*(\alpha y_1 + \mu y_2)) &= (Tx, \alpha y_1 + \mu y_2) \\
 &= \overline{\alpha} (Tx, y_1) + \overline{\mu} (Tx, y_2) \\
 &= \overline{\alpha} (\underbrace{Tx}_{T^*(y_1)}, T^*(y_1)) + \overline{\mu} (\underbrace{Tx}_{T^*(y_2)}, T^*(y_2)) \\
 &= \overline{\alpha} (x, T^*(y_1)) + \overline{\mu} (x, T^*(y_2)) \\
 &= (x, \underbrace{\alpha T^*(y_1) + \mu T^*(y_2)}_{T^*(\alpha y_1 + \mu y_2)})
 \end{aligned}$$

8

Yani $T^*(\alpha y_1 + \mu y_2) = \alpha T^*(y_1) + \mu T^*(y_2)$ olarak T^* lineerdir.

(ii) $\|T^*(y)\|^2 = (T^*(y), T^*(y))$ Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
 &= (TT^*(y), y) \leq \|TT^*(y)\| \|y\| \\
 &\leq \|T\| \|T^*(y)\| \|y\|
 \end{aligned}$$

bulunur. $\|T^*(y)\| = 0$ ise eşitlik sağlanır ve dolayısıyla

$\|T^*(y)\| > 0$ ise sonucu olarak $\|T^*(y)\| \leq \|T\| \|y\|$

elde edilir. 0 halde T^* sınırlıdır.

8

$$(b) \quad \|T^*(y)\|^2 = |\langle T^*y, T^*y \rangle| = |\langle TT^*y, y \rangle| \leq \|TT^*y\| \|y\|$$

y ∈ K ise

$$\leq \|T\| \|T^*y\| \|y\|$$

$$\Rightarrow \|T^*(y)\| \leq \|T\| \|y\| \Rightarrow \|T^*\| \leq \|T\| \quad (1) \quad (5)$$

Bu sonucu $(T^*)^*$ 'a uygulayarak ve (a) 'daki sonucu kullanarak

$$\|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$$

$$\Rightarrow \|T\| \leq \|T^*\| \quad (2)$$

(1) ve (2) den $\|T^*\| = \|T\|$ bulunur.

(4)

2. $S \in B(l^2)$ operatörü $S(x) = (0, 0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ şeklinde veriliyor. S^* operatörünü bulunuz. S operatörünün normal olup olmadığını gösteriniz. S operatörünün özdeğerleri için ne söylenebilir.

$$(Sx, y) = (x, S^*y) \quad z = S^*y \text{ olsun.}$$

$$(0, 0, x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots) = (x, z)$$

$$x_1 \bar{y}_3 + x_2 \bar{y}_4 + x_3 \bar{y}_5 + \dots = x_1 \bar{z}_1 + x_2 \bar{z}_2 + x_3 \bar{z}_3 + \dots$$

$$z_1 = y_3, z_2 = y_4, z_3 = y_5, \dots$$

$$\Rightarrow S^*(y_1, y_2, y_3, \dots) = (y_3, y_4, y_5, \dots) \quad (8)$$

$$(S^*Sx) = S^*(0, 0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$(SS^*x) = S(x_3, x_4, x_5, \dots) = (0, 0, x_3, x_4, \dots)$$

$$S^*S \neq SS^* \Rightarrow S \text{ normal değil.} \quad (8)$$

$$(0, 0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots) \quad (2)$$

(i) $\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_3 = 0, x = 0$
 Oysa $x \neq 0$ olması bu çelişki (3)

(ii) $\lambda \neq 0$ olsun. $x_1 = x_2 = 0$ ve
 $\lambda x_3 = x_1$ ve $\lambda x_4 = x_2 \Rightarrow x_3 = x_4 = 0$
 Bu şekilde devam edilirse $x_i = 0$ bul.
 yine $x = 0$ olur ki bu
 $x \neq 0$ olması ile çelişir. (3)

Sonuç olarak S için en iyi çözüm
 yoktur. (1)

3. $U \in B(H)$ üniter operatörü için U^* , U^{-1} ve U^2 operatörleri üniter operatörler midir? Gösteriniz.
 $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ olduğunu gösteriniz.

$U_1 = U_2 = U$ alalım.

$$(a) \begin{cases} U^* U^{**} = U^* U = I \\ U^{**} U^* = U U^* = I \end{cases}$$

$\Rightarrow U^*$ üniterdir. (6)

$$(b) \begin{cases} (UU)^*(UU) = U^* \underbrace{U^* U}_I U = U^* U = I \\ (UU)(UU)^* = I \end{cases} \quad U^2 \in \mathcal{U} \quad (6)$$

$$\Rightarrow UU \in \mathcal{U}$$

$$U \text{ üniter} \Rightarrow (U)^* = (U)^{-1} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U} \quad (6)$$

İspat.

U üniter

$$\|U\| = 1 \Rightarrow \sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \quad (\text{Teo. 3.36})$$

U^* da üniter

$$\|U^*\| = 1 \Rightarrow \sigma(U^*) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$$

tanımdan $U^* = U^{-1} \Rightarrow \sigma(U) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(U^*)\} \quad (\text{Teo. 3.39})$

$$\subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 1\}$$

(7)

① ve ② den $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ bulunur.

4. $T \in B(l^2)$; $T(x) = (-x_1, x_2, -x_3, x_4, \dots)$ operatörünün özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz. T^2 'yi kullanarak $\sigma(T)$ spektrumunu bulunuz.

① (a) $(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots) \in l^2$ dir.

⑤ • $T(1, 0, 0, \dots) = (-1, 0, 0, \dots) = -1 \cdot (1, 0, 0, \dots)$ dyp
 $-1, (1, 0, 0, \dots)$ özvektör ile T nin bir öz d. dir.

⑤ • $T(0, 1, 0, \dots) = (0, 1, 0, \dots) = 1 \cdot (0, 1, 0, \dots)$ dyp
 $1, (0, 1, 0, \dots)$ özvektör ile T nin bir öz d. dir.

(b) $T^2(x_1, x_2, x_3, \dots) = T(x_1, -x_2, x_3, \dots)$
 $= (x_1, x_2, x_3, \dots)$

$\Rightarrow T^2 = I$ ⑤

$\Rightarrow \sigma(T^2) = \{1\}$

$\sigma(T^2) = (\sigma(T))^2$ ⑤

$\Rightarrow \sigma(T) \subseteq \{-1, 1\}$

$\{-1, 1\} \subseteq \sigma(T)$ (a) dan

$\Rightarrow \sigma(T) = \{-1, 1\}$ ⑤

5. H bir Hilbert uzayı ve $A \in B(H)$ operatörü tersinir ve pozitif olsun. A^{-1} ters operatörünün pozitif olduğunu gösteriniz.

A kendine-eş $\Rightarrow A^{-1}$ kendine eş. (5)

A pozitif old. dan $\forall \lambda \in \sigma(A)$ için $\lambda \geq 0$ dir. (5)

Böylece

$$\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\} \subseteq [0, \infty) \quad (10)$$

Olup bu da A^{-1} pozitif demektir. (5)