

3. Subat 2020
Pazartesi

Operatör Teorisi II.

Kaynak: Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis.

"An Invitation to Operator Theory"

Konular:

- ① Değişmez alt uzaylar (10.1)
- ② Lomonosov değişmez alt uzay teoremi
- ③ Pozitif operatörlerin değişmez idealleri
- ④ Pozitif operatörlerin ailesinin değişmez alt uzayları
- ⑤ Arkadaşca kompakt operatörler
- ⑥ Tabanlı Banach uzaylarında Pozitif Operatörler
- ⑦ Gevismesiz cebirlerin bir kardinalitesi (10.7)
- ⑧ Ara Sınav I
- ⑨ Daugavet Denklemi (11.1)
- ⑩ " " ve Düzgün Konvekslik
- ⑪ Soyut L - M uzayları
- ⑫ " " n daugavet özelliği
- ⑬ -⑭ $C(K)$ daugavet özelliği (11.6)

ÖN BİLGİLER

1.1 Banach Uzayları, Operatörler ve Lineer Fonksiyoneller

X bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna
a.ö. ile X üs de bir normdur denir.

i) (Pozitiflik) $\|x\| \geq 0$ ($\forall x \in X$) ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) (Homojenlik) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ($\forall x \in X$ ve α skaler)

iii) (Üçgen eşitsizliği) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ($x, y \in X$)

$(X, \|\cdot\|)$ ikiliğine bir normlu uzay denir.

$X = \mathbb{R}^n \Rightarrow X$ 'e asıkak lineer uz denir.

* Bir X lineer uzayı üzerindeki $\|\cdot\|$ normu X üzerinde daima $d(x, y) = \|x - y\|$ sekündeki metrikini üretir.

Bir Banach uzayı onun normuyla üretilen metrik altında tam metrik uzay normlu uzaydır.

Tanım:

X ve Y normlu uzaylar olsun

$T: X \rightarrow Y$ operatörüne eğer tüm $x, y \in X$ ve α, β skalerleri

için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ eşitliği sağlanıyorsa bir lineer operatör denir.

T 'nin normu: $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$

Eğer $\|T\| < \infty$ ise T 'ye sınırlı lineer op. denir.

Eğer $\|T\| = \infty$ ise T 'ye sınırsızdır denir.

* Eğer T sınırlı ise

$\|T\| = \min \{ m > 0 : \|Tx\| \leq m \|x\|, \text{ her bir } x \in X \text{ için?} \}$

* $T: X \rightarrow Y$ lineer operatörü sınırlıdır ancak ve ancak T süreklidir.

Tanım:

$T: X \rightarrow Y$ lin. op'ne eğer her bir $x \in X$ için $\|Tx\| = \|x\|$ ise bir izometri denir.

Bu derste normlu uz. calisiyoruz.
Her jefinde X ve Y n.u. demeyecektir.

→ birlebilirlik
asikar

Eger X 'ten Y 'ye öten bir izometri varsa bu uzaylarda izometrik uzaylar denir.

Tanım: (Gösterim)

X 'ten Y 'ye tanımlı tüm sınırlı, lineer operatörlerin topluluğu $\mathcal{L}(X, Y)$ ile gösterilir.

$$\mathcal{L}(X, X) = \mathcal{L}(X)$$

(*) X ve Y n.u. $\Rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ normlu uzaydır.

Teorem 1.1

Eger X normlu uzay ve Y bir Banach uzayı ise $\mathcal{L}(X, Y)$ de bir Banach uzayıdır. (operatör normu ile)

Not:

Bir cebir bir A bir vektör uzayıdır

$\forall x, y, z \in A$ ve tüm α skalerleri için

$$(1) (xy)z = x(yz) \text{ ve } (\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$$

$$(2) x(y+z) = xy + xz \text{ ve } (x+y)z = xz + yz$$

Bir A cebirise eger tüm $x \in A$ için

$xe = ex = x$ olacak şekilde bir e vektörü varsa birimseldir (unital)

Bir Banach cebiri tüm $x, y \in A$ için $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ olacak şekilde $\|\cdot\|$ normu altında bir Banach uzayı olan bir A -cebidir.

Teorem 1.2:

Eger X bir Banach uzayı ise o takdirde $\mathcal{L}(X)$ çarpım olarak birleşim işlemi ile bir birimsel Banach cebiridir.
(birim elemanı birim işlemi tanımlar)

Tanım:

X reel ya da kompleks normlu uzayı için $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ veya $\mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ Banach uzayı X^* ile gösterilir. Ve X 'in dual uzayı olarak söylenir.

$X^{**} = (X^*)^*$ uzayına X 'in ikinci dualı denir.

X^* üzerindeki bir lineer fonksiyonel olarak her $x \in X$ göz önüne alınırsa $x(x^*) = x^*(x)$ şeklinde X den X^{**} içine doğal bir izometrik gömülme elde edilir.

(*) Bir X Banach uzayındaki bir $\{x_n\}$ dizisine eğer her bir $x^* \in X^*$ için $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$ ise $x \in X$ vektörüne zayıf yakınsaktır denir.

weak

$x_n \xrightarrow{w} x$ ya da $x_n \xrightarrow{\sigma(x, x^*)}$ ile gösterir.

(*) Bir X Banach uzayının X^* dualindeki bir $\{x_n^*\}$ dizisine bir $x^* \in X^*$ elemanına eğer her bir $x \in X$ için $(x_n^*)(x) \rightarrow x^*(x)$ ise zayıf* (weak*) yakınsar denir.

$$x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$$

(*) X normlu uzay ise X, X^* ve X^{**} uzaylarındaki kapalı birim yuvarlar sırasıyla U, U^* ve U^{**} ile gösterilir.

$$U = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \quad (U_X)$$

$$U^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\} \quad (U_{X^*})$$

$$U^{**} = \{x^{**} \in X^{**} : \|x^{**}\| \leq 1\} \quad (U_{X^{**}})$$

x^* lar fonksiyonel anlamında

(*)

Her bir $x^* \in X^*$ için $\|x^*\| = \sup_{x \in U} |x^*(x)| = \sup_{x \in U} \langle x^*, x \rangle$

Her bir $x \in X$ için $\|x\| = \sup_{x^* \in U^*} |x^*(x)| = \sup_{x^* \in U^*} \langle x^*, x \rangle$

Tanım:

X ve Y normlu uzaylar

$T: X \rightarrow Y$ sınırlı lineer operatörün esleniği (adjoint)

$y^* \in Y^*$ ve $x \in X$ için $(T^*y^*)(x) = y^*(Tx)$ seklinde tanımlı sınırlı $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ lin. operatördür

$$\langle T^*y^*, x \rangle = \langle y^*, Tx \rangle$$

$$(\langle Tx, y^* \rangle = \langle x, T^*y^* \rangle)$$

Not:

T^* in esleniği;

$$T^{**}: X^{**} \rightarrow Y^{**}$$

$$\langle T^{**}x^{**}, y^* \rangle = \langle x^{**}, T^*y^* \rangle$$

$$(x^{**} \in X^{**} \text{ ve } y^* \in Y^*)$$

dup buna T in ikinci esleniği de denir.

(*)

$$\|T\| = \|T^*\| = \|T^{**}\|$$

Göstereyim:

$$\|T^*\| = \sup_{\|y^*\| \leq 1} \|T^*y^*\| = \sup_{\|y^*\| \leq 1} \left[\sup_{\|x\| \leq 1} \langle T^*y^*, x \rangle \right]$$

$$= \sup_{\|x\| \leq 1} \left[\sup_{\|y^*\| \leq 1} \langle y^*, Tx \rangle \right]$$

$$= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|$$

Tanım:

$L(X, Y)$ uzayının bir A alt kümesine eğer her bir $x \in X$ için $\|Tx\| \leq Mx$ ($T \in A$) olacak şekilde bir $M \geq 0$ varsa noktasal sınırlıdır denir.

10.02.2020
Ptesi

Teorem 1.3 (Üzgün Sınırlılık Prensipleri)

X bir Banach uzayı ve Y bir normlu uzay olsun.

0 zardırde $L(X, Y)$ nin bir alt kümesi ancak ve ancak noktasal sınırlı ise norm sınırlıdır.

($T_n: X \rightarrow Y$ ($n \geq 1$) o.ü. $\{T_n\}$ dizisi sınırlı
her $x \in X$ için $\|T_n x\| \leq Cx \Rightarrow \|T\| \leq C$ sağlanır)

Teorem 1.4 (Açık Tasvir Teoremi)

İki Banach uzayı arasındaki örten bir operatör açık bir tasvirdir.
(Açık kümeyi açık kümeye götürür)

* A ve B kümeleri için $f: A \rightarrow B$ fonk-nun grafiği

$$G_f = \{ (a, f(a)) : a \in A \}$$

Eğer $T: X \rightarrow Y$ (X ve Y vekt. uz.) bir operatör ise o halde onun grafiği $X \times Y$ çarpım uzayının bir vektör alt uzayıdır.

* $X_1, X_2, \dots, X_n$ normlu uzaylar ise $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ kartesiyen çarpımında $\| (x_1, x_2, \dots, x_n) \| = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2}$ normu altında bir normlu uzayıdır.

Bu normlu uzaya direkt toplam normlu uzay da denir.

$$X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$$

Eğer $X_1, X_2, \dots, X_n$ Banach uzayları ise $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$ uzayı da Banach'tır.

② normuna iki eşdeğer norm

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sum_{i=1}^n \|x_i\| \quad \text{ve} \quad \|(x_1, \dots, x_n)\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$$

Teorem 1.5 (Kapalı Grafik Teoremi)

İki Banach uzayı arasında bir operatör ancak ve ancak grafiği kapalı ise sınırlıdır.

