

*) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ serisinin toplamı?

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$ olduğunu biliyoruz.

↓ Türev

$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1)$

↓ x ile çarp

$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1)$

$x = \frac{1}{2}$ ise $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = \underline{\underline{2}}$

*) $I = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ için bir kuvvet serisi temsili bulunuz.

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$

$I = \int_0^x \frac{1 - (1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots)}{t^2} dt = \int_0^x (\frac{1}{2!} - \frac{t^2}{4!} + \frac{t^4}{6!} - \dots) dt$

$= \frac{t}{2!} - \frac{t^3}{3 \cdot 4!} + \frac{t^5}{5 \cdot 6!} - \dots \Big|_0^x = \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \frac{x^5}{5 \cdot 6!} - \dots$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot (2n+2)!}$

⑧ $\int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} dt$ için kuvvet seri temsili bulunuz.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \Rightarrow e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-t^2} = t^2 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \dots$$

$$\int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} dt = \int_0^x \frac{t^2 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} - \dots}{t^2} dt$$

$$= \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{3!} - \frac{t^6}{4!} + \dots \right) dt$$

$$= t - \frac{t^3}{3 \cdot 2!} + \frac{t^5}{5 \cdot 3!} - \frac{t^7}{7 \cdot 4!} + \dots \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3 \cdot 2!} + \frac{x^5}{5 \cdot 3!} - \frac{x^7}{7 \cdot 4!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot (n+1)!}$$

⑨ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^2}$ limitini seri açılımları yardımıyla hesaplayın.

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2 - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots \right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\left(\frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots \right)}{x^2} = 0$$

*) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + \operatorname{Arctan} x^2} \right)$ limitini seri açılımları ile hesaplayın.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + \operatorname{Arctan} x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Arctan} x^2}{x(x + \operatorname{Arctan} x^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^{10} - \dots}{x^2 + x \left(x^2 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^{10} - \dots \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x^2} \left(1 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^8 - \dots \right)}{\cancel{x^2} \left(1 + x - \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{5}x^9 - \dots \right)} = \frac{1}{1} = 1$$

*) $\ln x$ fonksiyonunun Taylor polinomunun ilk 4 terimini kullanarak $\ln(1,2)$ için yaklaşık bir değer bulun.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln x \\ f'(x) = \frac{1}{x} \\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} \\ f'''(x) = \frac{2}{x^3} \end{array} \right\} a=1$$

$$f(1) = 0$$

$$f'(1) = 1$$

$$f''(1) = -1$$

$$f'''(1) = 2$$

$$f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 = P_3(x)$$

$$f(1,2) = \ln(1,2) \approx 0 + 1 \cdot (1,2-1) + \frac{(-1)}{2} \cdot (1,2-1)^2 + \frac{2}{6} \cdot (1,2-1)^3 = 0,2 - \frac{1}{2} \cdot (0,2)^2 + \frac{(0,2)^3}{3} = 0,182$$

*) $\frac{x}{(1-x)^2}$ fonksiyonu için bir kuvvet serisi temsili elde ediniz ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1) \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

↓ Türev

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1)$$

↓ x ile çarp

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1)}$$

*) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ için bir kuvvet serisi temsili ve geçerli olduğu aralığı bulunuz.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1) \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

↓ $x \rightarrow -x-1$

$$\frac{1}{1-(-x-1)} = \frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x-1)^n \quad (|-x-1| < 1 \Rightarrow |x+1| < 1)$$

$$\frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (1+x)^n \quad (|x+1| < 1)$$

↓ Türev

$$-\frac{1}{(x+2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot (1+x)^{n-1} \quad (|x+1| < 1)$$

↓

$$\frac{1}{(x+2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot (1+x)^{n-1} \quad (-2 < x < 0)$$

② $|x| < 1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$ serisinin toplamını bulup
 bu toplam yardımı ile $\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ serisinin toplamını
 bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1 \quad \text{olduğunu biliyoruz.}$$

$$\downarrow x = x^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \quad -1 < x < 1$$

$\downarrow x$ ile carp

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = \frac{x}{1-x^2} \quad (-1 < x < 1) \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

$x = \frac{1}{2}$ için $\textcircled{1}'i$ kullanırsak:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \cdot x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Kök Testi ile:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot |x| = \frac{|x|}{e} < 1$$

$$\Downarrow$$

$$|x| < e$$

$$\Downarrow$$

Yakınsaklık
Yarıçapı = $R = e$

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n} x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Oran Testi ile:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}}{\frac{n!}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n} \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n+3} \cdot |x| = \frac{|x|}{3} < 1$$

$$\Downarrow$$

$$R = 3$$

1-b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$ serisinin mutlak yakınsak, şartlı yakınsak ıraksak olup olmadığını belirleyiniz. (13 Puan)

$a_n = (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$ $\sum |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ integral testi uygulanabilir.

