

3.4 Pozitif Operatörler ve İzdeğerler

Eğer H bir kompleks Hilbert uzayı ve $S \in B(H)$ kendine-eş bir operatör ise

$$(a) \quad \sigma(S) \subseteq [0, \infty)$$

$$(b) \quad (Sx, x) \geq 0 \quad (\forall x \in H \text{ için})$$

Koşullarının eşdeğer olduğu biliniyor (Teo. 3.43).
Bu konuda bu koşullardan herhangi birini sağlayan kendine-eş operatörleri daha ayrıntılı göreceğiz

Tanım 3.45

(a) H bir komp. Hilb. uzayı ve $S \in B(H)$ kendine-eş olsun.

Eğer $\forall x \in H$ için

$$(Sx, x) \geq 0$$

ise S ye pozitif operatör denir.

(b) Kendine-eş, $n \times n$ -A matrisine eğer tüm $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$(Ax, x) \geq 0$$

ise pozitifdir denir.

Lemma 3.46

(a) H komp. Hilb. uzayı ve $S \in B(H)$ kendine-eş olsun. O tat. de

$$S \text{ pozitifdir} \iff \sigma(S) \subseteq [0, \infty)$$

(b) Kendine-eş, $n \times n$ -A matrisi pozitifdir $\iff \sigma(A) \subseteq [0, \infty)$

Örnek 3.47 H komp. bir Hilb. uzayı, $R, S \in B(H)$ pozitif operatörler, $T \in B(H)$ ve α bir pozitif reel sayı olsun.

- (a) 0 ve I pozitif operatörlerdir.
 (b) T^*T pozitifdir.
 (c) $R+S$ ve αS pozitif operatörlerdir.

Çözüm. (a) I ve 0 operatörleri kendine-eştir.

$x \in H$ için

$$(Ix, x) = (x, x) \geq 0$$

ve

$$(0x, x) = (0, x) = 0$$

olup I ve 0 pozitifdir.

(b) T^*T kendine-eş operatör olup her $x \in H$ için

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) \geq 0$$

yani T^*T pozitif olur.

(c) $R+S$ ve αS operatörleide kendine-eştir. Böylece

$$\forall x \in H \text{ için } ((R+S)x, x) = \underbrace{(Rx, x)}_{\geq 0} + \underbrace{(Sx, x)}_{\geq 0} \geq 0$$

ve

$$((\alpha S)x, x) = \alpha (Sx, x) \geq 0$$

olup $R+S$ ve αS pozitifdirler.

3

#1 Bir S pozitif operatörün $S \geq 0$ sembolüyle ve $S-R$ pozitif operatöründe $S \geq R$ ile gösterilir.

#2 Pozitif olmayan kendine eş operatörler vardır.

Örnek 3.48

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

A 'nın özdeğerleri ± 1 dir. Böylece $\sigma(A) = \{-1, 1\}$ dir.
0 halde ne A ne de $-A$ pozitifdir.

Tanım 3.49

(a) X bir lineer uzay ve $P: X \rightarrow X$ bir lineer op. olsun.
Eğer $P^2 = P$ ise P 'ye X üzerinde bir izdüşüm denir.

(b) H bir komp. Hilb. uzayı ve $P \in B(H)$ olsun.
Eğer $P = P^* = P^2$ ise P ye H üzerinde bir ortogonal izdüşüm denir.

#3 0 ve I operatörleri H üzerinde ortogonal izdüşümlerdir.

Örnek 3.50 $P: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $P(x, y, z) = (x, y, 0)$ ($(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$)
bir operatör = bir ortogonal izdüşümdür.