Sonuç 1.6

(X, p) ve (Y, q) iki normlu uzay ve X ve Y üzerindeki $p \geq p$ ve $q \geq q$ iki tam norm p ve q olsun.

O takdirde X 'den Y 'ye her bir (p, q) -sürekli operatörü aynı zamanda (p, q) -sürekli.

Tanım

X bir reel vekt. uzayı olsun. X 'in kompleksleştirilmesi

$X_c = X \oplus iX = \{x + iy : x, y \in X\}$ kompleks vektör uzayıdır.

Öyle ki aşağıdaki vektör uzayı işlemleri tanımlıdır.

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y)$$

X_c üzerindeki norm her bir $z = x + iy \in X_c$ için

$$\|z\| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|x \cos \theta + y \sin \theta\|$$

Buna X normlu uzayındaki $\|\cdot\|$ normunun X_c üzerindeki bir norma genişletilmesi denir.

$$x \in X \text{ için } \|x\| = \|x + i0\|$$

$$z = x + iy \in X_c \text{ için } \frac{1}{2} (\|x\| + \|y\|) \leq \|z\| \leq \|x\| + \|y\|$$

X_c de $z_n = x_n + iy_n \rightarrow x + iy \Leftrightarrow X$ 'de $x_n \rightarrow x$ ve $y_n \rightarrow y$

Böylece X Banach ise X_c de Banach'tır.

* İki reel vektör uzayı arasındaki her $T: X \rightarrow Y$ operatörü

$$T_c(x + iy) = Tx + iTy \text{ şeklindeki kompleks bir } T_c: X_c \rightarrow X_c$$

lineer operatörünü tanımlar.

Lemma 1.7:

X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $T: X \rightarrow Y$ sınırlı bir operatör ise θ takdirde $T_c: X_c \rightarrow X_c$ operatörü de sınırlıdır ve $\|T_c\| = \|T\|$ sağlanır.

İspat:

$$\|T_c\| \geq \|T\| \text{ olduğu açıktır. (1)}$$

Öte yandan her bir $z = x + iy$ ve herhangi bir θ açısı için

$$\begin{aligned} \|(Tx) \cos \theta + (Ty) \sin \theta\| &= \|T(x \cos \theta + y \sin \theta)\| \\ &\leq \|T\| (\|x \cos \theta + y \sin \theta\|) \\ &\leq \|T\| \|z\| \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu da $\|T_c z\| \leq \|T\| \|z\|$ ya da $\|T_c\| \leq \|T\|$ olması demektir. (2)

Buradan T_c sınırlı olup (1) ve (2) den $\|T_c\| = \|T\|$ bulunur.

Tanım:

V, W vektör uzayının bir alt uzayı W/V bölüm vektör uzayı denklik sınıflarının $\{[w], w \in W\}$ vektör uzayıdır.

Her bir $w \in W$ için onun denklik sınıfı

$$[w] = w + V = \{w + v : v \in V\} \text{ şeklinde tanımlıdır.}$$

Buradan toplama ve carpma

$$[x] + [y] = [x+y] \text{ ve } \lambda[x] = [\lambda x]$$

$T: W \rightarrow W/V$ bölüm tasvir $T(w) = [w]$ şeklinde tanımlanır.

Tanım:

V, X normlu uzayunun bir vektör alt uzayı olsun.

0 zaman V 'nin sıfırlayıcısı

$$V^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(v) = 0 \quad \forall v \in V\} \text{ şeklinde tanımlı}$$

X^* dual uzayunun norm kapalı alt uzayıdır.

Teorem:

X normlu uzayunun kapalı bir Y alt uzayı için aşağıdaki örten lineer izometrilere göre

$$(X/Y)^* = Y^\perp \text{ ve } Y^* = X^*/Y^\perp$$

① $\phi: Y^\perp \rightarrow (X/Y)^*$ tasvir

$$\phi(x^*)([x]) = x^*(x), \quad x^* \in Y^\perp, [x] \in X/Y \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

ϕ ; iyi tanımlı, örten, lineer izometridir.

② $\psi: X^*/Y^\perp \rightarrow Y^*$ tasvir

$$\psi([x^*]) = x^*/Y^\perp, \quad [x^*] \in X^*/Y^\perp \text{ şeklinde olup bu iyi tanımlı örten bir lineer izometridir.}$$

1.2 Banach Örgülen ve Pozitif Operatörler

Bir küme üzerinde " $\geq$ " sıralama bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlayan bir işlemdir.

- ① Her bir x için $x \geq x$ (yansım)
- ② $x \geq y$ ve $y \geq x \Rightarrow x = y$ (ters simetri)
- ③ $x \geq y$ ve $y \geq z \Rightarrow x \geq z$ (geçirgenlik)

$$x \succ y, x \succeq y \text{ ve } x \neq y$$

Bir sıralama bağıntısı ile verilmiş bir kümeye kısmi sıralı küme denir.

Bir X reel vektör uzayı üzerinde bir vektör uzayı sırası aşağıdaki iki ekstra özelliği sağlayan X 'deki kısmi sıralama bağıntısı ile uyumlu X üzerindeki " $\succeq$ " sıralama bağıntısıdır.

(a) $x \succ y \Rightarrow x+z \succ y+z$, her bir $z \in X$ için

(b) $x \succ y \Rightarrow \alpha x \succ \alpha y$, $\alpha \geq 0$ skaler için

Tanım: Kısmi Sıralı Bir Vektör Uzayı (ya da sıralı v.u.)

Bir vektör uzayı sırası ile donatılmış bir reel vektör uzayıdır.

X sıralı bir vektör uzayı ise $X^+ = \{x \in X : x \succeq 0\}$

X^+ 'in pozitif konisi ya da konisi denir.

X^+ konisi aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $X^+ + X^+ \subseteq X^+$

(ii) $\alpha X^+ \subseteq X^+$ ($\alpha \geq 0$)

(iii) $X^+ \cap (-X^+) = \{0\}$

(i), (ii) ve (iii) özelliklerini sağlayan X 'in bir C alt kümesine X 'in konisi (konveksi) olarak anılır.

Eğer C , X reel vektör uzayında bir koni ise o zaman $x-y \in C$, $X^+ = C$ olarak şekilde X üzerinde bir vektör uzayı sırası olduğunda " $\succeq$ " ikili işlemi $x \succ y$ ile tanımlanır.

* X sıralı bir vektör uzayına eğer $X = X^+ - X^+$ ise bir üretilen koniye sahiptir denir.

$x \in X$ elemanı: $x = y - z$ $y, z \in X^+$ ya da eş değer olarak her bir $x \in X$ için $y \geq x$ bağıntısını sağlayan bir $y \in X^+$ mevcuttur.

Tanım:

İki sıralı vektör uzayı arasındaki $T: X \rightarrow Y$ operatörüne

① $x \geq 0 \Rightarrow Tx \geq 0$ ise pozitif ($T \geq 0$) operatör denir.

② $x > 0 \Rightarrow Tx > 0$ ise kesinlikle pozitif ($T > 0$) operatör denir.

③ İki pozitif operatörün farkı olarak yazılabiliyorsa "regüler op" denir.

Tüm regüler operatörlerin topluluğu sıralı bir vektör uz. olup $\mathcal{L}_r(X, Y)$ ile gösterilir.

Tanım:

Kısmi sıralı bir X vektör uzayının bir A alt kümesine eğer her bir $a \in A$ için

$x \leq a \leq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ varsa sıra sınırlı küme denir.

Tanım:

X ve Y iki sıralı vektör uzayı olsun.

$T: X \rightarrow Y$ operatörüne eğer X deki sıra sınırlı kümeleri Y deki sıra sınırlı kümelere dönüştürürse "sıra sınırlı operatör" denir.

Sıra sınırlı operatörlerin topluluğu $\mathcal{L}_b(X, Y)$ ile gösterilir. $\mathcal{L}_b(X, Y)$ bir sıralı vekt. uz. olup $\mathcal{L}_r(X, Y) \subseteq \mathcal{L}_b(X, Y)$ dir.

Teorem: (Kantorovitch)

X ve Y iki sıralı vekt. uz. ve $T: X^+ \rightarrow Y^+$ toplamsal bir izasır olsun. Yani tüm $x, y \in X^+$ için $T(x+y) = T(x) + T(y)$ olsun. Eğer X 'in konisi üretilen (üreten) ve Y Archimedean ise o zaman T X 'den Y 'ye bir pozitif operatöre tek olarak genişler. Bu tek lineer genişleme yine T ile gösterilirse

$$Tx = Tx_1 - Tx_2$$

Burada $X = x_1 - x_2$ iki pozitif vektörün farkını temsil eder.

Tanım:

Bir E örgü sıralı vektör uzayına bir Riesz uzayı denir. (ya da vektör örgü uzayı) denir.

Eğer her vektör çiftinin bir supremumu ve bir de infimumu varsa Riesz uzayı adını alır.

$\{x, y\}$ vektör çifti için

$$x \vee y = \sup \{x, y\} \text{ ve } x \wedge y = \inf \{x, y\}$$

x , Riesz uzayının bir elemanı ise

$$x^+ = x \vee 0 \quad (\text{pozitif kısmı})$$

$$x^- = (-x) \vee 0 \quad (\text{negatif kısmı})$$

$$|x| = x \vee (-x) \quad (\text{mutlak değeri})$$

$$x = x^+ - x^- \text{ ve } |x| = x^+ + x^- \quad (\neq)$$

$$(x, y) \rightarrow x \vee y$$

$$(x, y) \rightarrow x \wedge y$$

$$x \rightarrow x^+$$

$$x \rightarrow x^-$$

$$x \rightarrow |x|$$

fonksiyonlarına Riesz uzayının örgü izemleri denir.

