

2017 Final Sorusu:

$a > 0$ olmak üzere $6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x}$ eşitliğini sağlayan

f fonksiyonu ve a sayısını bulunuz.

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x} \quad \xrightarrow{\text{Türev}} \quad \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \boxed{f(x) = x^{3/2}}$$

$\downarrow x=a$ yazarsak

$$6 + \int_a^a \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{a} \Rightarrow 3 = \sqrt{a} \Rightarrow \boxed{a=9}$$

2.b) $f(x) = x^{\sin x}$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}$ noktasındaki türevini hesaplayınız. (10P)

$$f(x) = x^{\sin x}$$

$$\textcircled{2} \ln f(x) = \sin x \cdot \ln x, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{2} \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left[\underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 \cdot \underbrace{\ln \frac{\pi}{2}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 \cdot \underbrace{\frac{2}{\pi}}_{\textcircled{1}} \right]$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} = 1 \quad \textcircled{1}$$

2017 2. Vize

$$I = \int_0^{\pi/4} e^{\tan x - 2 \ln(\cos x)} dx = ?$$

$$e^{\tan x} \cdot \frac{e^{\ln(\cos x)^2}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$$

$$\tan x = u$$
$$\frac{dx}{\cos^2 x} = du$$

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = 1$$

$$x = 0 \rightarrow u = 0$$

$$= \int_0^1 e^u du = e^u \Big|_0^1 = \underline{\underline{e-1}}$$

*) $f(x) = \int_0^x \frac{t-t^2}{1+t^4} dt$ fonksiyonunun max./min. bulunuz.

$$f'(x) = \frac{x-x^2}{1+x^4} = 0 \rightarrow x=0, x=1$$

x	0	1
f'	-	+
f	↘	↗
	min	max

*) $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ deki ortalama değerini ve integraler için ortalama değer teoremini sağlayan c sayısını bulunuz.

$$f(c) = \tilde{f} = \frac{1}{\pi-0} \int_0^{\pi} \cos x dx = \frac{1}{\pi} \sin x \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$f(c) = 0 \rightarrow \cos c = 0 \rightarrow c = \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$$

*) $f(x) = x + \int_1^{2x-1} \frac{\cos(t-1)}{t^2+1} dt \Rightarrow f'(1) = ?$

$$f'(x) = 1 + \frac{\cos(2x-1-1)}{(2x-1)^2+1} \cdot (2x-1)'$$

$$= 1 + 2 \frac{\cos(2x-2)}{(2x-1)^2+1}$$

$$\Rightarrow f'(1) = 1 + 2 \cdot \frac{\cos 0}{1+1} = 2$$

*) $f(x) = \int_0^{x^2-2x} \frac{dt}{1+t^2}$ yerel max/min?

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2-2x)}, (x^2-2x)' = \frac{2x-2}{1+(x^2-2x)} = 0 \rightarrow x=1$$

x	1
f'	-
f	↘
	min

$x=1 \rightarrow$ yerel min.
yerel max. yok!

③

2016 - Hazret

$$f(x) = (1+\ln x)^x, \quad g(x) = \int_x^{f(x)} \cos^2 x \, dx \Rightarrow f'(1) = ? \quad g'(1) = ? \quad (x > 0 \text{ için})$$

$$f(x) = (1+\ln x)^x \xrightarrow{\text{L. Türev}} \ln f(x) = x \ln(1+\ln x) \xrightarrow{\text{Türev}} \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(1+\ln x) + \frac{x \cdot \frac{1}{x}}{1+\ln x}$$

$$g(x) = \int_x^{f(x)} \cos^2 x \, dx$$

x ↓ Türev

$$\downarrow x=1$$

$$\frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{0}{1} = \ln(1+\ln 1) + \frac{1}{1+\ln 1}$$

$$g'(x) = f'(x) \cdot \cos^2 f(x) - \cos^2 x \xrightarrow{x=1} g'(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} \cdot \cos^2 f(1) - \cos^2 f(1)$$