Gerekten $\mathbb{C}^3$ sonlu-bayraklı olup $P \in B(\mathbb{C}^3)$ dir.

$$P^2(x, y, z) = P(P(x, y, z)) = P(x, y, 0) = (x, y, 0) = P(x, y, z)$$

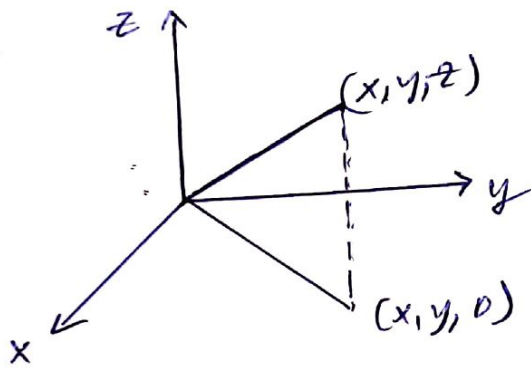
$$\Rightarrow P^2 = P \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned}
 (P(x, y, z), (u, v, w)) &= ((x, y, 0), (u, v, w)) \\
 &= x\bar{u} + y\bar{v} = ((x, y, z), (u, v, 0)) \\
 &= ((x, y, z), P(u, v, w))
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow P$ kendine-es.

P kendine-es, sınırlı bir izdüşüm yani bir ortogonal izdüşümdür.

P nin $\mathbb{R}^3$ üzerindeki etkisi' geometrik olarak:



P nin matris gösterimini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorem 3.51 H bir komp. Hilb. uzayı olsun.

- (a) $M \subseteq H$ kapalı bir lineer altuzay ise o takdirde
örüntü kümesi M , seçildiği $M^\perp$ olan $\|P_M\| \leq 1$ olacak
şekilde bir $P_M \in B(H)$ ortogonal izdüşüm vardır.
- (b) Eğer $Q \in B(H)$ bir ortogonal izdüşüm ise o takdirde
 $\text{Im } Q$ kapalı bir altuzay olup $Q = P_{\text{Im } Q}$ dir.

Teorem 3.52 H bir komp. Hilbert uzayı, M, H nin bir
kapalı lineer altuzayı ve $P: H \rightarrow M$ örten bir ortogonal izd.
olsun. O takdirde $I - P: H \rightarrow M^\perp$ örten bir ortogonal izd. dir.

İspat H bir komp.

I ve P kendine-es $\Rightarrow I - P$ kendine-es

$$P^2 = P \Rightarrow (I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P \quad \text{izdüşüm}$$

$\Rightarrow I - P$ ortogonal izdüşümdür.

Eğer $x \in H$ ve $x = y + z$ ($y \in M, z \in M^\perp$) bir ortogonal
ayrışım ise o zaman $P(x) = y$ ve böylece

$$(I - P)(x) = x - y = z$$

olur. Dolayısıyla

$$I - P: H \rightarrow M^\perp$$

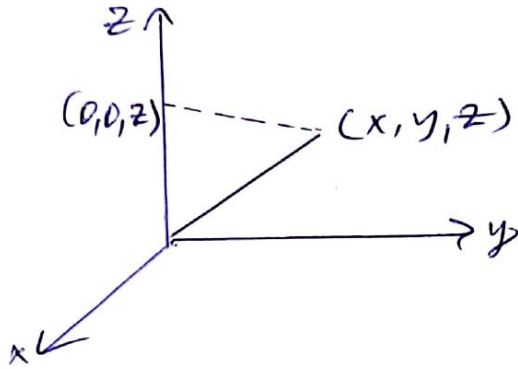
örten bir ortogonal izdüşümdür.

Son örnekteki P ortogonal izdüşümü için

$$I-P,$$

$$(I-P)(x, y, z) = (0, 0, z)$$

şeklinde verilir ve bu $\{(0, 0, z) : z \in \mathbb{C}\}$ alt uzayı üzerine öten bir ortogonal izdüşümdür.



Sorun 3.53 H komp. Hilb. uz. ve $M \subseteq H$ kapalı alt uzay olsun. Eğer $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, M için bir ortonormal taban ve $P : H \rightarrow M$ öten bir ortogonal izdüşüm ise o zaman

$$P_x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

Tanım 3.54 (a) H komp. Hilb. uz. ve $T \in B(H)$ olsun.

$R^2 = T$ olarak şekilde $R \in B(H)$ operatörüne T operatörün bir karekökü denir. (Karekök operatör)

(b) A bir $n \times n$ matris olsun. O zaman A nın karekökü

$B^2 = A$ olarak şekilde bir B matrisidir.