(*)'dan Riesz uzayının bir üreten koniye sahip olduğu elde edilir.

Tanım:

Üstten sınırlı bostan farkı her alt kümesinin en küçük üst sınırı varsa Riesz uzayına bir Dedekind (ya da sıra) tam uzay denir.

Bu tanım sayılabilir alt kümeler için geçerli olduğu zaman Riesz uzayına σ -Dedekind tam uzay denir.

Sonuç:

E ve F Riesz uzayları ve F Dedekind tam için $E \rightarrow F$ operatörü ancak ve ancak regüler operatör ise sıra sınırlıdır.

Teorem: (F. Riesz - Kantorovich)

Eğer E ve F Riesz uzayları ve F Dedekind tam ise o takdirde $\mathcal{L}_r(E, F)$ sıra vektör uzayı $\mathcal{L}_r(E, F) = \mathcal{L}_b(E, F)$ olacak şekilde Dedekind tam bir Riesz uzayıdır.

Ayrıca ögü işlemleri tüm $T \in \mathcal{L}_r(E, F)$ ve $x \in E^+$ için

$$① T^+(x) = \sup \{ T y : 0 \leq y \leq x \}$$

$$② T^-(x) = \sup \{ -T y : 0 \leq y \leq x \}$$

$$③ |T|(x) = \sup \{ T y : -x \leq y \leq x \} \text{ şeklinde verilir.}$$

$|T| = TV(-T)$ ye T 'nin modülü denir.

①, ② ve ③ formüllerine Riesz-Kant formüller denir.

$S, T \in \mathcal{L}_r(E, F)$ operatörlerine eğer $SA = 0$ ise ayırık denir.

Eğer x , bir Riesz uzayında bir pozitif vektör ise 0 sıfırından $y \wedge (x-y) = 0$ eşitliğini sağlayan pozitif y vektörüne x -in bileşeni denir.

Teorem: Abramovich

Eğer $T: E \rightarrow F$ Dedekind tam Riesz uzayları arasında bir operatör ise o takdirde (her bir $x \in E^+$ için)

$$① T^+(x) = \sup \{ T y : y \in E \text{ ve } y \wedge (x-y) = 0 \}$$

$$② T^-(x) = \sup \{ -T y : y \in E \text{ ve } y \wedge (x-y) = 0 \}$$

$$③ |T|x = \sup \{ T y - T(x-y) : y \in E \text{ ve } y \wedge (x-y) = 0 \}$$

17.02.2020
Ptesi

Bölüm 1.

Değişmez (Invariant) Alt Uzaylar

X bir Banach uzayı ve $T: X \rightarrow X$ sınırlı bir lineer operatör ve V , X 'in bir alt uzayı olsun.

V alt uzayında eğer $V \neq \{0\}$ ve $V \neq X$ ise asikar olmayan uzay denir.

Eğer $T(V) \subseteq V$ ise V 'ye T altında invarianttir denir.
(T -invariant)

Eğer V T ile değişmeli olan X üzerindeki her sınırlı operatör altında invariant ise V 'ye T için hiperinvarianttir. (T -hiper invariant) denir.

$$"S \in \mathcal{L}(X) \text{ ve } ST = TS \Rightarrow S(V) \subseteq V"$$

* Eğer X bir Banach ögü ve T bir pozitif op. ise o zaman eğer V , T ile değişmeli olan X üzerindeki her pozitif operatör altında invariant ise V 'ye T 'nin ögü hiperinvarianttır. (1-hiperinvariant) denir

~~1.1~~ 1.1 Değişmez Altuzaylar

Eğer $T: X \rightarrow X$ bir operatör ve $x \in X$ ise $\{x, Tx, T^2x, \dots\}$ vektörlerinin kümesine x 'in T altındaki yörüngesi denir. (T -yörünge, T -orbit)
 x 'in yörüngesi ile üretilmiş alt uzaya x 'in T -yörünge uzayı denir.

T yörünge uzayı $O_T(x)$ ile gösterilir.

$x \neq 0 \Rightarrow O_T(x) \neq \{0\}$ olduğu aaktır.

Yörünge uzayı yoğun olan x vektörüne bir dögü denir. (T -dögü). Yani $\overline{O_T(x)} = X$ ise x bir dögüdür. (cyclic)

T 'nin her bir yörüngesi T altında invarianttır. Eğer bir $x \neq 0$ için $\overline{O_T(x)} \neq X$ ise $\overline{O_T(x)}$ kapanısı asıkak olmayan kapalı bir T -invariant alt uzayıdır.

Bu nedenle eğer V , X 'in asıkak olmayan kapalı bir T -invariant alt uzayı ise o zaman her bir $0 \neq x \in V$ için yörünge uzayının kapanısı, $\overline{O_T(x)}$, V 'de ikenmiştir. (V 'dedir)

* Bir Banach uzayı üzerinde sınırlı bir operatörün asıkak olmayan kapalı bir alt uzaya sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul onun dögü olmayan asıkak olmayan bir vektöre sahip olmasıdır.

Tanım 1.1

Banach uzayı üzerindeki sınırlı bir operatöre eğer birim operatörünün bir katı ise skaler operatör denir.

Lemma: 1.2

$T: X \rightarrow X$ sınırlı bir operatör ise T 'nin çektiği ve görüntü uzayı T -hiperinvariant alt uzaylardır.

İspat:

$S \in \mathcal{L}(X)$ op'nün T ile değişmeli olduğunu varsayalım. Eğer $x \in \text{Ker } T$ ise $T(Sx) = S(Tx)$ olmasından $S(\text{Ker } T) \subseteq \text{Ker } T$ yani $\text{Ker } T$ kapalı bir T -hiperinvariant alt uzayı olur. Her bir $x \in X$ için $S(Tx) = T(Sx)$ denkleminin geçerli olmasından $S(Tx) \subseteq T(x)$ yani T 'nin görüntü uzayı T -hiperinvarianttır.

Sonuç 1.3

Eğer bir T sınırlı lineer operatörü bire-bir olmayan ya da yoğun görüntü uzayına sahip olmayan sıfırdan farklı bir operatörle değişmeli ise o zaman T 'nin asikar olmayan kapalı bir invariant alt uzayı vardır.

Sonuç 1.4

Eğer $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörünün asikar olmayan kapalı bir alt uzayı yoksa o zaman T ile değişmeli olan operatör birebirdir ve yoğun görüntü uzayına sahiptir.

$T: X \rightarrow X$ sınırlı operatörünün bir öz uzayı

$N_\lambda = \{x \in X : Tx = \lambda x\}$ formunda bir alt uzaydır. Burada λ , T 'nin bir öz değeri.

Eğer "0", T 'nin bir öz değeri ise $N_0 = \ker T$

* Öz uzaylar, sıfır olmayan kapalı alt uzaylardır.

* T , skaler olmayan bir operatör ise onlar X 'ten farklıdır. (öz uzaylar)

Öz uzaylar aynı zamanda hiperinvarianttir.

Lemma 1.5

Herhangi bir $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörünün her öz uzayı T -hiperinvarianttir. Ayrıca eğer T , skaler değil ise T 'nin her öz uzayı asikar değildir.
nontrivial

İspat:

λ , $T: X \rightarrow X$ sınırlı operatörünün bir öz değeri ve

$$N_\lambda = \{x \in X : Tx = \lambda x\} = \ker(T - \lambda I) \quad (\ker(T - \lambda I))$$

Hipotezden $\ker(T - \lambda I) \neq X$ dir. T ile değişmeli olan her operatör $T - \lambda I$ ile de değişmeli olup lemma 1.2 den N_λ kapalı alt uzayının T -hiperinvariant olduğu elde edilir.

Sonuç 1.6

Sonlu boyutlu kompleks Banach uzayı üzerindeki her skaler olmayan operatör asikar olmayan hiperinvariant alt uzaya sahiptir.

İspat:

$T: X \rightarrow X$ sonlu boyutlu kompleks Banach uzayı üzerindeki bir skaler olmayan operatör olsun. $T, \lambda \in \mathbb{C}$ özdeğerine sahiptir. T skaler olmayan bir operatör olduğundan N_λ özuzayı asikar olmayan ve lemma 1.5 ten N_λ, T -hiperinvarianttir.

Sonuç 1.7

Sonlu boyutlu reel Banach uzayı üzerindeki skaler olmayan bir $T: X \rightarrow X$ operatörü için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (1) Eğer $\dim X$ bir tek sayı ise T asikar olmayan bir hipervariant alt uzaya sahiptir.
- (2) Eğer $\dim X$ 2'den büyük bir çift sayı ise o zaman T hipervariant olması gerekmeyen asikar olmayan invariant alt uzaylara sahiptir.
- (3) Eğer $\dim X = 2$, o zaman T 'nin asikar olmayan invariant alt uzaylara sahip olması gerekmez.

Teorem 1.8

$T: X \rightarrow X$ skaler olmayan bir operatör olsun. Eğer T ya da T^* bir özdeğere sahipse o zaman hem T hem de T^* 'in asikar olmayan kapalı hipervariant alt uzaylara sahiptir.

İspat:

T skaler değilse T^* da öyledir.

Eğer T bir λ özdeğerine sahipse lemma 1.5 ten

$N_\lambda = \{x \in X : Tx = \lambda x\}$ öz uzayı asikar olmayan kapalı T -hipervariant alt uzayıdır.