$\boxed{f'(1)=1}$

$\boxed{g'(1)=0}$

Soru 3-b) $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \sin x \, dx$ integralini hesaplayınız. (10 P)

$$I = \int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 x} \sin x \, dx = \int_0^{\pi} |\cos x| \sin x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos x \sin x \, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2x \, dx - \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{4} (1-1) + \frac{1}{4} (1+1) = 1 //$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int u \, du = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

$$u = \sin x$$

$$du = \cos x \, dx$$

$$\int \cos x \sin x \, dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos x = u \\ du = -\sin x \, dx \end{array} \right\}$$

1.a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^{x^3} \tan(t-1) dt}{x^3 - 2x^2 + x}$ limitini hesaplayınız. (12P)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^{x^3} \tan(t-1) dt}{x^3 - 2x^2 + x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 \tan(x^3-1)}{3x^2 - 6x + 1} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x \tan(x^3-1) + 3x^2 \cdot 3x^2 \cdot \sec^2(x^3-1)}{6x - 4} = \frac{9}{2}$$

1.b) $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlı $f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1 + \sin t}{2 + t^2} dt$ fonksiyonu verilsin.

$f(0) = p(0)$, $f'(0) = p'(0)$ ve $f''(0) = p''(0)$ şartlarını sağlayan $p(x) = ax^2 + bx + c$ polinomunu bulunuz. (13P)

$$p(0) = c \quad f(0) = 3 + \int_0^0 \frac{1 + \sin t}{2 + t^2} dt = 3 \Rightarrow \boxed{c = 3} \quad (1)$$

$$p'(x) = 2ax + b \Rightarrow p'(0) = b \quad f'(x) = \frac{1 + \sin x}{2 + x^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$p''(x) = 2a \Rightarrow p''(0) = 2a \quad f''(x) = \frac{\cos x \cdot (2 + x^2) - 2x \cdot (1 + \sin x)}{(2 + x^2)^2} \quad (1)$$

$$f''(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}} \quad (1)$$

$$\boxed{p(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 3} \quad (1)$$

Başarılar...

2.a) Ortalama Değer Teoremini kullanarak, her $a > 0$ sayısı için

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} < \ln(a + \sqrt{1+a^2}) < a \quad \text{eşitsizliğinin sağlandığını ispatlayınız. (15P)}$$

② $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ $[0, a]$ olsun. ①

1) $f(x)$, $[0, a]$ da sürekli. ①

2) $f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ② $(0, a)$ da tanımlı olduğundan $f(x)$, $(0, a)$ da türevidir. ①

$f(x)$ 'e $[0, a]$ da ODT uygulanabilir.

① $f'(c) = \frac{f(a) - f(0)}{a}$ o.s. $c \in (0, a)$ vardır.

$$\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{\ln(a + \sqrt{1+a^2})}{a} \quad ②$$

$$c \in (0, a) \Rightarrow 0 < c < a \quad ①$$

$$1 < \sqrt{1+c^2} < \sqrt{1+a^2} \quad ①$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} < \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} < 1 \quad ①$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} < \frac{\ln(a + \sqrt{1+a^2})}{a} < 1 \quad ①$$

$$\boxed{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} < \ln(a + \sqrt{1+a^2}) < a} \quad ①$$

2.b) $f(x) = x^{\sin x}$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}$ noktasındaki türevini hesaplayınız. (10P)

$$f(x) = x^{\sin x}$$

② $\ln f(x) = \sin x \cdot \ln x$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ ①

② $\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$ ①

$$f'(x) = f(x) \cdot \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left[\underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 \cdot \underbrace{\ln \frac{\pi}{2}}_{①} + \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 \cdot \underbrace{\frac{2}{\pi}}_{①} \right]$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} = 1 \quad ①$$

Başarılar...

