

* $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{(n-1) \ln n}$ serisinin karakteri? $\frac{n}{(n-1) \ln n} > \frac{1}{n}$

① Mutlak Yakınsak mı?

$\sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{(n-1) \ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1) \ln n}$ yakınsak mı? $\forall n \geq 2$ için $\ln n < n$ dir.

$\frac{n}{(n-1) \ln n} > \frac{n}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1) \ln n} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$

Harmonik Seri
İraksak
Mukayese testine göre

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1) \ln n}$ de iraksak.

Olağıyla $\sum (-1)^n \frac{n}{(n-1) \ln n}$ mutlak yak. değil.

② Sırtli Yakınsak mı? $a_n = \frac{n}{(n-1) \ln n}$

a) $a_n > 0 \checkmark$

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n^2-1) \ln n}{n^2 \ln(n+1)} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \checkmark$

Alternan Seri Testi-
ne göre seri
sırtli yakınsaktır.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n-1) \ln n} = 0 \checkmark$

* $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1 + \sin n}{n} a_n$ olarak verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsaklığını inceleyin.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin n}{n} = 0 < 1$ Oran Testine göre
Seri yakınsaktır.

*) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ karakteri?

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$ Kök testine göre seri yakınsak

*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$ karakteri?

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(\ln n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/n}}{\ln n} = 0 < 1$ Kök testine göre yakınsak. $(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1)$

*) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1}$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ serisi için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($p=2>1$) yakınsak serisini seçelim.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0, \infty$ limit testine göre olduğundan iki seri aynı karakterli.

$\sum \frac{n}{n^3+1}$ yakınsak dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1}$

mutlak yakınsaktır.

*) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n}$ karakteri?

$\sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ $[2, \infty)$ da sürekli pozitif azalan

Integral testi uygulanabilir.

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\ln(\ln x) \right]_2^R = \lim_{R \rightarrow \infty} [\ln(\ln R) - \ln(\ln 2)] = \infty$ ıraksak olduğundan seri de ıraksak

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ıraksak $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n}$ mutlak yakınsak değil.

Ancak Alternan seri testinin 3 koşulu da sağlandığından

$\left(\frac{1}{n \ln n} \right)$ pozitif, azalan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n}$ saatli yakınsak seridir.



	YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi, Sınav Soru ve Cevap Kağıdı			NOT TABLOSU					
				3a. S	3b. S	4a. S	4b. S	TOPLAM	
Adı Soyadı									
Öğrenci Numarası		Grup No							
Bölümü					Sınav Tarihi			28/04/2012	
Dersin Adı		0251322 Matematik II 2. Değerlendirme			Sınav Süresi		Sınav Yeri		
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı							İmza		
YÖK nun 2547 sayılı Kanunun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.									

3) a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{2+n}$ serisinin yakınsak olup olmadığını açıklayarak belirtiniz...

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1+n}{2+n} \right\} = 1$$

n. terim testine göre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ olduğundan

seri ıraksaktır.

3) b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cdot \cos(n\pi)}{2n+3}$ serisinin yakınsak, mutlak yakınsak, şartlı yakınsak ve

ıraksak olup olmadığını açıklayarak belirtiniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 100}{2n+3}$$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n 100}{2n+3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{2n+3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{100}{2n+3}}{\frac{1}{n}} = 50 \neq 0$$

limit karşılaştırma testine göre

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{2n+3}$ ıraksaktır.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 100}{2n+3}$ serisi mutlak yak değildir.

ii) Alternan seri testine göre

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
2) $|a_{n+1}| < |a_n|$
3) $\{a_n\}$ alterne } olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 100}{2n+3} \text{ yakınsaktır.}$$

iii) Dolayısıyla şartlı yakınsaktır.

① $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}}$ serisinin karakteri?

1) $|a_n| = \frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}}$ yakınsak mı?

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ seçelim. $p = \frac{1}{2} < 1$ ratsak

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 2 \neq 0, \infty$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli. $\sum \frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}}$ yakınsak değil.

Dolayısıyla $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}}$ mutlak yak. değil.

② Şartlı Yakınsak mı?

a) $a_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}} > 0$

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)n}}}{\frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n^2-n-1}{2n^2-n} < 1$

$a_{n+1} < a_n \checkmark$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}} = 0$

olduğundan Alternan Seri Testine göre $\sum (-1)^n \frac{2n-1}{\sqrt{n(n-1)}}$ şartlı yakınsaktır.