Örnek 3.55 λ_1 ve λ_2 pozitif sayılar için

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = A \text{ dir.}$$

Örnek 3.56 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = A$ olacak şekilde varsa 2×2 -B matrisini bulunuz.

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ve } B^2 = A \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} a^2 + bc = 0 \quad \textcircled{2} b(a+d) = 1$$

$$\textcircled{3} c(a+d) = 0 \quad \textcircled{4} d^2 + bc = 0$$

$$\Rightarrow \textcircled{2} \underbrace{b(a+d)}_{\neq 0} \neq 0 \Rightarrow \underbrace{c(a+d)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c = 0$$

$\Rightarrow \textcircled{1}$ ve $\textcircled{4}$ den $a=d=0$ olur. Bu ise $\textcircled{2}$ denklemini ile çelişir. O halde böyle bir B matrisi yoktur.

Lemma 3.57 H bir komp. Hilb. uz. ve $S, B(H)$ nin tüm kendine-eş operatorlerin Banach uzayı olsun.

Eğer $\Phi \in S$ ise o zaman

$$(a) \Phi(p) = p(S) \quad (p, C_R(\overline{\sigma}(S)) \text{ de bir polinom})$$

$$(b) \Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g) \quad (\forall f, g \in C_R(\overline{\sigma}(S)))$$

olacak şekilde $\Phi \in B(C_R(\overline{\sigma}(S)), S)$ vardır.

Teorem 3.58 Bir önceli lemmada $S \in S$ pozitif olsun.

(a) S operatorinin S deki polinomların bir dizisi olan bir R_n ^{pozitif} kare kökü vardır.

(b) Eğer $\mathcal{B}, S$ nin bir pozitif kare kökü ise $R = \mathcal{B}$ dir.

$S \in B(H)$ pozitif operatörünün tek pozitif kökleri $S^{1/2}$ ile gösterilir.

A pozitif matrisinin tek pozitif kökleri de $A^{1/2}$ ile gösterilir.

Eğer P bir pozitif matris ve U bir üniter matris, öyle ki $U^* P U$ bir D diagonal matris, ise o zaman

$$P^{1/2} = U D^{1/2} U^*$$

Teorem 3.59 H bir komp. Hilb. uzayı ve $T \in B(H)$ tersinir olsun. O takdirde U üniter ve R pozitif olur ve

$$T = UR \quad (\text{Kutupsal ayrışımı})$$

yaşılırı vardır.

İspat ~~XXXXXXXXXX~~ T tersinir $\Rightarrow T^*$ ve $T^* T$ tersinirdir.

$T^* T$ pozitif $\Rightarrow R = (T^* T)^{1/2}$ vardır (Teo. 3.58)

$T^* T$ tersinir $\Rightarrow R$ tersinir (Teo. 3.39)

$U = T R^{-1}$ olsun. U tersinir ve $\text{Im}(U) \stackrel{\text{①}}{=} H$ dir.

Ayrıca $U^* U = (R^{-1})^* T^* T R^{-1} = R^{-1} R^2 R^{-1} \stackrel{\text{②}}{=} I$

$\Rightarrow U$ üniter (Teo. 3.30)

Örnek 3.60

(a) $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin pozitif köklerini bulunuz

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(9-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = x_{\lambda_1} \text{ k-p. özvekt.}$$

$$\lambda_2 = 9, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = x_{\lambda_2} \text{ k-p. özvekt.}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ olsun. } 0 \text{ zaman}$$

$$U^* A U = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \text{ olur. } E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

Bu durumda A 'nın kökleri

$$A^{1/2} = U E U^* = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2-i & 2i-1 \\ 2+i & -1-2i \end{bmatrix} \Rightarrow B$ nin kutupsal ayrışmasını bul.

$$B^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2+i & 2-i \\ -2i-1 & -1+2i \end{bmatrix} \text{ ve } B^* B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow C = (B^* B)^{1/2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow U = B C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = U \cdot C = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Burada son terimin ispatındaki yöntemi kullandık.