DAUGAVET DENKLEMİ VE DÜZGÜN KONVEKSLİK

Tanım 11.1 Bir Banach uzayı üzerindeki $T: X \to X$ sürekli operatörü,

$$\|I+T\| = 1 + \|T\|$$

eşitliğini gerçekleştiriyorsa, o operatöre Daugavet denklemini sağlar denir.

Lemma 11.2. Bir sınırlı operatörün Daugavet eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul onun norm eşleneğinin (adjoint) Daugavet denklemini sağlaması gerekir.

Lemma 11.3. Eğer bir Banach uzayı üzerindeki bir sınırlı $T: X \to X$ operatörünün normu T'nin spektrumuna aitse, yani $\|T\| \in \sigma(T)$ oluyorsa o zaman T Daugavet eşitliğini sağlar.

Hatırlatma: Bir sınırlı $T: X \to X$ operatörü için, $(\lambda - T)$ operatörünün X üzerinde terslenemez olmasını sağlayan tüm λ kompleks sayılarının kümesine T'nin spektrumu denir ve $\sigma(T)$ şeklinde gösterilir. Daha açık şekilde,

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - T)^{-1} \text{ mevcut değil}\}.$$

Lemma 11.3'ün Kanıtı: $\|T\| \in \sigma(T)$ olsun. T'nin spektrumu merkezi sıfır olan ve $\|T\|$ yarıçaplı bir diskte uzandığından, $\|T\|$'nin, spektrumun sınır noktası olduğu sonucu çıkar. Özelde, $\|T\| \in \sigma(T)$, T'nin yaklaşık nokta spektrumudur. Her n için $\|x_n\| = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - \|T\|x_n\| = 0$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ vektör dizisi seçelim.

$$\begin{aligned}
\|I+T\| &\geq \|(I+T)x_n\| \\
&\geq \|x_n + \|T\|x_n\| - \|\,\|T\|x_n - Tx_n\| \\
&= 1 + \|T\| - \|\,\|T\|x_n - Tx_n\|
\end{aligned}$$

olduğundan limit alırsak $\|I+T\| \geq 1 + \|T\|$ sonucu çıkar. Buradan da Daugavet eşitliğini sağladığı görülür.

Lemma 11.4. Eğer bir uzayda alınan u ve v vektörleri
$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$$
eşitliğini sağlarsa o zaman her $\alpha, \beta \geq 0$ için
$$\|\alpha u + \beta v\| = \alpha\|u\| + \beta\|v\|$$
eşitliği gerçekleşir.

Kanıt. u ve v vektörleri $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ eşitliğini gerçeklesin ve $\alpha, \beta \geq 0$ olsun. Durumun simetrisi gereği $\alpha \geq \beta \geq 0$ diye farz edebiliriz. O zaman
$$\begin{aligned}
\alpha\|u\| + \beta\|v\| &\geq \|\alpha u + \beta v\| = \|\alpha(u+v) - (\alpha-\beta)v\| \\
&\geq \alpha\|u+v\| - (\alpha-\beta)\|v\| \\
&= \alpha(\|u\| + \|v\|) - (\alpha-\beta)\|v\| \\
&= \alpha\|u\| + \beta\|v\|
\end{aligned}$$
sonucuna ulaşırız.

Sonuç 11.5. Eğer bir Banach uzayı üzerindeki sınırlı T operatörü Daugavet eşitliğini sağlıyorsa o zaman her $\alpha \geq 0$ için αT operatörü de aynı şekilde Daugavet eşitliğini sağlar.

Gelecek lemma iki denk norm şartını tanımlıyor ve onlardan birincisi düzgün konveksliğin tanımı için kullanılıyor. Genelde olduğu gibi bir X Banach uzayının kapalı birim topu/yuvarı (ball) U_X şeklinde gösterilir.

Lemma 11.6. Bir X Banach uzayı için aşağıdakiler denktir.

