Melis Mendi
19525015

Operatör Teori 2 Dersi Ödevi

SOYUT AL-AM UZAYLARI

Tanım: E bir Banach örgüsü olmak üzere,
E'ye:

(i) $x \wedge y = 0$ ile birlikte, her $x, y \in E^+$ için
$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ sağlanırsa AL-uzayı.

(ii) $x \wedge y = 0$ ile birlikte, her $x, y \in E^+$ için
$\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ sağlanırsa AM-uzayı

deriz.

Lemma

Eğer E e birimiyle bir AM-uzayı, F keyfi bir Banach örgüsü ve $T: E \to F$ bir pozitif operatör ise
$\|T\| = \|Te\|$ dir.

Teorem:

Bir E Banach örgüsü; ancak ve ancak onun duali olan E^* AM-uzayı ise bir AL-uzayıdır.

Ve dahası:

(a) E bir AL-uzayı ise E^* bir Dedekind eksiksiz AM-uzayıdır. Ve e^* birimi için $e^*(x) = \|x^+\| - \|x^-\|$ sağlanır.
$(\forall x \in E)$

(b) E e birimiyle bir AM-uzayı ise E^{**} da e birimiyle bir AM-uzayıdır.

İspat: ⓐ ve ⓑ bölümlerini ispatlayacağız.

ⓐ E bir AL-uzayı olsun.
Teoremin ilk kısmından biliyoruz ki E^* bir AM-uzayıdır.
Bir $e^*: E^+ \to \mathbb{R}$ fonks. ele alalım. $e^*(x) = \|x\|$ ile tanımlı olsun.

E, AL-uzayı olduğundan e^* toplamsaldır ve Teorem 1.15'e göre $e^*(x) = \|x^*\| - \|x^{-}\|$ dır.
(kitaba göre)

ⓑ Kabul edelim ki E e birimiyle AM-uzayı olsun.
e'nin AM-uzay olan E^{**} için de birim olduğunu kanıtlarız.
Bunu görmek için $\|x^*\| = x^*(e) = e(x^*)$ olduğunu yazalım
$(\forall x \in E^*_+)$

$x^{**} \in E^{**}_+$ olursa her $x^* \in E^*_+$ için
$x^{**}(x^*) \leq \|x^{**}\| \cdot \|x^*\| = \|x^{**}\| \, e(x^*)$ olur.

Bu da $x^{**} \leq \|x^{**}\| . e$ demektir ki e'nin birim olduğunu kanıtlar.

⊛ Hatırlatma:
Esas ideal, Riesz uzayında u vektörüyle üretilir.
(E vektör alt uzayı)
$E_u = \{x \in E : \ \|x\| \leq \lambda . |u|$ olac. şek. $\lambda \geq 0$ vardır$\}$
$\Rightarrow$ Yani E Banach örgü olduğu zaman AM-uzayının yapısını alır.

Teorem:

E bir Banach örgü ve E_u u vectörüyle üretilen esas ideal olsun.

E_u ; $\|x\|_\infty = \inf\{\lambda \geq 0 \ |x| \leq \lambda |u|\}$ normu altında ve $|u|$ birimiyle bir AM-uzayıdır.

(*) Sonraki iki sonuç; AL ve AM-uzaylarını fonksiyon uzayları olarak görebileceğimizi söyler.

Teorem: (Kakutani-Bohnenblust-Nakano)

Bir Banach örgüsü; ancak ve ancak $L_1(\mu)$ uzayına izometrik olduğu zaman AL-uzayı olur.

Teorem: (Kakutani-Bohnenblust-Krein)

Bir E Banach örgüsü; ancak ve ancak E bir $C(\Omega)$-uzayına izometrik olduğunda bir AM-uzayıdır.

(Ω: kompakt Hausdorff uzayı, sabit fonk. 1 Ω'da)

Buna ek olarak;

Bir E Banach örgüsü; ancak ve ancak E, $C(\Omega)$ uzayının kapalı bir alt kapalı örgüsüne izometrik olduğunda bir AM-uzayıdır.

(*) **Sonuç:**

Her AL-uzayının sürekli bir normu vardır.

Lemma: E bir KB-uzayı veya Dedekind tam AM-uzayı ise (birim elemanla) o zaman bir $P: E^{**} \to E^{*}$ pozitif projeksiyonu vardır.

Teorem:

KB-uzayı?

Farz edelim ki F ~~Dedekind tam AM-uzayı~~ veya E AL uzayı, F KB-uzayı olsun.

O zaman E'den F'ye her sürekli operatör regülerdir (analitiktir?)

$\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}_r(E,F)$ özel olarak; her $T \in \mathcal{L}(E,F)$ $|T|$'yi sağlıyor.

İspat:

Kabul edelim ki: F bir Dedekind tam AM-uz. (birimle) ve $T: E \to F$ herhangi bir sürekli operatör.

T; E'nin birim yuvar U_E'yi norm sınırlı bir F alt kümesine götürdüğü için, $T(U_E)$ sınırlı olması gerekir. Dolayısıyla T sınırlıdır. (order bounded?)