3.a) $f(x) = x^3 + x$ eğrisinin altında, x-ekseninin üzerinde ve $x=0$, $x=2$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını Üst Riemann Toplamı ile hesaplayınız. (14P)

$$f(x) = x^3 + x, [0, 2]$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i \quad (1)$$

$[0, 2]$ aralığını n eşit parçaya bölersek : $\Delta x_i = \frac{2}{n} \quad (1)$

$f(x) = x^3 + x$ artan fonksiyon olduğundan Üst Riemann Toplamı için aralıkların sağ uç noktaları alınır. (2)

$$c_i = x_i = 0 + i \cdot \frac{2}{n} \Rightarrow c_i = \frac{2i}{n} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{8i^3}{n^3} + \frac{2i}{n} \right) \\ &= \frac{2}{n} \left[\frac{8}{n^3} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + \frac{2}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Alan} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4n^2(n+1)^2}{n^4} + \frac{2 \cdot (n+1)}{n} \right] = 4 + 2 = 6 \quad (1) //$$

3.b) $f(x) = -|x|$ fonksiyonunun $[-2, 1]$ aralığındaki ortalama değerini hesaplayınız. (11P)

$$\begin{aligned} f_{\text{ort}} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot dx = \frac{1}{1-(-2)} \int_{-2}^1 -|x| dx \quad (1) \\ &= \frac{1}{3} \left[\int_{-2}^0 x dx + \int_0^1 -(x) dx \right] \quad (3) \quad (3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \\ &= -\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{5}{6} \quad (1) // \end{aligned}$$

4.) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ ile tanımlı f fonksiyonunun tanım kümesini; yatay, düşey ve eğik asimptotlarını; artan ve azalan olduğu aralıkları, ekstremum noktalarını, konkavlığını ve büküm (dönüm) noktalarını inceleyiniz. Tüm sonuçları tek bir tabloda göstererek f nin grafiğini çiziniz. (25P)

$$D(f) : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad (1)$$

$$\text{Düşey Asimptot} : \boxed{x = -1} \quad (1), \quad \boxed{x = 1} \quad (1)$$

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \end{array} \right)$$

$$\text{Yatay Asimptot} : \boxed{y = 1} \quad (1)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \right)$$

$$\text{Eğik Asimptot} : \text{Yok} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 1) - 2x \cdot (x^2 - 4)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{6x}{(x^2 - 1)^2} \quad (1)$$

$$\rightarrow \boxed{x = 0} \quad (1) \text{ K.N.}$$

$$\rightarrow \boxed{x = \pm 1} \notin D(f)$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2 - 1)^2 - 6x \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} = -\frac{6 + 18x^2}{(x^2 - 1)^3} \quad (1)$$

$$\rightarrow \boxed{x = \mp 1} \notin D(f)$$

$$\text{Büküm Noktası Yok} \quad (1)$$

X	$-\infty$	-1	0	1	∞
f'	-	0	-	+	0
f''	-	0	+	+	0
f					

(4)

(4)

yerel min.

yerel min.

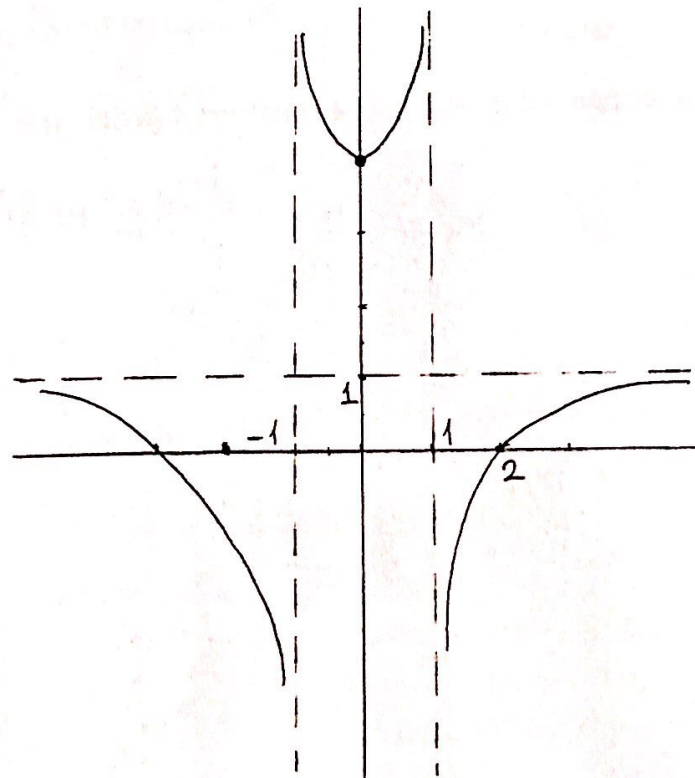
$$\text{Artan} : (0, 1) \cup (1, \infty) \quad (1)$$