Soru 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Cevap 2. (Bulunan aralığın uç noktaları için de serinin yakınsaklığını inceleyiniz.)

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad (n=1,2,\dots) \text{ olmak üzere,}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \right) \quad (\Theta 4)$$

$$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}} \right) \quad (\Theta 3)$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

olduğundan, yakınsaklık yarıçapı $R = \frac{1}{L} = 1$ 'dir; $(\Theta 2)$

Verilen seri $|x-2| < R=1$ şeklinde her x için (mutlak) olarak yakınsar.

$(\Theta 4)$ O halde seri her $x \in (1,3)$ için (mutlak) olarak yakınsaktır,

her $x < 1$ ve her $x > 3$ için ıraksaktır.

Ayrıca;

$x=1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+1}}$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 \neq 0$ * * *
(veya, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+1}}$ mevcut olmadığı için) * * *

olduğundan, $x=1$ 'de seri ıraksaktır, ve * * *

$x=3$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 \neq 0$

olduğundan, $x=3$ 'te seri ıraksaktır.

$(\Theta 2)$ Buna göre verilen serinin yakınsaklık aralığı $(1,3)$ açık aralıktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+1}}$$

serisi hangi x değerleri için mutlak yakınsak, şartlı yakınsak, ıraksaktır. Yakınsaklık aralığı?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{(n+1)^3+1}} \cdot \frac{\sqrt[4]{n^3+1}}{(x-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^3+1}}{\sqrt[4]{(n+1)^3+1}} \cdot |x-1| = |x-1| < 1 \Rightarrow \boxed{0 < x < 2}$$

Mutlak Yak.

$x=2$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}}$$

serisi $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$$

seçelim. $p = \frac{3}{4} < 1$ ıraksaktır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}} = 1 \neq 0, \infty$$

iki seri aynı karakterli.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} \text{ de ıraksak}$$

$x=0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+1}}$$

$\Rightarrow$ Seri mutlak yakınsak değildir.

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} = 0 \checkmark$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} > \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3+1}} \quad (a_{n+1} < a_n) \checkmark$$

$$\textcircled{3} a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} > 0$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ ve $\textcircled{3}$ 'den seri şartlı yakınsak

Seri:

$0 < x < 2$ için ~~mutlak~~ yakınsak } $[0, 2) \rightarrow$ yakınsaklık aralığı
 $x=0$ " " şartlı yakınsak

$x \in \mathbb{R} - [0, 2)$ için ıraksaktır.

⑧ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(n+1)!}$ karakteri?

$$\frac{1+n!}{(n+1)!} > \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(n+1)!} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serelim. H. Serisi ıraksak
Limit T. göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ de ıraksak}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(n+1)!} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

ıraksak

$\Rightarrow$ Mukayese testine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(n+1)!} \text{ de ıraksak}$$

⑨ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ serisinin yakınsaklık analizi?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{(2n+2)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{Yakınsaklık Analizi. } (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

⑩ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \cdot \left(\frac{3x+2}{-5} \right)^n$ yakınsaklık Analizi? mutlak yak., şartlı yak., ıraksak olduğu x değerleri?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2n+2} \cdot \left(\frac{3x+2}{-5} \right)^{n+1} \cdot 2n \cdot \left(\frac{-5}{3x+2} \right)^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+2} \cdot \frac{|3x+2|}{5} < 1$$

$$|3x+2| < 5 \Rightarrow -5 < 3x+2 < 5 \Rightarrow \boxed{-\frac{7}{3} < x < 1} \text{ Mutlak Yakınsak}$$

$x=1$ ise: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \Rightarrow$ Alternan Harmonik Seri şartlı yak. $\boxed{x=1}$ ✓

$x=-\frac{7}{3}$ ise: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \Rightarrow$ Harmonik Seri ıraksak

Seri:
 $-\frac{7}{3} < x < 1$ için M. Yak. $\left\{ \left(-\frac{7}{3}, 1 \right) \right\}$: Yak.
 $x=1$ için S. Yak.
 $x \in \mathbb{R} - \left(-\frac{7}{3}, 1 \right]$ için ıraksak

* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}} \cdot (2x-3)^k$ serisi hangi x değerleri için mutlak yakınsak, şartlı yakınsak, ıraksaktır? Yakınsaklık Analizi?