F bir Dedekind tamlanışı ve T de regüler operatör olduğundan $|T|$ modülü vardır.

Şimdi de kabul edelim ki E bir AL-uzayı ve F bir KB-uzayı olsun. Bir keyfi $T \in \mathcal{L}(E,F)$ alalım.

O zaman $T^*: F^* \to E^*$ ve E^*, birimle bir Dedekind tam AM-uzayı olur. Önceki kuraldan da T^* regüler olur. Bu da bize $T^{**}: E^{**} \to F^{**}$'in da regüler operatör olduğunu söyler.

İki pozitif operatör seçelim. $A, B: E^{**} \to F^{**}$ şeklinde olsun. Ve $T^{**} = A - B$ olsun.

Lemma 3.8'den (kitaba göre) bir $P: F^{**} \to F$ projeksiyonu vardır.

PA, PB de E^{**}'dan F'ye iki pozitif operatör olur. Ve $T = PA - PB$ E'de sağlanmış olur. Bu da bize T'nin regüler operatör olduğunu gösterir.

Sonuç: Kabul edelim ki $T: E \to F$:
F'nin birimli Dedekind tam AM-uzayı olduğu veya E'nin AL-uzayı ve F'nin KB-uzayı olduğu yerde sürekli operatör olsun.

$\|T\| = \|T\|_r$ dir. (operatör normuyla, r-norm)

İspat:

Kabul edelim ki birimli bir Dedekind tam AM-uzayı Teorem 3.6'ya (kitaba göre) göre Ω kompak uzayı için $F = C(\Omega)$.

Teorem 3.9 da kurulan operatör $|T|: E \to F$ vardır ve

$$\|T\|_r = \||T|\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \||T|x\|_\infty$$

Bir $\varepsilon > 0$ sabitleyelim ve x birim vektörünü alalım. $x \in E^+$
$\||T|x\|_\infty > \|T\|_r - \varepsilon$

$\||T|x\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} (|T|x)(\omega)$ olduğundan Ω'nın

$(|T|x)(\omega) > \|T\|_r - \varepsilon$ olacak şekilde V alt kümesini bulabiliriz. (Her $\omega \in V$ için)

Riesz-Kantorovich formülünden,

$$|T|x = \sup\{Tu : -x \leq u \leq x\}$$

bir $u \in [-x, x]$ ve bir $\omega_0 \in V$ noktasının

$(|T|u)(\omega_0) > \|T\|_r - \varepsilon$ olacak şekilde varlığını gösterir.

Bu da bize $\|Tu\|_\infty > \|T\|_r - \varepsilon$ olduğunu söyler.

$\|T\| > \|T\|_r - \varepsilon$ olur.

$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\|T\| \geq \|T\|_r$ dir.

$\|T\| \geq \|T\|_r$ her zaman doğru olduğundan $\|T\| = \|T\|_r$ dir.

Şimdi de kabul edelim ki E bir AL-uzayı ve F bir KB-uzayı olsun.

$|T|: E \to F$ modülü (Teorem 3.9 dan) vardır. Ve Teorem 2.28 bize $|T|^* = |T^*|$ olduğunu garantiler.

E^* birimli bir Dedekind AM-uzayı olduğundan $\| |T^*| \| = \|T^*\|$ dir ve

$$\|T\|_r = \| |T| \| = \| |T|^* \| = \| |T^*| \| = \|T^*\| = \|T\|$$

Teorem:

(1) AL-uzayları arasındaki her zayıf kompakt operatörün bir zayıf kompakt modülü vardır.
(weakly compact)

(2) Bir AM-uzayından Dedekind tam AM-uzayına giden her zayıf kompak operatör zayıf kompakt modüle sahiptir.

Lemma: A, AM-uzayının normlu bir tümel sınırlı alt kümesi ise;

(1) E'nin D alt kümesi de normlu tümel sınırlıdır.

(Burada D; A'nın sonlu alt kümelerinin supremumlarından oluşuyor)

(2) sup A E'de vardır.

(3) $\sup A \in \overline{D}$

Teorem :

$T: E \to F$ iki Banach örgü arasında kompakt operatör olsun.

a) F bir AM-uzayı ya da

b) E bir AL-uzayı ve F bir KB-uzayı olursa

T bir kompakt modüle sahiptir (Riesz - Kantorovich formülü)

$|T|x = \sup\{Ty : y \in E$ ve $|y| \leq x\}$

Tanım :

u ve v birimleriyle verilen $T: E \to F$ pozitif operatörü AM - uzayları arasında bir pozitif operatörü olsun.

Eğer $Tu = v$ sağlanırsa bu operatöre "Markov operatör" denir.

Tanım :

$T: E \to F$, AL-uzayları arasında bir pozitif operatör olsun.

Eğer $\|Tx\| = \|x\|$ sağlanıyorsa T'ye "skotastik op" denir.
($\forall x \in E^+$ için)