Bir λ skaler için $T^*x^* = \lambda x^*$ ($x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$) olsun.

$V = \overline{(T - \lambda)(X)}$ olsun.

$T \neq \lambda I$ old. dan $V \neq \{0\}$ dir.

Ayrıca $x^* \neq 0$ ve $\langle (T - \lambda)x, x^* \rangle = \langle x, (T^* - \lambda)x^* \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$
(her bir $x \in X$ için)

olduğundan $V \neq X$ elde edilir. Böylece V , X 'in asıkır olmayan kapalı alt uzayıdır.

Eğer $S \in \mathcal{L}(X)$ operatörü $ST = TS$ koşulunu sağlarsa her bir $x \in X$ için $S[(T - \lambda)x] = (T - \lambda)(Sx) \in V$ ve dolayısıyla $S(V) \subseteq V$ bulunur.

İspatı tamamlamak için eğer λ , T 'nin bir öz değeri ise λ aynı zamanda T^{**} da bir öz değerdir. Bu nedenle T^* 'in asıkır olmayan kapalı hiperinvariant bir alt uzayı olduğu elde edilir.

⊛ X 'in bir kapalı V alt uzayına eğer $V \oplus W = X$ olacak şekilde başka bir kapalı W alt uzayı varsa zümleler uzayı denir.

W uzayına V 'nin zümleyeni denir.

$P: X \rightarrow X$, $P^2 = P \Rightarrow$ bir izdüşüm operatörüdür.

Lemma 1.9

$P \in \mathcal{L}(X)$ izdüşümünün görüntü uzayının $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörü altında invariant olması için gerek ve yeter koşul

$TP = PTP$ olmasıdır.

İspat:

$T \in \mathcal{L}(X)$ ve $Y = P(X)$ olsun.

Y , T -invariant olsun. Eğer $x \in X$ ise $TPx \in Y$ olup ve böylece $TPx = P(TPx)$ olur. Yani $TP = PTP$ olur.

Tersine, $TP = PTP$ ve $y \in Y$ olsun.

$Ty = TPy = P(TPy) \in Y$ olup bu da Y 'nin T -invariant olması demektir.

Teorem 1.10

Bir Banach uzayı üzerindeki sürekli $T: X \rightarrow X$ operatörünün bir (reducing) indirgenen alt uzayına sahip olması için gerek T ile değişmeli olan sürekli bir P izdüşümünün var olmasıdır.

$\downarrow$
 $P: X \rightarrow X$

Operatörler Cebiri!

X bir Banach uzayı olsun.

$\mathcal{L}(X)$ uzayının bir A vektör alt uzayına

$S, T \in A \Rightarrow ST \in A$ ise operatörler cebiri denir.

Bir A operatörler cebirine eğer $I \in A$ ise birimseldir denir.

$\mathcal{L}(X)$ deki A operatörler cebirinin dual cebiri

$A^* = \{T^*: T \in A\}$ ile tanımlı $\mathcal{L}(X^*)$ 'in A^* alt cebiridir.

Eğer A , $\mathcal{L}(X)$ de kapalı ise A operatörler cebirine kapalıdır denir.

$\mathcal{I}$ operatörlerin bir kümesi olsun. $\mathcal{I}$ 'yi içeren tüm alt cebirlerin kesişimine $\mathcal{I}$ ile üretilmiş cebir denir.

$T \in \mathcal{I}(X)$ operatörü ile üretilmiş cebir A_T ile gösterilecek

$A_T = \{ P(T) : p \text{ sabit termi olmayan bir polinom} \}$

Bir $\mathcal{I}$ kümesi ile üretilmiş birimel cebir $SU\{\mathcal{I}\}$ ile üretilmiş cebirdir.

$\exists P(T) : p \text{ bir polinom?}$

Eğer $A, \mathcal{I}(X)$ 'in bir alt cebiri ise o zaman X 'in bir V alt uzayına eğer V, A 'daki her operatör altında invariant ise A -invarianttir denir.

V, A invarianttir : her $T \in A$ için $T(V) \subseteq V$

Tanım 1.1

Bir A operatörler cebirine eğer A 'nın asıkas olmayan kapalı A -invariant alt uzayı yoksa geçişli (transitive) denir. Aksi halde A 'ya geçişli olmayan operatörler cebiri denir.

Teorem 1.2

Bir X Banach uzayı üzerindeki sınırlı operatörlerin bir A cebiri için aşağıdaki ifadeler denktir:

① A cebiri geçişli değildir.

② Her bir $A \in A$ için

$$\langle Ax, x^* \rangle = \langle x, A^* x^* \rangle = 0 \text{ olacak şekilde sıfırdan farklı}$$

bir $x \in X$ vektörü ve sıfırdan farklı bir $x^* \in X^*$ lineer fonksiyoneli vardır.

İspat:

① $\Rightarrow$ ②

$Ax = \{0\} : Ax, x \in W$ için

W asık olmayan kapalı A -invariant alt uzayı olsun.

Bir $0 \neq x \in W$ vektörünü ve $V = \overline{Ax}$ kapalı vektör alt uzayını göz önüne aldım.

$V \subseteq W$ olup böylece $V \neq X$. Bu nedenle V 'yi sıfırlayan yani $\langle Ax, x^* \rangle = 0$ ($\forall A \in A$ için) olacak şekilde $0 \neq x^* \in X^*$ vardır.

② $\Rightarrow$ ①

$\langle Ax, x^* \rangle = 0$ ($\forall A \in A$) ve sıfırdan farklı $x \in X$ ve $x^* \in X^*$ vektörlerinin var olduğunu kabul ederim.

$Ax = \{0\} : Ax, x \in W$? kapalı alt uzayı X 'e eşit değildir.

Eğer $Ax \neq \{0\}$ ise $\overline{Ax}$, asık olmayan kapalı A -invariant alt uzayıdır.

Eğer $Ax = \{0\}$ ise bir boyutlu

$V = \{\lambda x : \lambda \text{ skaler}\}$ vektör uzayı asık olmayan, kapalı ve A -invarianttır.

24.02.2020
Ptesi

Sonuç 1.13

Eğer bir X Banach uzayı üzerindeki A operatörler cebiri geçişli değilse (non-transitive) o zaman A^* dual cebiri de geçişli değildir.

İspat:

Tüm $A \in A$ için $\langle Ax, x^* \rangle = 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir $x \in X$ ve $x^* \in X^*$ mevcuttur. x vektörünü X^{**} 'in bir elemanı olarak aldığımızda her bir $A \in A$ için $\langle x^*, (A^*)^* x \rangle = 0$ yazabiliriz.

Böylece Teorem 1.12'den $L(X^*)$ 'in A^* alt cebiri genişletilmiştir.

Lemma 1.14

Eğer $T \in L(X)$ ise 0 takdirde;

(1) T 'nin $\{T\}' = \{S \in L(X) : ST = TS\}$ değişmeli (commutant) $L(X)$ 'in kapalı birimel bir alt cebiridir.

(2) T 'nin asikar olmayan kapalı bir hiperinvariant alt uzayına sahip olması için gerek $\{T\}'$ 'nin genişletilmediği olmayan bir cebir olmasıdır.

Teorem 1.15

Reel ya da kompleks bir sonsuz boyutlu Banach uzayı üzerindeki $\neq 0$ sıfır olmayan her bir kompakt operatörün asikar olmayan kapalı bir hiperinvariant alt uzayı vardır.

Sonuç 1.16 (Gomolozov)

Eğer sonsuz boyutlu reel ya da kompleks bir Banach uzayı üzerindeki sürekli bir T operatörü sıfır olmayan kompakt bir operatör ile değişmeli ise 0 zaman

T asikar olmayan (non-trivial) kapalı bir ~~hiper~~invariant alt uzaya sahiptir.

Şuurlu bir $T: X \rightarrow X$ operatörüne eger $P(T)$ bir kompakt operatör olarak sekilde sıfırdan farklı bir p polinomu var ise polinom kompakt operatör denir.

Sonuç 1.17 (Bernstein-Robinson)

Sonsuz boyutlu reel ya da kompleks bir Banach uzayı üzerindeki her bir polinom kompakt operatörün asikar olmayan kapalı bir invaryant alt uzayı vardır.

İspat:

$T: X \rightarrow X$ sonsuz boyutlu bir Banach uzayı üzerinde şıurlu bir operatör olsun.

Eger T bir skaler operatör ise o zaman T 'nin asikar olmayan kapalı bir invaryant alt uzayı vardır.

Böylece, T 'nin skaler olmayan polinom kompakt olduğunu kabul edelim. Sıfır olmayan bir polinom $P(T)$ bir kompakt operatör olmak koşuluyla

$$p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0 \text{ olsun.}$$

Eger $p(T) \neq 0$ ise (Teo 1.15'e göre) sıfır olmayan $p(T)$ kompakt operatörün asikar olmayan kapalı bir $P(T)$ -hiper invaryant alt uzayı vardır. Bu uzayı V olsun.

$T, P(T)$ ile değişmediğinden V aynı zamanda T -invarianttir.

$P(T) \neq 0$ olduğunu kabul edelim $T^n = \sum_{i=0}^{n-1} (-a_i)T^i$ alalım.

Sıfırdan farklı bir $x \in X$ sabit vektörü ve V de $\{x, Tx, \dots, T^{n-1}x\}$ ile üretilmiş sıfırdan farklı kapalı alt uzay olsun. X sonsuz boyutlu old. dan $V \neq X$ olup böylece V, T -invariant elde edilir.