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ pozitif, sürekli, azalan $x \geq 2$ için.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^b \frac{du}{u} = \infty \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \text{ ıraksaktır}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$ serisinde mutlak yakınsak değildir (5)

Alternatif Seri Testi (AST) $u_n = \frac{1}{n \ln n}$, $u_n > 0$ $n \geq 2$ (1)

$n \ln n < (n+1) \ln(n+1) \Rightarrow u_{n+1} < u_n$ (2)

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (2) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$ şartlı (1) yakınsak

Tüm AST koşulları sağlandığından Buradan $\Rightarrow$ seri yakınsaktır Ancak mutlak yakınsak değil şartlı yakınsaktır dendir (2)

*) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+2}$ serisinin yakınsadığı, fonksiyonu ve bu yakınsamanın gerçekleştiği aralığı bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1) \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

↓ x^2 ile carp

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$$

↓ Türev al

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1} = \frac{2x \cdot (1-x) + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1)$$

↓ x ile carp

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+2} = \frac{2x^2-x^3}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1)$$

*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve bu aralıkta temsil ettiği fonksiyonu bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{3} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{x+2}{3} \right) \text{ Geometrik Seri}$$

$r = \frac{x+2}{3} \quad a = \frac{x+2}{3}$

Bu seri $|r| = \left| \frac{x+2}{3} \right| < 1$ için yarı $|x+2| < 3 \Rightarrow -5 < x < 1$ için yakınsaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{3} \right)^n = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{x+2}{3}}{1-\frac{x+2}{3}} = \frac{x+2}{1-x} \quad (-5 < x < 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n} = \frac{x+2}{1-x} \quad (-5 < x < 1)$$

* $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}$ serisinin toplamını ve yakınsaklık analizi

bulup bu seri yardımıyla $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n}$ serisinin toplamını

bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1) \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$\downarrow x \rightarrow x^2$ yaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \quad (-1 < x < 1)$$

$\downarrow x$ ile çarp

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = \frac{x}{1-x^2} \quad (-1 < x < 1)$$

$\downarrow$ Türev al

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \cdot x^{2n} = \frac{1-x^2+2x \cdot x}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \quad (-1 < x < 1) \quad *$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2} = \frac{20}{9}$$

(*) da
 $x = \frac{1}{2}$ yazarsak

* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n \cdot x^n}{\ln n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının 3 olması için b nin alacağı değerleri bulun. (2016-Final sorusu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b^{n+1} \cdot x^{n+1}}{\ln(n+1)} \cdot \frac{\ln n}{b^n \cdot x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \cdot |b| \cdot |x| = |b| \cdot |x| < 1$$

$$\Rightarrow |x| < \frac{1}{|b|} \text{ olmalı.}$$

$$0 \text{ halde } R = \frac{1}{|b|} \text{ dir.}$$

$$R = 3 \Rightarrow \frac{1}{|b|} = 3 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

*) $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun Maclaurin serisinden faydalanarak $L(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$ fonksiyonunun Maclaurin Serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$f(x) = \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < \infty) \Rightarrow \cos t^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{4n}}{(2n)!} \quad (-\infty < t < \infty)$$

$$L(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{4n}}{(2n)!} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{4n+1}}{(4n+1) \cdot (2n)!} \Big|_0^x \quad (-\infty < t < \infty)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(4n+1) \cdot (2n)!} \quad (-\infty < x < \infty)$$

*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!}$ serisinin yakınsaklık türünü belirleyin.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(100)^n}{n!}$$

① $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(100)^n}{n!}$ mutlak yakınsak mı? $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(100)^n}{n!}$ yakınsak mı?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(100)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(100)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{Oran Testine göre } \sum \frac{(100)^n}{n!} \text{ yakınsak.}$$

0 halde $\sum \frac{(-100)^n}{n!}$ mutlak yakınsaktır.

*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ limitini kuvvet serilerini kullanarak hesaplayınız.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots) - (1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots) - 2x}{x - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{x^3}{3!} + 2 \frac{x^5}{5!} + \dots}{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(\frac{2}{3!} + \frac{2x^2}{5!} + \dots \right)}{x^3 \left(\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} + \dots \right)} = \frac{2}{1}$$

*) $y = x e^{-x}$ fonksiyonunun seriye açılımından yararlanarak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n+1}}{n!}$ alternan serisinin toplamını bulunuz.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \Rightarrow e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!} + \dots$$

$$y = x \cdot e^{-x} = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n!}$$

$x=2$ alırsak

$$2 \cdot e^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n+1}}{n!} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n+1}}{n!} = \frac{2}{e^2}}$$

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+n3^n}$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow$ Harmonik Seri İraksak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n}{1+n3^n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 3^n}{1+n3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n3^n}} = 1 \neq 0$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli:
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+n3^n}$ iraksak

* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} - 1}{\sin^2 x}$ limitini fonksiyonların kuvvet seri temsillerinden faydalanarak bulunuz.

$$1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots$$

$$e^{1-\cos x} = 1 + (1-\cos x) + \frac{(1-\cos x)^2}{2!} + \dots = 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \dots\right)^2 + \dots$$

$$e^{1-\cos x} - 1 = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} - \dots\right)^2 + \dots$$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)^2 = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right)^2$$

$$e^{1-\cos x} - 1 = x^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2!} + \dots\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \dots\right)^2 + \dots \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2!} + \dots\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \dots\right)^2 + \dots \right]}{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right)^2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

* $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n}$ olarak verilen $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ serisi-
nin karakterini belirleyiniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ mutlak yakınsak mı? } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ yakınsak mı?}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 < 1 \text{ yakınsaktır.}$$

L'Hop.