(1) Her $0 < \epsilon < 2$ için $x, y \in U_X$ $\|x-y\| \geq \epsilon$ olacak şekilde bir $0 < \delta < 1$ varsa, o zaman $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1-\delta$ olur.

(2) U_X'ten alınan $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri $\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\| = 2$ şartını sağlarsa, o zaman $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\| = 0$ olur.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) U_X'ten alınan $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri $\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\| = 2$ şartını sağlasın. $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ şeklinde bir ayarlama yaparsak ve $0<\delta<1$ olacak şekilde bir δ seçersek o zaman (1) sağlanır. Şimdi her $n \geq n_0$ için $\|x_n + y_n\| > 1-\delta$ şartını sağlayan bir n_0 seçelim. (1)'i kullanarak her $n \geq n_0$ için $\|x_n - y_n\| < \epsilon$ sonucuna ulaşırız. Yani; $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) Eğer (1) doğru olmasaydı o zaman $x_n, y_n \in U_X$ $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon$ ve $\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| > 1-\frac{1}{n}$ şartlarını sağlayan bir $\epsilon > 0$ bulunurdu. Bu da $\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\| = 2$ gerektirirdi. (2)'den biz $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$ sahibiz ve bu her n için $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon$ olmasıyla çelişir.

Tanım 11.7. Bir Banach uzayı Lemma 11.6'da ki iki ifadelerden her hangi birini sağlıyorsa düzgün konvekstir denir.

Tanım 11.8. Bir Banach uzayı eğer her $\epsilon > 0$ için $\|x\| \geq 1$, $\|y\| \geq 1$, ve $\|x-y\| < \delta$ olduğunda $\|x+y\| \geq \|x\| + \|y\| - \epsilon\|x-y\|$ eşitsizliğini gerektirecek bir $\delta > 0$ sahipse düzgün pürüzsüz diye adlandırılır.

Lemma 11.9. Bir Banach uzayının düzgün konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul norm dualinin düzgün pürüzsüz olmasıdır.

Benzer şekilde, bir Banach uzayı düzgün pürüzsüz (~~[illegible]~~ uniformly smooth) olabilmesi için gerek ve yeter koşul norm dualinin düzgün konveks olmasıdır.

Düzgün sürekli konveks Banach uzayları için Lemma 11.3'ün tersi doğrudur.

Teorem 11.10. Eğer X düzgün sürekliyse ve $T \in L(X)$ Daugavet eşitliğini sağlıyorsa o zaman $\|T\| \in \sigma(T)$.

Kanıt. X düzgün sürekli olsun ve $T \neq 0 \in L(X)$ Daugavet denklemini sağlasın. Sonuç 11.5'i kullanarak (~~[illegible]~~), $S = \frac{T}{\|T\|}$ operatörünün de Daugavet Denklemini sağladığı görülür. Yani;

$$\|I+S\| = \sup \|x + Sx\| = 1 + \|S\| = 2$$

olur. Böylece $\lim_{n\to\infty} \|x_n + Sx_n\| = 2$ şartını sağlayan bir birim vektör dizisi $\{x_n\}$ vardır. X düzgün sürekli olduğundan $\lim_{n\to\infty} \|Sx_n - x_n\| = 0$ sonucuna ulaşırız. Sonuç olarak $\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{T}{\|T\|} x_n - x_n \right\| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - \|T\| x_n\| = 0$ ulaşırız. Bu da $\|T\|$'nin, T'nin yaklaşık nokta spektrumunda olduğunu gösterir.

Bir operatörün Daugavet denklemini sağlaması için gerek ve yeter koşulun o operatörün eşleniğinin Daugavet denklemini sağlaması olduğundan ve bir operatörün spektrumu ile onun adjointinin spektrumu aynı olduğundan (Teorem 6.14) sıradaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 11.11. Düzgün ~~sürekli~~ konveks veya bir düzgün pürüzsüz Banach uzayı üzerindeki bir sürekli T operatörünün Daugavet denklemini sağlaması için gerek ve yeter koşul onun normu $\|T\|$'nin, $\sigma(T)$ spektrumunda bulunmasıdır.