1.2 Lomonosov İnvaryant Alt Uzay Teoremi:

Teorem 1.18

Eğer A reel ya da kompleks bir Banach uzayı üzerindeki genişli bir operatörler cebiri ise o zaman sıfırdan farklı her bir K kompakt operatörü için AK kompakt operatörünün sıfırdan farklı bir sabit noktası olacak şekilde $(AKu = u, u \neq 0)$ bir $A \in A$ vardır.

Teorem 1.19 (Lomonosov)

Eğer kompleks bir Banach uzayı üzerindeki skaler olmayan bir T operatörü sıfır olmayan kompakt bir operatör ile değişmeli ise o zaman T 'nin asıkır olmayan kapalı bir hiperinvariant alt uzayı vardır.

İspat:

$T \in L(X)$ skaler olmayan bir operatör ve sıfırdan farklı kompakt bir $K \in L(X)$ için $TK = KT$ olsun.

Asıkır olmayan kapalı bir T -hiperinvariant alt uzayın varlığını göstermek için, Lemma 1.14'e göre, T 'nin değişiminin (commutant) genişli olmadığını göstermek yeter.

Aksiine, $\{T\}$ 'değişecinin bir geçmeli cebir olduğunu kabul edelim. Böylece Teo 1.18'den, AK sabit bir noktaya sahip olacak şekilde bir $A \in \{T\}$ vardır $F = \{x \in X : Ax = x\}$ olsun.

Açıkça F sıfır olmayan kapalı bir AK -hiperinvariant alt uzaydır. AK bir kompakt op. old. dan ve F üzerinde de birim olduğundan F 'nin sonlu boyutlu olduğu elde edilir. T, AK ile değişmeli ve F, AK -hiperinvariant old. dan F 'nin T -invariant olduğunu görürüz. Böylece $T(F) \subseteq F$ ve F 'nin sonlu boyutlu Banach uzayı olması gereğinden $T: F \rightarrow F$ operatörünün bir $\lambda \in \mathbb{C}$ değeri vardır.

$N_\lambda = \{x \in X : Tx = \lambda x\}$ olsun.

T skaler olmayan bir operatör olduğundan N_λ , X 'den farklı sıfır olmayan kapalı bir $\{T\}$ -invariant alt uzayıdır.

Bununla birlikte, bu kabulümüzle uyuşur. (?)

Bu da ispatı tamamlar.

** Teorem 1.20 (Lomonosov İnvariant Alt Uzay Teoremi)

Kompleks bir Banach uzayı üzerindeki sürekli bir $T: X \rightarrow X$ operatörü için aşağıdaki üç özelliği sağlayan bir $S \in L(X)$ operatörünün var olduğunu kabul edelim:

(1) S skaler olmayan bir operatördür

(2) S, T ile değişmezdir.

(3) S , sıfır olmayan bir komp. op. ile değişmezdir.

0-takdirde T 'nin azıkar olmayan kapalı bir invaryant alt uzayı vardır.

İspat:

$T, S \in \mathcal{L}(X)$ operatörleri teoremin koşullarını sağlarlar. O zaman T , Teo 1.19'un hipotezini de sağlar.

Bu nedenle S 'nin azıkar olmayan kapalı bir hiper-invaryant alt uzayı vardır. T, S ile değişmeli olduğundan, bu uzay T altında invaryanttır.

* Teoremdaki T operatörüne Lomonosov operatörü denir.
($\mathcal{L}(X)$)

* Bir kompleks Banach uz. üzerindeki her Lomonosov operatörünün azıkar olmayan kapalı bir invaryant alt uzayı vardır.

1.3 Pozitif Operatörler İçin İnvaryant İdealler

Tanım 1.21

$A, B: X \rightarrow X$ bir Banach uzayı üzerinde iki sınırlı operatör olsun. Bu operatörlerin komütatörü (değişeci)

$[A, B] = AB - BA$ şeklinde tanımlı $[A, B]$ operatörüdür.

$A, B \in \mathcal{L}(X)$ operatörleri ancak ve ancak $[A, B] = 0$ ise değişmelidir.

Bir $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörünün değişeci:

$$\mathcal{I}(T) = \{S \in \mathcal{L}(X) : [T, S] = 0\}$$

Tanım 1.22

$B: E \rightarrow E$ bir Banach örgüsü üzerindeki bir pozitif operatör olsun.

Super sağ-değerli $[B], [A, B] \geq 0$ olacak şekilde tüm $A: E \rightarrow E$ tüm pozitif operatörlerinin topluluğudur.

$$[B] = \{ A \in L(E)_+ : AB - BA \geq 0 \}$$

Benzer şekilde super sol-değerli $<B],$

$[A, B] \leq 0$ olacak şekilde tüm $A: E \rightarrow E$ pozitif operatörlerinin topluluğudur.

$$<B] = \{ A \in L(E)_+ : AB - BA \leq 0 \}$$

$$A \in [B] \Leftrightarrow B \in <A]$$

$$<B] \cap [B] = \{ B \}_+ \quad (B \text{'nin değışccinin pozitif kısmı})$$

Bir E Banach örgüsü için $B: E \rightarrow E$ pozitif operatörünü göz önüne alalım.

$$B \text{'nin sıfır idealü } N_B = \{ x \in E : B|x| = 0 \}$$

Ayrıca, N_B, E 'de kapalı bir idealdir.

B 'nin görüntü idealü, onun görüntü kümesi ile üretilen ideal olup R_B ile gösterilir. (Range ideal)

$$R_B = \{ y \in E : |y| \leq Bx \text{ olacak şekilde bir } x \in E^+ \text{ vardır?} \}$$

Lemma 1.3

Eğer $B: E \rightarrow E$ bir Banach örgüsü üzerindeki bir pozitif operatör ve $A \in [B]$ ise o takdirde

- (1) N_B, A -invarianttir.
- (2) R_A, B -invarianttir.

Özellikle $\mathcal{N}_B$ ve $\mathcal{P}_B$ ideallerinin her ikisi de ℓ -hiperinvarianttir.

Teorem 1.24 (Abr-Aliprantis-Burkholder)

$B: E \rightarrow E$, E Banach örgüsü üzerinde bir pozitif operatör olsun.

Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $S: E \rightarrow E$ pozitif operatörünün var olduğunu kabul edelim:

(1) $S \in \mathcal{L}(B)$, $(SB \leq BS)$

(2) S , bir $x_0 > 0$ için quasinilpotent: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S^n x_0\|^{1/n} = 0$

(3) S sıfır olmayan kompakt operatörü domine eder.
0 takdirde B operatörünün asıkır olmayan kapalı bir invariant idealı vardır.

Teorem 1.25

$B: E \rightarrow E$, E Banach örgüsü üzerindeki bir pozitif operatör olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $S: E \rightarrow E$ bir pozitif operatörünün var olduğunu kabul edelim:

(1) $S \in \mathcal{L}(B)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|S^n x_0\|^{1/n} = 0$ olacak şekilde bir $x_0 > 0$ vardır.

(3) S , sıfır olmayan bir AM-kompakt op'nü domine eder.
0 takdirde B op-nün asıkır olmayan kapalı bir inv. idealı vardır.

Teorem 1.26

$B: E \rightarrow E$, E Banach örgüsü üzerindeki bir poz. op. olsun. Aşağı koşulları sağlayan bir $S: E \rightarrow E$ poz. op. nün var olduğunu kabul edelim.

(1) $S \in [B]$, $(SB \geq BS)$

(2) S quasinilpotenttir.

(3) S , sıfır olmayan AM-kompakt op-nü domine eder. 0 takdirde B op-nün asıkarak olmayan kapalı bir inv. ideali vardır.

Teorem 1.27

$S, B: E \rightarrow E$ bir Banach örgüsü üzerindeki aşağı koş. sağlayan değişmeli sıfır olmayan iki poz. op. olsun.

(a) Bunlardan birisi bir $0 \neq x > 0$ vekt. için quasinilpotenttir.

(b) Diğer sıfır olmayan AM-kompakt op-ü domine eder.

0 takdirde B ve S 'nin ortak asıkarak olmayan kapalı bir inv. ideali vardır.

İspat:

S 'nin bir $x_0 > 0$ de yerel quasinilpotent olduğunu kabul edelim.

B , sıfırdan farklı K AM-kompakt operatörünü domine etsin.

S , kesin olarak pozitif^(s>0) olmadığından

U_S , istenilen ortak asıkarak olmayan kapalı invaryant ideal olur.

S kesin olarak pozitif olsun.

$\|B+S\| < 1$ old. kabul edelim.

$A = \sum_{n=0}^{\infty} (B+S)^n$ ve J , Ax_0 ile üretilen ideal'i gösterin.

$J = \{y \in E : \|y\| \leq \lambda \|Ax_0\| \text{ olacak şekilde } \lambda > 0 \text{ vardır?}$

J , sıfır olmayan $(B+S)$ -invariant idealdir.

$0 \leq B$, $S \leq S+B$ olduğundan bu ideal hem B hem de S altında invarianttir.

Eğer $J \neq E$ ise o zaman J hem B ve hem de S altında asıkarak olmayan kapalı bir ideal invarianttir.

$J = E$ olsun. $\lambda \neq 0$ old. dan $\lambda y_0 \neq 0$ olacak şekilde bir $0 < y_0 \in J$ vardır. Buradan S in y_0 'da quasinilpotent olduğu görülür.