$$\text{Azalan} : (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \quad (1)$$

$$\text{Y. Konkav} : (-1, 1) \quad (1)$$

$$\text{A. Konkav} : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \quad (1)$$

$$(0, 4) \rightarrow \text{Yerel minimum} \quad (1)$$



(3)

Başarılar...

	YTU – Fen-Edebiyat Fakültesi , II. Vize Sınav Soru ve Cevap Kağıdı	Not Tablosu							
		1.a	1.b	2.a	2.b	3.	4.a	4.b	Toplam
Adı Soyadı									
Numarası									
Bölümü		Gr No		Tarih			17.12.2016		
Dersin Adı	MAT1071 Matematik I			Süre	20 dk	Sınıf			
Öğretim Üyesi	CEVAP ANAHTARI				İmza				
YÖK nun 2547 sayılı Kanunun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan “Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek” fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.									

1.a. $x > -1$ ve $f(x) = \int_{-1}^x (t^2 + 9)^{\sin t} dt$ olmak üzere $f''(0)$ değerini bulunuz.

$$f'(x) = (x^2 + 9)^{\sin x}$$

$$\ln f'(x) = (\sin x) \cdot \ln(x^2 + 9)$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = (\cos x) \cdot \ln(x^2 + 9) + \frac{2x}{x^2 + 9} \cdot (\sin x)$$

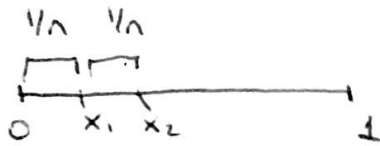
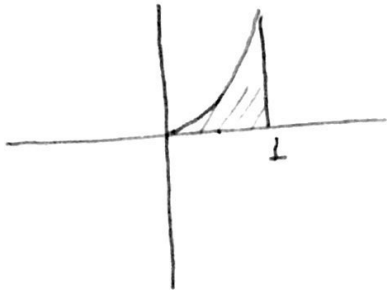
$$f''(x) = (x^2 + 9)^{\sin x} \cdot \left[(\cos x) \cdot \ln(x^2 + 9) + \frac{2x}{x^2 + 9} \cdot (\sin x) \right]$$

$$f''(0) = \ln 9$$

1.b $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(3-e^{-\sqrt{x}})}$ integralini hesaplayınız.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x} = u \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du \end{array} \right\} \int \frac{2du}{(3-e^{-u})} = \int \frac{2e^u du}{(3e^u - 1)} = \frac{2}{3} \ln(3e^u - 1) + c = \frac{2}{3} \ln(3e^{\sqrt{x}} - 1) + c$$

⑤ $y=x^3$, $x=0$, $x=1$, x -ekseni arasındaki alanı, Alt Riemann Toplamı ile hesaplayın.



* $y=x^3$ Artan fonk. olduğundan Alt Riemann Toplamı için aralığın sol uç noktaları kullanılır.

* $[0, 1]$ aralığını eşit n parçaya bölersek $\Delta x_i = \frac{1}{n}$

$[x_{i-1}, x_i]$ için $c_i = x_{i-1} = 0 + (i-1) \cdot \frac{1}{n}$

$$c_i = (i-1) \cdot \frac{1}{n}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^3}{n^3} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n (i^3 - 3i^2 + 3i - 1)$$

$$= \frac{1}{n^4} \left[\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \right]$$

$$\text{Alan} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}}{\frac{1}{4}} - \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{2n^4}}{0} + \frac{\frac{3n(n+1)}{2n^4}}{0} - \frac{\frac{1}{n^3}}{0} \right)$$

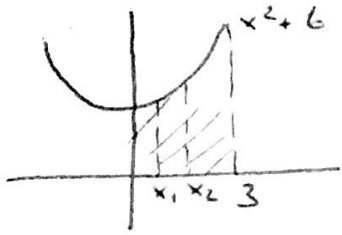
$$= \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{*} \int_0^3 (x^2+6) dx$$

İntegrali Üst Riemann Toplamı ile

hesaplayınız.

$$f(x) = x^2 + 6 \quad [0, 3]$$



* $f(x) = x^2 + 6$ artan fonk. olduğundan
Üst Riemann Toplamı için sağ uç
noktalar kullanılır.