Sonuç 11.12. Bir düzgün konveks veya bir düzgün pürüzsüz Banach uzayı üzerindeki bir katı tekil (strictly singular) T operatörünün Daugavet denklemini sağlaması için gerek ve yeter koşul onun normu $\|T\|$'nin, T'nin bir özdeğeri (eigenvalue) olmasıdır.

Sonuç 11.13. $1<p<\infty$ için bir katı tekil operatör $T: L_p(\mu) \to L_q(\nu)$ Daugavet ~~eş~~ denkleminin sağlaması için gerek ve yeter koşul onun normu $\|T\|$'nin, T'nin bir özdeğeri olmasıdır.

Teorem 11.14. Bir düzgün konveks veya bir düzgün pürüzsüz Banach uzayı üzerindeki bir sürekli $T: X \to X$ operatörü Daugavet Denklemini sağlasın ve her n için $a_n \geq 0$ olacak şekilde $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bir kuvvet serisi alalım. Eğer $f(\|T\|) < \infty$, o zaman sürekli operatör $f(T)$ Daugavet denklemini sağlar ve $\|f(T)\| = f(\|T\|)$. Yani;

$$\|I + f(T)\| = 1 + \|f(T)\| = 1 + f(\|T\|)$$

elde edilir. Özelde aşağıdaki sonuçları elde ederiz;

(1) Her bir $n=0,1,2,\dots$ için T^n operatörü Daugavet denklemini sağlar ve $\|T^n\|=\|T\|^n$, yani;

$$\|I+T^n\| = 1+\|T^n\| = 1+\|T\|^n.$$

(2) Negatif katsayısız her hangi $p(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\dots+a_n\lambda^n$ polinomu için, $p(T)$ operatörü Daugavet denklemini sağlar ve $\|p(T)\|=p(\|T\|)$.

Kanıt. Bir Banach X uzayı üzerinde bir sürekli $T:X\to X$ operatörü alalım ve $f(\lambda)$ yukarıdaki özellikleri sağlasın. Sonuç 11.11'i kullanarak $\lim_{n\to\infty}\|Tx_n-\|T\|x_n\|=0$'ı sağlayan bir birim vektörler dizisi $\{x_n\}$ olduğunu kanıtlayabiliriz. Aşağıdaki denklemler kolayca kanıtlanabilir.

$$T^{k+1}x_n-\|T\|^{k+1}x_n = T(T^kx_n-\|T\|^kx_n)+\|T\|^k(Tx_n-\|T\|x_n).$$

Yukarıdaki denklemi ve tümevarım ilkesini kullanarak her $k=0,1,\dots,$ için

$$\lim_{n\to\infty}\|T^kx_n-\|T\|^kx_n\|=0$$

sonucuna ulaşırız. Şimdi $\lim_{n\to\infty}\|f(T)x_n-f(\|T\|)x_n\|=0$ olduğunu kanıtlayacağız.

$\epsilon>0$ olsun. $\sum_{i=m+1}^{\infty}a_i\|T\|^i<\epsilon$ olacak şekilde bir m tam sayısı bulalım ve her $n\geq n_0$ için $\sum_{i=0}^{m}a_i\|T^ix_n-\|T\|^ix_n\|<\epsilon$ olacak şekilde bir n_0 bulalım. Sonuçta biz her $n\geq n_0$ için

$$\begin{aligned}
\|f(T)x_n-f(\|T\|)x_n\| &= \Big\|\sum_{i=0}^{\infty}a_i(T^ix_n-\|T\|^ix_n)\Big\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{m}a_i\|T^ix_n-\|T\|^ix_n\| + \sum_{i=m+1}^{\infty}a_i\|T^ix_n-\|T\|^ix_n\| \\
&\leq \epsilon+2\sum_{i=m+1}^{\infty}a_i\|T\|^i < 3\epsilon
\end{aligned}$$

olur. Buradan $\lim\|f(T)x_n-f(\|T\|)x_n\|=0$ elde ederiz. Sonuçta $f(\|T\|)$ reel sayısı, $f(T)$'nin yaklaşık nokta spektrumunda bulunur. $\|f(T)\|\leq f(\|T\|)$ ve $f(T)$'nin spektrumu sıfır merkezli ve $\|f(T)\|$ yarı çaplı kapalı diskte yer aldığından, $\|f(T)\|=f(\|T\|)$ elde ederiz. Şimdi Sonuç 11.11'i kullanarak $f(T)$ operatörünün Daugavet denklemini sağladığını görürüz.