$\| \lambda y_0 \| < B y_0 \in J$ old. dan (lemma 4.16 dan)

her bir $x \in E$ için

$M \lambda y_0 > 0$ ve $\|Mx\| \leq \|x\|$ olacak şekilde bir $M: E \rightarrow E$ operatörü vardır.

SMK operatörünü göz önüne aldım.

K , AM -kompakt old. dan SMK da AM -kompakttır.

$s > 0$ old. ve $M \lambda y_0 > 0$ old. dan

$SMK y_0 > 0$ ve böylece SMK , sıfır değildir.

Aynı zamanda, $\|SMKx\| \leq S \|MKx\| \leq S (\|Kx\|) \leq S B \|x\|$

Böylece SB poz. op. nü sıfır olmayan SMK , AM -kompakt op. nü domine eder, y_0 da quasinilpotenttir ve $S+B$ poz. op. ile değişmezdir.

Teorem 1.25'den asikar olmayan kapalı bir $(S+B)$ -invariant idealı vardır. Bu ideal hem B hem de S altında invarianttir.

02.03.2020
Ptesi

Sonuç 1.28

Bir E Banach örgüsü üzerindeki bir pozitif $B: E \rightarrow E$ operatörünün aşağıdaki iki koşulu sağladığını varsayalım:

(1) B , sıfır olmayan pozitif bir vektörde yerel quasinilpotenttir.

(2) B 'nin bir küme E sıfır olmayan bir AM -kompakt operatörü domine eder.

Bu takdirde B 'nin asikar olmayan kapalı bir invariant idealı vardır.

İspat:

Bir önceki teoremi B ve $S=B^m$ operatörlerine uygulamak yeter.

Burada B^m sıfır olmayan AM -kompakt operatörü domine eder.

Sınırlı küme $\rightarrow$ norm tam sınırlı küme

Teo 1.29

$B: E \rightarrow E$ bir diskret Banach örgü üzerinde bir pozitif operatör olsun. Sıfır olmayan pozitif bir vektörde yerel quasinilpotent olacak şekilde sıfır olmayan bir $S \in [B]$ operatörünün var olduğunu kabul edelim.

Bu takdirde B 'nin asikar olmayan kapalı bir invariant idealı vardır.

Sonuç 1.30

$B: l_p \rightarrow l_p$ ($1 \leq p < \infty$) pozitif bir operatör olsun.

Eğer

(1) B ile değişme

(2) Sıfır olmayan pozitif bir vektörde yerel quasinilpotent olacak şekilde sıfır olmayan pozitif bir $S: l_p \rightarrow l_p$ operatörü varsa o takdirde B 'nin sıfırdan olmayan kapalı bir invariant idealı vardır.

Sonuç 1.31

Eğer pozitif $B: l_p \rightarrow l_p$ ($1 \leq p < \infty$) operatörü pozitif bir vektörde quasinilpotent ise o zaman B 'nin sıfırdan olmayan kapalı bir invariant idealı vardır.

Teorem 1.32 (Troitsky)

Eğer $B: l_p \rightarrow l_p$ ($1 \leq p < \infty$) B kompakt olacak şekilde bir ideal indirgenemez regüler quasinilpotent operatör ise o takdirde

① $|B|$ modülü quasinilpotent değildir.

② $|B|$ modülünün spektral yarıçapı bir δ değeridir ve $|B|$ 'nin sıfırdan olmayan kapalı bir invariant alt uzayı vardır.

③ B^* quasinilpotent değildir. B^* 'nin spekt. yarıçapı bir δ değeridir. Sonuç olarak, B^* 'nin sıfırdan olmayan kapalı bir invariant alt uzayı vardır.

İspat:

$|B|$ 'nin quasinilpotent olmadığını gösterelim.

Gerçekten eğer öyle olsaydı sonuc 1.31'den

$|B|$ operatörünün asikar olmayan kapalı bir invariant idealı var olurdu.

Bu ideal kabülümüşe karşıt olarak B -invariant olurdu. Böylece, $r(|B|) > 0$

Daha önceki bir teorem (Kitapta 7.9)

$r(|B|)$ 'nin $|B|$ operatörünün spektrumuna ait olduğunu garanti eder.

Aynı zamanda burada $|B|$ 'nin bir skaler operatör olmadığı da açıktır.

Çünkü aksi takdirde B operatörünün asikar olmayan kapalı bir inv. idealı var olur.

$r_{ess}(|B|) = 0$ yani $|B|$ nin esas olarak quasinilpotent olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için;

$|B| = B^+ + B^- = B + 2B^-$ (olduğunu belirtelim) ve böylece her bir n için $|B|^n = (B + 2B^-)^n = B^n + 2B^-$ olduğunu belirtelim. Burada 2 , B ve B^- nin bir polinomudur. Buradan $2B^-$ kompakttır:

$$\| |B|^n \|_{ess} = \| B^n + 2B^- \|_{ess} \leq \| B^n \|$$

Sonuç olarak

$$r_{ess}(|B|) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\| |B|^n \|)_{ess}^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\| B^n \|} = r(B) = 0$$

olup $|B|$ 'nin bir esas olarak quasinilpotent operatör

olması demektir ve yukarıda gösterildiği gibi

$$0 < \theta(|B|) \in \theta(|B|)$$

Önceki bir sonucudan (7.109)

$r(|B|)$, $|B|_E$ (E de) operatörünün bir öz değeri olur

Bu da $r(|B|)$ 'nin E 'de $|B|$ 'nin bir öz değeri old. gerektirir.

Böylece E de karşılık gelen öz uzay $|B|$ 'nin asikar olmayan kapalı invaryant bir alt uzaydır.

Son olarak, eğer B^+ quasinilpotent olsaydı sonuca 1.31'den B^+ 'nin asikar olmayan kapalı bir invaryant alt uzayı var olurdu.

Böylece B^+ 'nin quasinilpotent olmadığı durumu göz önünde bulunduracağız.

$B^+ = B + B^-$ olduğundan yukarıdaki işlemlere benzer olarak

$r_{\text{ess}}(B^+) = 0$ old. gösterilir. Böylece

$0 = r_{\text{ess}}(B^+) < r(B^+)$ olup bu da B^+ 'nin asikar olmayan kapalı bir inv. alt uzayın var olduğunu gerektirir.

Sonuç 1.33

Eğer $T: E_1 \rightarrow E_1$ asikar olmayan kapalı inv. alt uzayları olmayan quasinilpotent bir op. ise o takdirde

(1) ve $|T|$ 'nin ne de T^+ 'nin asikar olmayan kapalı bir inv. ideali vardır.

(2) $|T|$ ve T^+ op.'nin her birinin bir özvektörü vardır ve bu operatörlerin her birinin asikar olmayan kapalı inv. bir alt uzayı vardır.

İspat:

T 'nin regüler old (Teo 3.9) aaktır.

İlk ifade T 'nin asakar olmayan kapalı inv. alt uzaya sahip olmamasından derhal görülür.

İkinci ifade Teo 1.32 den elde edilir.

Teo 1.34

Eğer $\mathcal{H}$ bir kompakt Hausdorff uzayı ise $C(\mathcal{H})$ üzerindeki skaler olmayan her pozitif operatörünün asakar olmayan kapalı hiper-invariant bir alt uzayı vardır.

Özellikle, Her bir Krein op'nün asakar olmayan kapalı hiper-inv. bir alt uzayı vardır.

Eğer $\mathcal{H}$ bir topolojik uzay ise $C_0(\mathcal{H})$ her bir $\varepsilon > 0$ için $\|f(m)\| < \varepsilon$ (tüm $m \in \mathcal{H} \setminus K$ için) ile $\mathcal{H}$ 'nin kompakt bir K alt kümesi var olacak şekilde tüm $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonların Banach örgüsünü gösterir.

$\mathcal{H}$ kompakt ise $C_0(\mathcal{H}) = C(\mathcal{H})$

$\mathcal{H}$ yerel kompakt Hausdorff ve $\mathcal{H}_\infty$, $\mathcal{H}$ 'nin tek nokta kompaktlaştırılması ise 0 zaman

$$C_0(\mathcal{H}) = \{x \in C(\mathcal{H}_\infty) : x(\infty) = 0\}$$

Teorem 1.35 (Schaefer)

$B: C_0(\Omega) \rightarrow C_0(\Omega)$ poz. bir operatör olsun. Burada Ω yerel kompakt Hausdorff uzaydır.

Eğer B , sıfır olmayan pozitif bir vektörde yerel quasinilpotent ise o zaman B 'nin azıkar olmayan kapalı inv. bir ideali vardır.

1.4 Pozitif Operatörler Ailesinin Inv. Alt Uzayları

Tanım 1.36

Bir Banach uzayı üzerindeki sınırlı operatörlerin bir S topluluğuna eğer her bir $S, T \in S$ için $ST \in S$ ($S+T \in S$) ise çarpımsal (toplamsal) yan grup denir.

$L(X)$ deki operatörlerin bir $\mathcal{E}$ top.nu göz önüne aldım. Bir Banach uzayın bir D alt kümesi için

$$\|D\| = \sup_{x \in D} \|x\| \quad \text{Buna uygun olarak} \quad \|\mathcal{E}\| = \sup_{C \in \mathcal{E}} \|C\|$$

Her bir $x \in X$ için $\mathcal{E}x = \{Cx : C \in \mathcal{E}\}$ olm. üzere

$$\|\mathcal{E}x\| = \sup \{ \|Cx\| : C \in \mathcal{E} \}$$

Herhangi bir $A \in L(X)$ için $A\mathcal{E} = \{AC : C \in \mathcal{E}\}$ ve

$$\mathcal{E}A = \{CA : C \in \mathcal{E}\} \text{ tanımlansın.}$$

Her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{E}^n = \{C_1 C_2 \dots C_n : C_1, \dots, C_n \in \mathcal{E}\}$$

$\mathcal{E}$ 'nin değişen:

$$\mathcal{E}' = \{A \in L(X) : AC = CA, \forall C \in \mathcal{E} \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlı binnisel operatör cebiridir.