* $[0, 3]$ aralığını eşit n parçaya
bölersek $\Delta x_i = \frac{3}{n}$

$$[x_{i-1}, x_i] \rightarrow c_i = x_i = 0 + i \cdot \frac{3}{n} = \frac{3}{n} i$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{3i}{n}\right) \cdot \frac{3}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{9i^2}{n^2} + 6 \right) \cdot \frac{3}{n}$$

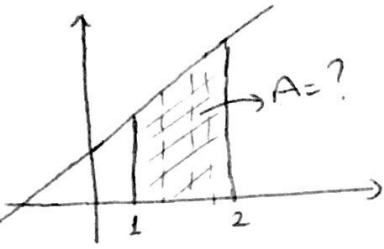
$$= \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{9}{n^2} i^2 + 6 \right)$$

$$= \frac{3}{n} \left[\frac{9}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6n \right]$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} + 18$$

$$\text{Integral} = \text{Alan} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{18}{2} + 18 = 27$$

* $y = x + 2$ doğrusunun altında, x-ekseninin üstünde, $x=1$, $x=2$ doğruları arasında kalan alanı üst Riemann Toplamı ile hesaplayınız.

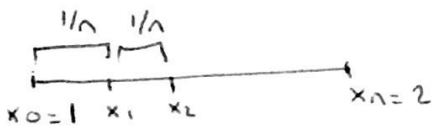


$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

* $[1, 2]$ aralığını eşit n parçaya bölersek $\Delta x_i = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$ olur.

* $y = x + 2$ artan fonk olduğundan üst Riemann Toplamı için aralıkların sağ uç noktalarını kullanırız.

Formülü kendimiz çıkarırsak



$$c_i = x_i = 1 + i \cdot \frac{1}{n} \quad \Delta x_i = \frac{1}{n}$$

↳ sağ uç

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f\left(1 + i \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{n}i + 2\right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(3 + \frac{1}{n}i\right) \\ &= \frac{1}{n} \left[3n + \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right] = 3 + \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Alan} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{n+1}{2n}\right) \\ &= 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Formülle:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n f\left(1 + i \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n f\left(1 + \frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n} + 2\right) \\ &= \frac{1}{n} \left[3n + \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= 3 + \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Alan} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{n+1}{2n}\right) \\ &= 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

* $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunun $[-1, 1]$ deki ortalama değerini

$$\bar{f} = \frac{1}{1 - (-1)} \int_{-1}^1 (2x + 1) dx = \frac{1}{2} (x^2 + x) \Big|_{-1}^1 = \boxed{1}$$

* $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ olmak üzere $f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt$

ise $f'(x) = ?$

Leibnitz Formülünden

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot (\sin x)' - \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot (\cos x)' \\ &= \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = \underline{1} \end{aligned}$$

* $F(x) = \frac{1}{x} \int_1^x [2t - F'(t)] dt$ olsun. Leibnitz formülü kullanarak $F'(1) = ?$

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_1^x (2t - F'(t)) dt + \frac{1}{x} [(2x - F'(x)) \cdot 1]$$

$$F'(1) \Rightarrow x=1 \Rightarrow F'(1) = -1 \cdot \underbrace{\int_1^1 (2t - F'(t)) dt}_0 + 1 \cdot (2 - F'(1))$$

$$F'(1) = 2 - F'(1) \rightarrow \boxed{F'(1) = 1}$$

2017 Mazeret Sınavı

$$x \geq 1, f(x) = \int_2^{x+1} (t-1)^t dt \Rightarrow f''(1) = ?$$

↓ Türev

$$f'(x) = (x+1-1)^{x+1} = x^{x+1}$$

$$\rightarrow f'(1) = 1^2 = 1$$

↓ logaritmik türev

$$\ln f'(x) = (x+1) \ln x$$

↓ Türev

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \ln x + \frac{x+1}{x} \Rightarrow \frac{f''(1)}{1} = \ln 1 + \frac{2}{1} \Rightarrow \boxed{f''(1) = 2}$$

2017 Final Sorusu:

$a > 0$ olmak üzere $6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x}$ eşitliğini sağlayan

f fonksiyonu ve a sayısını bulunuz.