0 halde $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ serisi mutlak yakınsaktır.

1- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $|x| < 1$ ifadesinden yararlanarak $f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$ fonksiyonunu temsil eden kuvvet serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k; | -x^2 | < 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^{2k}; |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}; |x| < 1$$

$x=0$ için $c=0$ bulunur.

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}; |x| < 1$$

$$\arctan \frac{x}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1} \cdot (2k+1)}; \left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

$$x \cdot \arctan \frac{x}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2(k+1)}}{2^{2k+1} \cdot (2k+1)}; |x| < 2$$

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} [6x^5 \sin(\frac{1}{x}) - 6x^4 + x^2]$ limitini seri açılımlarından faydalanarak çözünüz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3 3!} + \frac{1}{x^5 5!} - \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [6x^5 \sin \frac{1}{x} - 6x^4 + x^2] = \lim_{x \rightarrow \infty} [6x^5 (\frac{1}{x} - \frac{1}{3! x^3} + \frac{1}{5! x^5} - \frac{1}{7! x^7} \dots) - 6x^4 + x^2]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [6x^4 - x^2 + \frac{1}{20} - \frac{6}{7!} \cdot \frac{1}{x^2} \dots] - 6x^4 + x^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} [\frac{1}{20} - \frac{6}{7!} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots] = \boxed{\frac{1}{20}}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^4 + \ln n}$ serisinin karakterini belirleyiniz. (13p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^4 + \ln n} \text{ mutlak yakınsak mı? } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + \ln n} \text{ yakınsak mı?}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(p=2 > 1 \right) \text{ serelim.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^4 + \ln n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n^4 + \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\ln n}{n^4}} = 1 \neq 0, \infty$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{4n^3} = 0 \right)$$

Limit testine göre iki seri aynı karakterlidir.

Yani $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + \ln n}$ yakınsaktır. O halde $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^4 + \ln n}$ mutlak yakınsaktır.

* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^{n+1}}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve temsil ettiği fonksiyonu bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n-1}}{3 \cdot 3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{x+2}{3} \right)^{n-1} \quad a = \frac{1}{3}$$

$$r = \frac{x+2}{3}$$

Geometrik seri

$$|r| = \left| \frac{x+2}{3} \right| < 1 \quad \text{ise seri yakınsaktır}$$

$\Downarrow$

$$-3 < x+2 < 3 \Rightarrow \boxed{-5 < x < 1} \quad \text{Yak. aralığı}$$

Seri bu aralıkta $\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{x+2}{3}} = \frac{1}{\frac{1-x}{3}}$ 'e yakınsar.

* Genel terimi $a_n = \frac{n^2}{2n+1} \cdot \sin\left(\frac{3}{n}\right)$ olan dizinin limiti?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n+1} \cdot \sin \frac{3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{3n}{2n+1}}_{\frac{3}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sin \frac{3}{n}}{\frac{3}{n}}}_1 = \frac{3}{2}$$

* Genel terimi $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3n} \cdot a_n$ ile verilen

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakteri?

Oran Testi ile: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{3n} = \frac{2}{3} < 1$

Oran Testine göre Seri yakınsak

*) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \cdot \cos n\pi$ serisinin yakınsaklığını araştırınız.

Yakınsak ise toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \cdot \cos n\pi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{e}\right)^n \quad \left. \begin{array}{l} a=1 \\ r=-\frac{1}{e} \end{array} \right\} \text{Geometrik Seri}$$

$|r| = \frac{1}{e} < 1$ olduğundan seri yakınsaktır.

$$\text{Toplamı} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{e}\right)} = \frac{e}{e+1}$$

*) $\sum_{k=0}^{\infty} (k^2+3k+2)x^{k+3}$ serisinin yakınsadığı, fonksiyonu ve bu yakınsamanın gerçekleştiği aralığı bulunuz.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k^2+3k+2)x^{k+3} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)x^{k+3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1) \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

↓ x^k ile carp

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2} = \frac{x^2}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$$

↓ Türev al

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)x^{k+1} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1)$$

↓ Türev

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)x^k = \frac{2}{(1-x)} \quad (-1 < x < 1)$$

↓ x^3 ile carp

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)x^{k+3} = \frac{2x^3}{(1-x)} \quad (-1 < x < 1)$$