X 'in bir V alt uzayına eğer her bir $C \in \mathcal{C}$ için V , C -invariant ise $\mathcal{C}$ -invarianttir denir.

$\mathcal{C}$ topluluğuna eğer azıkar olmayan kapalı

$\mathcal{C}$ -inv. bir alt uz. varsa geçişi değildir denir.

Aksi halde $\mathcal{C}'$ ye geçişlidir denir.

Tanım 1.37

$\mathcal{C}$, $\mathcal{L}(X)$ de bir operatörler topluluğu olsun.

① Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|C^n x\|} = 0$ ise $\mathcal{C}'$ ye $x \in X$ de (yerel) quasinilpotenttir denir.

② Eğer $\mathcal{C}'$ 'nin her sonlu alt topluluğu x de (yerel) quasinilpotent ise $\mathcal{C}'$ ye $x \in X$ de sonlu quasinilpotenttir denir.

Eğer $T: X \rightarrow X$ sonlu bir operatör ise

$$\mathcal{Q}_T = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0\} \text{ dir.}$$

$\mathcal{Q}_T$, X 'in T -invariant bir alt uzayıdır.

Daha genel olarak, bu tanım

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{C}}^f = \{x \in X : \mathcal{C}, x \text{ de sonlu quasinilpotenttir}\}$$

Lemma 1.38

$\mathcal{Q}_{\mathcal{C}}^f$ X 'in bir alt uzayıdır ve bu alt uzay hem $\mathcal{C}$ -inv ve hem de $\mathcal{C}'$ -invarianttir.

Bu kısımda $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ Banach rgüsü üzerindeki parital operatörlerin ba olmayan bir topluluğunu gösterin.

$$\mathcal{E}_E^+ = \{x \in \mathcal{E} : |x| \in \mathcal{E}_E^+\}$$

lemma 1.38 den $\mathcal{E}_E^+$ $\mathcal{E}$ 'de bir idealdir.

$[C] = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_+ : AC - CA \geq 0\}$ ye benzer olarak

$[C] = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_+ : AC - CA \geq 0, \text{ her bir } C \in \mathcal{E} \text{ için}\}$ tanımlanır.

$$[C] = \bigcap_{C \in \mathcal{E}} [C]$$

Benzer olarak $[C] = \bigcap_{C \in \mathcal{E}} [C] = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{E})_+ : AC - CA \leq 0, \text{ her bir } C \in \mathcal{E} \text{ için}\}$

lemma 1.39

$[C]$ kümesi $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ de norm kapalı toplamsal ve çarpımsal bir yarı gruptur.

İspat:

$[C]$ nkad norm kapalıdır. 0 ve I de $[C]$ ye aittir.

$S, T \in [C]$ olsun.

Her bir $C \in \mathcal{E}$ için $SC \geq CS$ ve $TC \geq CT$ dir. Bu ezits.

taraf tarafa toplarsak

$$(S+T)C \geq C(S+T) \text{ yani } S+T \in [C] \text{ olur.}$$

$$\text{Son olarak } STC = S(TC) \geq SCT = (SC)T \geq CST$$

olup $ST \in [C]$ bulunur

Sonuç 1.40

$\hat{\mathcal{O}}_E^f$ idealı hem E -inv ve hem de $[E]_{\mathcal{O}}^{\mathcal{O}}$ -inv. tir.

İspat:

$x \in \hat{\mathcal{O}}_E^f$ (sabit) bir vektör alalım. Bu E 'nin her bir sonlu φ alt kümesi için $\|\varphi^n |x|\|^{1/n} \rightarrow 0$ olması demektir.

Her bir $C \in E$ ve $T \in [E]_{\mathcal{O}}^{\mathcal{O}}$ için Cx ve Tx 'in $\hat{\mathcal{O}}_E^f$ 'ye ait olduğunu göstermeliyiz.

$C \in E(fx)$, $T \in [E]_{\mathcal{O}}^{\mathcal{O}}$ ve $F = [c_1, \dots, c_k] \subset E$ olsun.

Eğer $\varphi = [c_1, \dots, c_k, c]$ dursun

$$F^n C = [c_1, \dots, c_k] \varphi^n C \subseteq \mathcal{O}^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Bu nedenle

$$\|F^n |Cx|\|^{1/n} \leq \left[\|F^n C |x|\|^{1/n} \leq \|\varphi^{n+1} |x|\|^{1/(n+1)} \right]^{\frac{n+1}{n}} \rightarrow 0$$

bulunur. Bu da $Cx \in \hat{\mathcal{O}}_E^f$ olduğunu ve böylece $\hat{\mathcal{O}}_E^f$ idealı E -invariant bulunur.

$1 \leq i \leq k$ için $C_i T \leq T C_i$ olup buradan her bir $A \in F^n$ için $A T \leq T A$ bulunur. O halde

$$\|F^n |Tx|\|^{1/n} \leq \|F^n T |x|\|^{1/n} \leq \|T F^n |x|\|^{1/n} \leq \|T\|^{1/n} \cdot \|F^n |x|\|^{1/n} \rightarrow 0$$

olur. Böylece $Tx \in \hat{\mathcal{O}}_E^f$

Yani $\hat{\mathcal{O}}_E^f$ idealı $[E]_{\mathcal{O}}^{\mathcal{O}}$ -invarianttir.

$\mathcal{C}$, $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ de verilsin.

$$\mathcal{J}_{\mathcal{C}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}^n$$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{C}} = \left\{ D \in \mathcal{L}(\mathcal{C})_+ : D \leq \sum_{i=1}^k T_i S_i \right.$$

olacak şekilde $\{T_1, \dots, T_k\} \subseteq \mathcal{C}$ ve $\{S_1, \dots, S_k\} \subseteq \mathcal{S}$

~~Lemma 4.44~~

09.03.2020
Ptesi

Teorem 10.52 (Antonevich-Zebeder-Křtöver)

Γ birim çember ve $z = e^{i\phi} \in \Gamma$ olsun.

Her bir $t \in \Gamma$ için $\{t z^n : n \in \mathbb{N}\}$ yörüngesi Γ 'da yoğunudur.

Her bir $w \in C(\Gamma)$ fonksiyonu ile tüm $x \in C(\Gamma)$ için

$$(*) [Twx](t) = w(t) x(tz), \quad t \in \Gamma \text{ şeklinde tanımlı}$$

$Tw: C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$ ağırlık bileşke operatörünü

birleştirelim.

Eğer $Tw; (*)$ ile tanımlı bir operatör ise onun spektral yarıçapı

$$r(Tw) = e^{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{2\pi} |w(e^{i\theta})| d\theta \text{ şeklindedir.}$$

Ω bir kompakt Hausdorff uzayı ve $\phi: \Omega \rightarrow \Omega$ bir homomorfizm olsun.

$\omega \in C(\Omega)$ ve $T_\omega x(\omega) = \omega(\omega) x(\phi(\omega))$ şeklinde tanımlansın.

T_ω operatörünün spektral yarıçapı

$$r(T_\omega) = \sup_{\int \ln \omega d\mu} e^{\int \ln \omega d\mu}$$

Burada supremum Ω üzerindeki tüm ϕ -invariant Borel olasılık ölçümleri üzerinde alınmaktadır.

$\omega_0 \in C(\mathbb{T})$:

- (a) Her bir $t \in \mathbb{T}$ için $0 \leq \omega_0(t) \leq 1$
- (b) $t=1$, ω_0 'in "0" olduğu tek noktadır.
- (c) $t=1$ 'in bir küçük konsüsü dizindeki tüm t 'ler için $\omega_0(t) = 1$ dir.
- (d) $t=1$ de ω_0 fonksiyonu yeterince hızlı damlar (2) öyle ki, $t \rightarrow \ln \omega_0(t)$ integre edilemez.

Örnek 10.53

$C(\mathbb{T})$ üzerindeki quasinilpotent pozitif operatörlerin bir S yarı grubu vardır, öyle ki indirgenemez, arşipsal bir idealdir.

1.5 Arkadaşça Kompakt Operatörler

İki eş uzayları arasındaki bir $T: E \rightarrow F$ pozitif operatöre eğer tüm $x \in E$ için $|Sx| \leq (T(x))$ olarak şekilde bir $S: E \rightarrow F$ operatörünü domine eder denir.

E bir reel Banach örgüsü için $E_c = E \oplus iE$ formundaki herhangi bir Banach uzayına bir kompleks Banach örgü denir. Banach örgüleri arasındaki bir $T: E \rightarrow F$ pozitif operatöre eğer tüm $z \in E_c$ için $|Sz| \leq T(|z|)$ ise $S: E_c \rightarrow F_c$ operatörü domine eder.

Tanım 10.54

E bir Banach örgüsü ve $B: E \rightarrow E$ bir pozitif operatör olsun. Eğer B 'nin değerciğinde kompakt bir pozitif operatör ile domine edilmiş olan sıfırdan farklı bir operatörü domine eden pozitif bir operatör varsa B 'ye arkadaşça kompakt op. denir.