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{Türev}} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \boxed{f(x) = x^{3/2}}$$

↓ $x=a$ yazarak

$$6 + \int_a^a \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{a} \Rightarrow 3 = \sqrt{a} \Rightarrow \boxed{a=9}$$

2016 - Mazeret

$$f(x) = (1+\ln x)^x, g(x) = \int_x^{f(x)} \cos^2 x dx \Rightarrow f'(1) = ? \quad g'(1) = ? \quad (x > 0 \text{ için})$$

$$f(x) = (1+\ln x)^x \xrightarrow{\text{L. Türev}} \ln f(x) = x \ln(1+\ln x) \xrightarrow{\text{Türev}} \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(1+\ln x) + \frac{x \cdot \frac{1}{x}}{1+\ln x}$$

↓ $x=1$

$$\frac{f'(1)}{f(1)} = \ln(1+\ln 1) + \frac{1}{1+\ln 1}$$

$$\boxed{f'(1) = 1}$$

$$g'(x) = f'(x) \cdot \cos^2 f(x) - \cos^2 x \xrightarrow{x=1} g'(1) = \frac{f'(1)}{1} \cdot \cos^2 f(1) - \cos^2 f(1)$$

$$\boxed{g'(1) = 0}$$

⑧ $y = \frac{x}{x^2-1}$ çiziniz.

① T.K: $\mathbb{R} - \{ \pm 1 \}$ → ② $x=1, x=-1 \rightarrow$ D.A. ③ $y=0 \rightarrow$ Y.A. ⑤ E.A. Yok

⑥ $y' = \frac{x^2-1-x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \rightarrow y'=0 \rightarrow x \cdot x$
 y' t.siz $\rightarrow \boxed{x = \pm 1}$ G.K.K.
 K.N. değil

⑦ $y'' = -\frac{2x \cdot (x^2-1)^2 - (1+x^2) \cdot 2 \cdot (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4}$
 $= -\frac{2x^3-2x-4x-4x^3}{(x^2-1)^3} = +\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} \rightarrow y''=0 \rightarrow \boxed{x=0}$
 y'' t.siz $\boxed{x=+1}$ B.N. olamaz!
 $\boxed{x=-1}$

⑧

x	$-\infty$	-1	0	1	∞
y'	-	$\frac{0}{\pm 1/2}$	-	$\frac{0}{\pm 1/2}$	-
y''	-	$\frac{0}{\pm 1/2}$	+	$\frac{0}{\pm 1/2}$	+
y	0	$\frac{0}{\pm 1/2}$	0	$\frac{0}{\pm 1/2}$	0

B.N.