Şimdi yerel düzgün konveks Banach uzayları üzerine olan operatörleri tartışacağız. Bunu yapabilmek için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız var. Bu lemma'nın ispatı lemma 11.6'nınkiyle benzerdir.

Lemma 11.15 Bir Banach uzayındaki bir birim vektör için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) Her bir $0 < \epsilon \leq 2$ için, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x-y\| \geq \epsilon$ olupta $\|\frac{x+y}{2}\| < 1-\delta$ gerektirecek şekilde $0 < \delta < 1$ şartını sağlayan bir δ vardır.

(2) Eğer $\{x_n\} \subseteq U_X$ ve $\lim_{n\to\infty} \|\frac{x+x_n}{2}\| = 1$ ise o zaman $\lim_{n\to\infty} \|x-x_n\| = 0$.

Tanım 11.16. Bir Banach uzayına yukarıdaki ifadelerden birini sağlıyorsa ona bir birim x vektöründe yerel düzgün konveks denir.

Eğer her birim vektöründe yerel düzgün konveksse o Banach uzayına yerel düzgün konveks denir.

Yerel düzgün konveks Banach uzaylarının kesinlikle düzgün konveks olması gerekmediği biliniyor.

Teorem 11.18. Bir yerel düzgün konveks Banach uzayı üzerindeki bir $T: X \to X$ kompakt operatörü Daugavet denklemini sağlaması için gerekli ve yeter koşul onun normu $\|T\|$'nın, T'nın bir özdeğeri olmasıdır.

Kanıt. Yeter şartı her hangi bir Banach uzayı için doğrudur ve operatörün kompaktlığından bağımsızdır. Aslında, eğer $\|T\|$, T'nın bir özdeğeri ise o zaman Teorem 11.10'u kullanarak bir $\|I+T\| = 1+\|T\|$ elde ederiz.

Tersi için, T sıfır olmayan bir operatör olsun ve Daugavet denklemini sağlasın. Sonuç 11.5'ten biz $S = \frac{T}{\|T\|}$ kompakt operatörünün de Daugavet denklemini sağladığını biliyoruz ve $\sup_{\|x\|=1} \|x+Sx\| = 1+\|S\| = 2$. $\lim_{n\to\infty} \|x_n+Sx_n\| = 2$ olacak şekilde bir birim vektörler dizisi $\{x_n\}$ oluşturalım.

S'nin kompaktlığını kullanarak her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} \|Sx_n - x\| = 0$ (**) sonucuna ulaşırız.

$$\|x_n + Sx_n\| \le \|x_n\| + \|Sx_n\| = 1 + \|Sx_n\| \le 2$$

Yukarıdakini ve (**)'i kullanarak $\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|Sx_n\| = 1$ sonucuna ulaşırız. Dahası aşağıdakinden yararlanarak

$$\|x_n + Sx_n\| - \|Sx_n - x\| \le \|x_n + x\| \le 2$$

$\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2$ veya $\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{x + x_n}{2}\right\| = 1$ sonucuna ulaşırız. X'in genel düzgün konveks özelliğini kullanarak $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$ elde ederiz. Böylece $\lim_{n\to\infty} \|Sx - Sx_n\| = 0$ ve sonuçta $Sx = x$ veya denk olarak $\frac{T}{\|T\|} x = x$ elde ederiz. Nihayetinde $Tx = \|T\| x$, bu da $\|T\|$'nın, T'nin bir özdeğeri olduğunu gösterir.