B arkadaşça komp. operatördür $\Leftrightarrow$

$\exists R, K, C: E \rightarrow E$; R, K pozitif K kompakt, $RB = BR$ ve her bir $x \in E$ için $|Cx| \leq R|x|$ ve $|Cx| \leq K|x|$

Örnekler: Arkadaşça Kompakt Operatörler

- Kompakt pozitif operatörler
- Sıfırdan farklı, bir pozitif kompakt operatörünün değerciindeki pozitif operatörler.
- Sıfırdan farklı kompakt poz. operatörleri domine eden poz. operatörler.
- Pozitif integral operatörler. (lemma 1.58 bak)

Teorem 1.55 (Abramovich - Aluprantis - Burkinshaw)

Eğer bir Banach ögüsü içindeki sıfır olmayan arkadaşca kompakt $B: E \rightarrow E$ operatörünü bir $x_0 > 0$ da quasinilpotent ise o takdirde B 'nin azıkar olmayan kapalı invaryant bir ideali vardır.

Ayrıca, $[B]$ içindeki her bir T_n dizisi için B altında ve her bir T_n altında invaryant olan azıkar olmayan kapalı bir ideal vardır.

Sonuç 1.56

$S: E \rightarrow E$ bir pozitif operatör olsun. (E bir Banach ögüsü) $\langle S \rangle$, bir pozitif vektörde quasinilpotent olan sıfır olmayan arkadaşca kompakt bir operatörü içersin. O takdirde S 'nin azıkar olmayan kapalı bir invaryant alt ideali vardır.

İspat:

$B \in \langle S \rangle$, pozitif bir vektör için quasinilpotent olan sıfırdan farklı arkadaşca kompakt bir operatör olsun.

$B \in \langle S \rangle$ olması $S \in [B]$ koşuluna denk olup Teo 1.55'ten istenen elde edilir.

Teo 1.57

E bir Dedekind tam Banach örgüsü olsun. Sifir olmayan arkadaşca kompakt $B: E \rightarrow E$ operatörünü bir $\epsilon_0 > 0$ da quasinilpotent ise o zaman $[B]$ altında invariant olan asikar olmayan kapalı bir idealı vardır.

Tanım: Sonlu Rank Op

İki lineer uzay arasındaki bir $T: V \rightarrow W$ operatörüne eğer bu operatörün görüntü uzayı sonlu ise bir sonlu-rank operatörü denir.

$T: V \rightarrow W$ sonlu rank operatörü ve $w_1, \dots, w_k$ $T(V)$ 'nin bir tabanı ise o zaman $T(v) = \sum_{i=1}^k f_i(v) w_i$ ($T = \sum_{i=1}^k f_i \otimes w_i$) olacak şekilde V üzerinde $f_1, \dots, f_k$ lineer fonksiyonelleri vardır.

X ve Y Banach uz. ve $T: X \rightarrow Y$ sınırlı operatör olsun.

T ancak ve ancak

$T = \sum_{i=1}^n x_i^* \otimes y_i$ olacak şekilde X üzerinde sürekli lineer

$x_1^*, \dots, x_n^*$ fonksiyonellerine $y_1, \dots, y_n \in Y$ vektörleri varsa sonlu rank operatörüdür.

E bir Dedekind tam Banach örgüsü olsun.

Teorem 0.16 dan tüm regüler operatörlerin $L_r(E)$ uzayı Dedekind tam vektör örgüsüdür.

E^* 'in keyfî bir $\mathcal{I}$ vektör alt uzayı için $\mathcal{I}_r(E)$ deki $\mathcal{I} \otimes E$ ile üretilmiş $(\mathcal{I} \otimes E)^{**}$ bandundaki operatörlere $\mathcal{I}$ -integral operatörler denir.

Bir Dedekind tam Banach örgü üzerindeki $T: E \rightarrow E$ pozitif operatörü bir E^* -integral operatördür ancak ve ancak E üzerinde pozitif operatörlerin $\{T_x\}$ ağı vardır: Her bir T_x sonlu rank op. ile domine edilmiştir ve $x \geq 0$ için $0 \leq T_x x \uparrow T_x$

lemma 1.58

Her pozitif E^* -integral operatörü arkadaşına kompaktır.

lemma 1.59

Eğer $S: E \rightarrow E$ kesin pozitif bir E^* -integral operatör ise her bir $x_0 > 0$ için $0 \leq k \leq S^3$ ve $k x_0 > 0$ olacak şekilde bir kompakt pozitif $K: E \rightarrow E$ operatörü vardır.
(E Dedekind tam Banach örgü)

İspat:

$x_0 > 0$ olsun. $S: E \rightarrow E$ pozitif E^* -int operatör olduğundan $0 \leq Sx \uparrow S$ ve her bir Sx bir poz. sonlu-rank operatörü tarafından domine edilerek şekilde poz. op.lerin bir $\{S_n\}$ ağı vardır.

Buradan (Sonuç 2.35) her bir S_n^3 bir kompakt operatördür. S kesin poz. olduğundan $Sx_0 > 0$ dir.

Bundan ve $Sx \leq x_0 \leq Sx$ olmasından bir α indexi vardır ki tüm $\alpha \leq x_1$ için $Sx \leq x_0 > 0$ dir.

Benzer şekilde, $S(Sx \leq x_0) > 0$ ve $Sx(Sx, x_0) \leq S(Sx, x_0)$ dan tüm $\alpha \geq \alpha_2 \geq \alpha_1$ için $Sx(Sx, x_0) > 0$ olur.

Son olarak, $S(Sx_2 \leq Sx, x_0) > 0$ ve $Sx(Sx_2 \leq Sx, x_0) \leq S(Sx_2 \leq Sx, x_0)$ olmasından tüm $\alpha \geq \alpha_3 \geq \alpha_2 \geq \alpha_1$ için $S(Sx_2 \leq Sx, x_0) > 0$

$K = S^3 \alpha_3$ olsun. Bu durumda $K: E \rightarrow E$, $0 \leq K \leq S^3$ ve $Kx_0 > 0$ olacak şekilde kompakt poz. bir operatördür.

Teorem 1.60

$S: E \rightarrow E$, E bir Dedekind tam Banach örgüsü, sıfır olmayan pozitif bir E^* -integral operatörü olsun $B: E \rightarrow E$ S ile değişmeli olan sıfır olmayan bir poz. op. olsun. Eğer S ya da B operatörlerinin ortak azıkar olmayan kapalı bir invaryant ideali vardır.

Ayrıca bu ideal $\langle S \rangle$ ya da $\langle B \rangle$ altında invaryant olarak seçilebilir.

Sonuç 1.61

Sıfırdan farklı pozitif bir vektörde quasinilpotent olan her pozitif E^* -inv. operatörün azıkar olmayan kapalı bir $\mathcal{L}$ -hiperin. ideali vardır.

Sonuç 1.62

$E, (-, \Sigma, \wedge)$ (σ -sonlu ölçüm) uzayı ile birleştirilmiş bir Banach fonksiyon uzayı olsun ve $S: E \rightarrow E$ $S(\cdot, \cdot)$ ağırlığı ile pozitif bir integral op. olsun. Eğer S pozitif bir vektörde quasinilpotent ise 0 taktirde,

$$T_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(s, t) S(s, t) x(s) d\mu(s), \quad x \in E \text{ şeklinde tanımlı}$$

$T: E \rightarrow E$ int. op. ler ailesi ortak bir asikar olmayan kapalı bir inv. ideale sahiptir.

Tanım 1.63

$\mathbb{R}$ bir top uzay olsun.

$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonuna eğer her boştan farku G açık kümesi ϕ , G üzerinde sabit olacak şekilde varsa bir düzlüğe sahiptir denir.
(yataylıga)

Benzer şekilde, ölçülebilir bir $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer $\wedge(A) > 0$ olmak üzere bir $A \in \Sigma$ üzerinde sabitse bir düzlüğe sahiptir.

Ölçüm uzayı $(-, \Sigma, \wedge)$

Lemma 1.64

Bir Banach E örgü taındaki bir norm sunuru $\{A_n\}$ dizi ve kompakt bir operatör ile domine edilen sınırlı bir $A: E \rightarrow E$ op. için as. şz. sağlanır:

- (a) $\{A_n\}$ dizi sıra sunulu bir alt diziye sahiptir
- (b) E sıra sürekli norma sahiptir ve $\{A_n\}$ dizi ayrıkça 0 sarmalı $\|A_n\| \rightarrow 0$

İspat:

(a) $K: E \rightarrow E$, A yı domine eden kompakt poz. op. olsun. Yani her bir $x \in E$ için $\|Ax\| \leq K \|x\|$ olsun.

K kompakt ve $\{A_n\}$ norm-sunulu old. dan $\{K(\|e_n\|)\}$ yakınsak bir alt dizedir.

$\{K(\|e_n\|)\}$ dizinin yakınsak old. nu kabul edelim.

Yani $K\|e_n\| \rightarrow y$ olacak şekilde $y \in E$ vardır.

Her bir n için $\|K\|e_n\| - y\| \leq 2^{-n}$ kabul edilebilir.

Bu nedenle $e = \sum_{n=1}^{\infty} \|K\|e_n\| - y\|$ serisi norm-yakınsaktır ve

pozitif bir vektör tanımlar. $\|K\|e_n\| - y\| \leq e \Rightarrow \|K\|e_n\| \leq e + \|y\|$ olup
(her bir n için)

$$\|A_n\| \leq \|K\|e_n\| \leq e + \|y\|$$

Teo 1.65

Ω kompakt Hausdorff uzayı olsun. Bir $C(\Omega)$ üzerinde

M_ϕ pozitif çarpım operatörü,

ancak ve ancak ϕ çarpımı bir düzliğe sahiptir arkadaşına kompakttır.