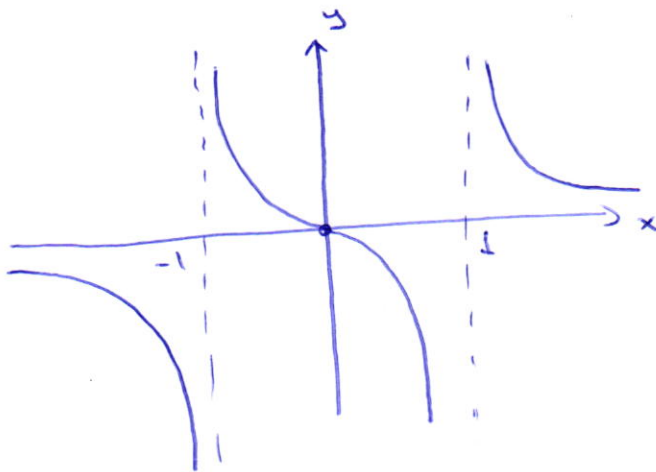
$x=0 \rightarrow$ B.Noktası

$\mathbb{R} - \{ \pm 1 \}$ için fonk. azalan

$(-\infty, -1) \cup (0, 1) \rightarrow$ A.Konkav

$(-1, 0) \cup (1, \infty) \rightarrow$ Y.Konkav

max-min $\rightarrow$ yok



$y = \frac{x}{x^2-1}$

$y = 0$

$\frac{x}{x^2-1} = 0 \rightarrow \boxed{x=0}$

Eğri ile yatay asimptot

(0,0) da

kesişir

*) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ eğrisini çiziniz.

① T.K: $\mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ Döşey Asimptot yok ② Y. Asimptot $y=1$

③ Eğik Asimptot yok ④ Çift Fonk. (y-eksenine göre simetrik)

⑤ $f' = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'=0 \rightarrow \boxed{x=0}$ K.N.
 $\rightarrow f'$ t.siz $\rightarrow$ yok

⑥ $f'' = \frac{2 \cdot (x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$

$\downarrow$
 f'' t.siz
yok

$\downarrow$
 $f''=0$
 $\downarrow$
 $x^2 = \frac{1}{3}$
 $\boxed{x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}}$

⑦

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞	
f'	-	-	0	+	+	
f''	-	0	+	+	0	-
f	↘ B.N		↖ min.	↗ B.N		

$x=0 \rightarrow$ y. min.

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow$ B. Noktası

$(0, \infty) \rightarrow$ Artan

$(-\infty, 0) \rightarrow$ Azalan

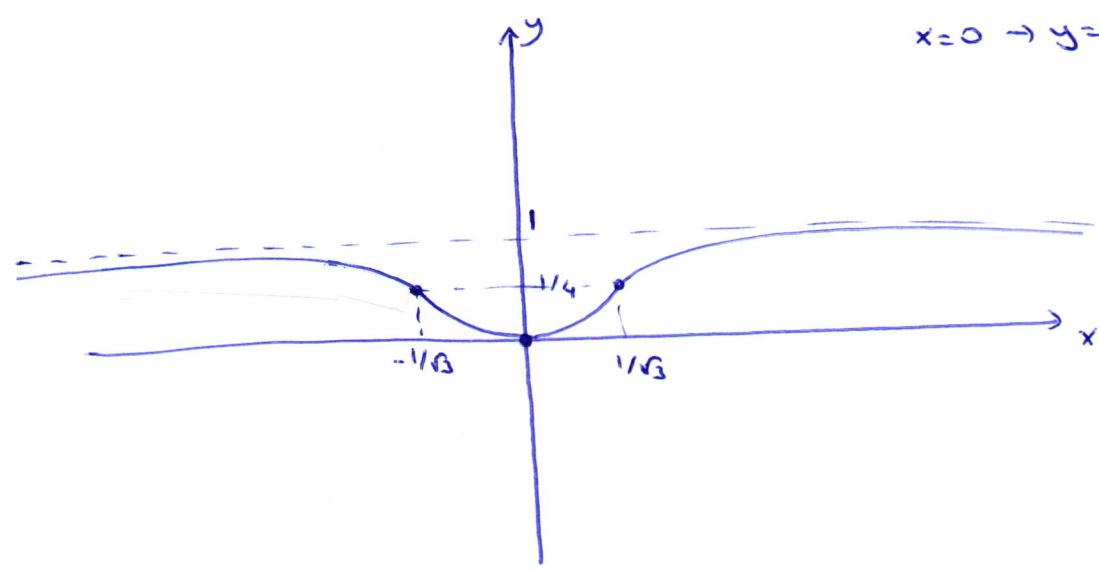
$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty) \rightarrow$ A. Konkav

$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \rightarrow$ Y. Konkav

$x=0 \rightarrow y=0$

$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow y = \frac{1}{4}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow y = \frac{1}{4}$



- * $f(x) = \frac{x^5 - 3}{x^4}$ eğrisinin asimptotlarını, artan / azalan olduğu aralıkları, konkavlığını, ekstremleri kesim noktalarını araştırıp eğriyi çiziniz.