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(2x-3)^{k+1}}{(k+1)\sqrt{(k+1)^2+1}} \cdot \frac{k\sqrt{k^2+1}}{(2x-3)^k} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k\sqrt{k^2+1}}{(k+1)\sqrt{(k+1)^2+1}} \cdot |2x-3| = |2x-3| < 1 \Rightarrow -1 < 2x-3 < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{1 < x < 2}$$

Mutlak Yak.

$x=1$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ seçelim, } p=2 > 1 \text{ yakınsak} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}} = 1 \neq 0, \infty$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli.

$\sum \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$ de yakınsak.

$\boxed{x=1}$ ✓ (Mutlak Yak.)

$x=2$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}} \text{ yakınsak olduğundan}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}} \text{ mutlak yakınsaktır.}$$

$\boxed{x=2}$ ✓ (Mutlak Yak.)

Seri ;

$1 \leq x \leq 2$ için mutlak yakınsaktır.

Şartlı yakınsak olduğu bir x değeri yoktur.

$x \in \mathbb{R} - [1, 2]$ için ıraksaktır.

} $[1, 2]$ yakınsaklık aralığı

*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{3^n \cdot n}$ serisinin yakınsaklık analizi bulunuz. Seri hangi x değerleri için mutlak yakınsak, şartlı yakınsak ve ıraksaktır?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2x-3)^{n+1}}{3^{n+1} \cdot (n+1)} \cdot \frac{3^n \cdot n}{(2x-3)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot |2x-3| = \frac{|2x-3|}{3} < 1$$

$$\frac{|2x-3|}{3} < 1 \Rightarrow -3 < 2x-3 < 3 \Rightarrow \boxed{0 < x < 3} \text{ Mutlak Yakınsak.}$$

$x=3$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{Harmonik Seri}$$

Irkaksak

$x=0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \text{Alternan Harmonik Seri}$$

Şartlı Yakınsak

Seri;

$0 < x < 3$ için Mutlak Yakınsak

$x=0$ " Şartlı Yakınsak

$x \in \mathbb{R} - [0, 3)$ için ıraksaktır

$\left. \begin{array}{l} 0 < x < 3 \text{ için Mutlak Yakınsak} \\ x=0 \text{ " Şartlı Yakınsak} \end{array} \right\} \underline{x \in [0, 3) \text{ de yakınsak}}$

↓

Yakınsaklık Analizi
" $[0, 3)$

* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \ln n}$ serisinin yakınsaklık aralığı, mutlak / şartlı yak. olduğu x 'değerleri?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1) \ln(n+1)} \cdot \frac{n \ln n}{(x-2)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{(n+1) \ln(n+1)} \cdot |x-2|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_1 \cdot \underbrace{\frac{\ln n}{\ln(n+1)}}_1 \cdot |x-2| < 1 \Rightarrow \boxed{1 < x < 3}$$

Mutlak 4.

$x=3$ için

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \textcircled{1} f(x) = \frac{1}{x \ln x} > 0 \quad (x \in [2, \infty) \text{ için}) \\ \textcircled{2} f'(x) = -\frac{1 + \ln x}{x^2 \ln^2 x} < 0 \Rightarrow f(x) \text{ azalan} \\ \textcircled{3} f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad [2, \infty) \text{ da sürekli} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{integral} \\ \text{testi uygulanabilir} \checkmark \end{array}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(\ln x) \Big|_2^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln R) - \ln(\ln 2)}{\infty} = \infty$$

integral
maksak
⇓
Seri maksak

$x=1$ için

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} \Rightarrow \text{Mutlak Yak. değildir.}$$

$$\textcircled{1} a_n = \frac{1}{n \ln n} > 0 \quad \textcircled{2} a_{n+1} < a_n? \quad \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} < \frac{1}{n \ln n} \checkmark \quad \textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln n} = 0 \checkmark$$

Altarne Seri Testing göre seri şartlı yakınsaktır.

Seri:

$$\left. \begin{array}{l} 1 < x < 3 \text{ için Mutlak Yak.} \\ x=1 \text{ için Şartlı Yak.} \end{array} \right\} [1, 3] \text{ için yakınsak} \\ \text{(Yak. Aralığı)}$$

$x \in \mathbb{R} - [1, 3]$ için maksaktır.

*) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(3-2x)^k}{k^2 \ln k}$ serisinin yakınsaklık aralığı?

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(3-2x)^{k+1}}{(k+1)^2 \ln(k+1)} \cdot \frac{k^2 \ln k}{(3-2x)^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} \cdot \frac{\ln k}{\ln(k+1)} \cdot |3-2x| = |3-2x| < 1$$

$$\boxed{1 < x < 2} \text{ M.4 ok.}$$

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\ln(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} = 1 \right)$$

x=1 için

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k} \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ secelim. } p=2 > 1 \text{ yakınsak}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2 \ln k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln k} = 0 \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ yak. olduğundan}$$

Limit Testine göre;

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k} \text{ de yakınsak}$$

x=2 için

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 \ln k} \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k} \text{ yakınsak olduğundan}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 \ln k}$$

mutlak yak.

Seri:

$1 \leq x \leq 2$ için mutlak yak.

Serinin şartlı yak. olduğu x değeri yok $\left\{ [1,2] \text{ yak. aralığı} \right\}$

$x \in \mathbb{R} - [1,2]$ için ıraksak

Soru 2. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(3-2x)^k}{k^2 \ln k}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz. Bu aralığın uç noktaları için seriyi inceleyiniz. (25puan)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(3-2x)^{k+1}}{(k+1)^2 \ln(k+1)} \cdot \frac{k^2 \ln k}{(3-2x)^k} \right|$$

$$= |3-2x| \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \cdot \frac{\ln k}{\ln(k+1)} \right] = |3-2x| \cdot 1 \cdot 1 = |3-2x| < 1$$

$$-1 < 3-2x < 1$$

$$1 < x < 2$$

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\ln(k+1)} \stackrel{L}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} = 1 \right)$$

$x=1$ için $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ serisi

$b_k = \frac{1}{k^2}$ olmak üzere $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ $p=2 > 1$ yak.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2 \ln k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln k} = 0 \quad \text{ve}$$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ serisi yak. olduğundan $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$ serisi de yakınsak

$x=2$ için $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 \ln k}$ alterne serisi mutlak yakınsaktır.

Sonuç olarak y.A $1 < x < 2$ dir.

*) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3+2^n}$ serisinin mutlak/sartlı yakınsak, ıraksak olduğu x değerleri?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{3+2^{n+1}} \cdot \frac{3+2^n}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2^n}{3+2^{n+1}} \cdot |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \left(\frac{3}{2^n} + 1 \right)}{2^n \left(\frac{3}{2^n} + 2 \right)} \cdot |x|$$

$$= \frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow \boxed{-2 < x < 2}$$

M.Y.

$x=2$ için

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3+2^n}$ serisi elde edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3+2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n \left(\frac{3}{2^n} + 1 \right)} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{n. Terim Testine göre seri ıraksak}$$

$x=-2$ için

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{3+2^n}$ serisi elde edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3+2^n} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Alternan seri testine göre seri ıraksaktır.}$$

Mutlak yakınsak: $-2 < x < 2$ } $(-2, 2) \rightarrow$ yakınsaklık analizi.
Sartlı " : Yok

İraksak: $\mathbb{R} - (-2, 2)$

* $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) (x-3)^n$ serisi hangi x değerleri için mutlak veya şartlı yakınsar? (1)

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) (x-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} (x-3)^n \text{ şeklinde düzenleyelim}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(x-3)^n} \right| = |x-3| < 1 \Rightarrow \boxed{2 < x < 4} \text{ M.Yakınsak}$$

$x=4$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \text{ serisi elde edilir. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (} p=\frac{1}{2} < 1 \text{ ıraksak) seçelim.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2} \neq 0, \infty \Rightarrow \text{Limit Testine göre iki seri aynı karakterli; } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \text{ ıraksak}$$

$x=2$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \text{ mutlak yakınsak değil. Şartlı yakınsak mı?}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \left. \begin{array}{l} a_n > 0 \checkmark \\ a_{n+1} < a_n \checkmark \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \checkmark \end{array} \right\} \text{ Alternan seri testine göre seri şartlı yakınsaktır.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{M.Yakınsak: } x \in (2, 4) \\ \text{Ş.Yakınsak: } x = 2 \end{array} \right\} \text{ Yakınsaklık Aralığı} = [2, 4)$$

$$\text{İraksak: } \mathbb{R} - [2, 4)$$