① $x=0$ Dikey asimptot

② $f(x) = \frac{x^5 - 3}{x^4} = \boxed{x} - \frac{3}{x^4} \Rightarrow y=x$ eğik asimptot (veya $\frac{x^5 - 3}{-x^4} \rightarrow \frac{x^4}{-3} \rightarrow y=x$ e.A.)

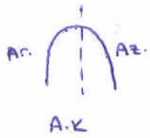
③ $f'(x) = \frac{5x^4 \cdot x^4 - 4x^3(x^5 - 3)}{x^8} = \frac{x^3(x^5 + 12)}{x^8} = \frac{x^5 + 12}{x^5}$
 $f' = 0 \Rightarrow x^5 + 12 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\sqrt[5]{12}}$ K.N.
 f' tanımsız $\boxed{x=0}$ K.N. değil (f tanımsız)

④ $f''(x) = \frac{5x^4 \cdot x^5 - 5x^4(x^5 + 12)}{x^{10}} = -\frac{60}{x^6}$
 $f'' = 0 \Rightarrow \text{çokluk}$
 f'' tanımsız $\boxed{x=0}$ A.K.K.
 Büküm Nok. olamaz (f tanımsız)

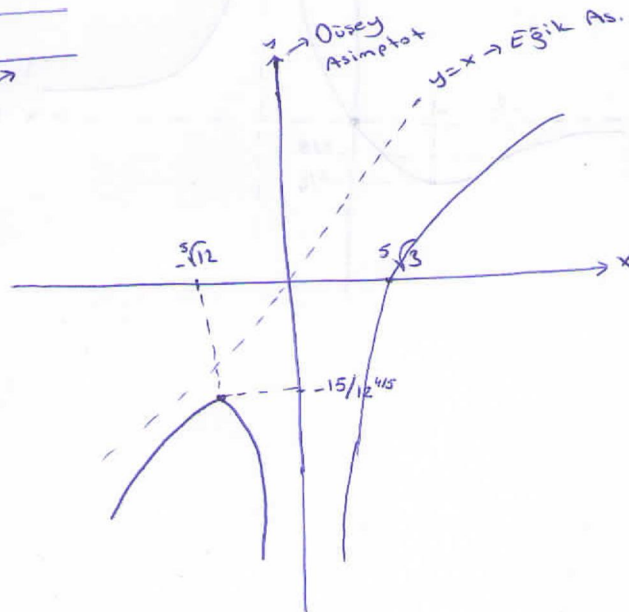
⑤ $y=0 \Rightarrow x^5 - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[5]{3}}$

⑥

x	$-\infty$	$-\sqrt[5]{12}$	0	∞
f'	+	0	-	+
f''	-	-	-	-
f	↗	↘	↘	↗



$x = -\sqrt[5]{12} \Rightarrow y = \frac{-12 - 3}{(-\sqrt[5]{12})^4} = -\frac{15}{12^{4/5}}$



* $y = \frac{x}{(x-1)^2}$ eğrisini çiziniz.

① $x=1$ Dikey As. ② $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0$ olduğundan $y=0$ Yatay As.

$$y=0 \Rightarrow x=0$$

(0,0) da yatay asimptot ve eğri kesişir

③ $y' = \frac{(x-1)^2 - 2(x-1) \cdot x}{(x-1)^4} = -\frac{x+1}{(x-1)^3}$

$y'=0 \rightarrow x=-1$ K.N.
 y' tanımsız $x=1$ K.N. olamaz (fonk. tanımsız)

④ $y'' = -\frac{(x-1)^2 - 3(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)^6} = \frac{2x+4}{(x-1)^4}$

$y''=0 \rightarrow x=-2$
 y'' tanımsız $x=1$ G.K.K. (B.N. olamaz)

x	$-\infty$	-2	-1	1	∞
y'	-	-	0	+	-
y''	-	+	+	+	+
y	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	



$$x=-2 \Rightarrow y = -\frac{2}{9}$$

$$x=-1 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$$

