① Lineer Vektör Uzayları

Küme: iyi tanımlı nesnelerin bir topluluğudur.
kümeleri A, B, C, ..., X, Y, Z, ..., U, V, W, ... gibi büyük harflerle ve bir kümeye ait nesne için
$a \in A$ $(a \notin A)$

$\subset$: alt küme

$\emptyset$: boş küme

$\cup$: birleşim

$\cap$: kesişim

$\times$: kartezyen çarpım

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$$

$$A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\}$$

$\mathbb{R}$: reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$: rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$: tamsayılar
$\mathbb{N}$: doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$: kompleks sayılar kümesi

* Cisim olarak $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ alınır.

* X ve Y kümeler ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonk. olsun.

$$f : X \longrightarrow Y$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

$A \subset X$ için A kümesinin f altındaki görüntüsü:
$$f(A) = \{y : y = f(x),\ x \in A\} = \{f(x) : x \in A\}$$

$B \subset Y$ için $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$
$f^{-1}(B)$ ye B kümesinin f altındaki ters görüntüsü denir.

$f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow Z$ $\quad g \circ f : X \longrightarrow Z$

$k \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{F}^k = \underbrace{\mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \dots \times \mathbb{F}}_{k \text{ defa}}$

$x \in \mathbb{F}^k$: $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $x_j \in \mathbb{F}$, $j = 1, \dots, k$.

Tanım: V bir küme olsun. V kümesine aşağıda verilen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

$x, y, z \in V$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

① $x+y=y+x$, $x+(y+z)=(x+y)+z$

② $x+0=x$ olacak şekilde $0 \in V$ vardır.

③ $x+(-x)=0$ o. ş. $-x \in V$ vardır.

④ $1 \cdot x = x$, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)(x)$

⑤ $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, V ye reel vektör uzayı,
- $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, V ye kompleks vektör uzayı denir.
- V nin elemanlarına vektörler denir.
- V vektör uzayı
- lineer vektör uzayı
- lineer uzay

$+ : V \times V \longrightarrow V$ $\cdot : \mathbb{F} \times V \longrightarrow V$

$(x, y) \longrightarrow x+y$ $(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$

* V bir vektör uzayı, $x \in V$ ve $A, B \subset V$ olsun,

$x + A = \{x + a : a \in A\}$

$A + B = \{a + b : a \in A \text{ ve } b \in B\}$

Tanım: 1,2: V bir vektör uzayı ve $U \subset V$ olsun. Eğer U, V deki $+$ ve $\cdot$ işlemlerine göre bir vektör uzayı ise U ya V nin bir alt vektör uzayı ya da kısaca alt uzayı denir.

Bu tanım aşağıdaki ifadeye denktir:

$\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $x, y \in U$ için $\alpha x + \beta y \in U$

* U alt uzayı daima $0 \in V$ vektörünü içerir.
$U = \{0\}$ ise U yine bir alt uzaydır.

Tanım 1.3: V bir vektör uzayı ve $\mathbb{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V$, $k \geq 1$ sonlu bir küme ve $A \subset V$ keyfi boştan farklı bir küme olsun.

a) Bir x vektörüne
$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$
şeklinde yazılabiliyorsa $\mathbb{V}$ deki vektörlerin bir lineer birleşimi (kombinezonu) denir.

b) Eğer $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ ise V ye lineer bağımsız vektörlerin kümesi denir.

c) Lineer bağımsız olmayan bir kümeye lineer bağımlıdır denir.

d) A daki tüm sonlu alt kümelerin lineer birleşimlerinin kümesi SpA ile gösterilir ve buna A nın gereni denir.

* SpA, A kümesini içeren V deki en küçük lineer alt uzaydır.

* B bir alt uzay ve $A \subset B \subset V$ ise $spA \subset B$.

e) $\mathbb{V}$ lineer bağımsız ve $Sp\mathbb{V} = V$ ise $\mathbb{V}$ ye V nin bir tabanı denir.

* $\mathbb{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \Rightarrow$ k ya V nin boyutu denir ve $\dim V = \text{boy}\, V = k$ şeklinde yazılır.

* Eğer V nin sonlu bir tabanı yoksa o zaman V ye sonsuz boyutlu uzay denir.

f) $\mathbb{V}$, V için bir taban ise her bir $x \in V$
$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in F, \mathbb{V} = \{x_1, \dots, x_k\})$
yazılabilir ve α_j $(j = 1, \dots, k)$ skalerlerine x vektörünün

$\mathcal{V}$ tabanına göre bileşenleri denir.

g) $\mathbb{F}^k$, $\mathbb{F}$ cismine göre bir vektör uzayıdır.

$e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $e_k = (0,0,\ldots,1)$ vektörlerinin kümesi $\mathbb{F}^k$ için bir tabandır. (standart taban)

Tanım 1.4: V, W, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $V \times W$ kartezyen çarpımı aşağıdaki vektör uzayı işlemlerine göre bir vektör uzayıdır.

$\alpha \in \mathbb{F}$ ve $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in V \times W$ için

- $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$
- $\alpha(x_1,y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

Tanım 1.5: S bir küme ve V $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Tüm $f: S \longrightarrow V$ fonksiyonların kümesi $F(S,V)$ ile gösterilir.
$\alpha \in \mathbb{F}$ ve $f, g \in F(S,V)$ için $F(S,V)$ deki toplama ve skalerle çarpma

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

şeklinde tanımlanır.
Böylece $F(S,V)$ bir vektör uzayıdır.

Örnek 1.6: $S = \{1,\ldots,k\}$ ise $F(S,\mathbb{F})$ kümesi $\mathbb{F}^k$ uzayı ile özdeşleştirilebilir. $x \in \mathbb{F}^k$ elemanı $f \in F(S,\mathbb{F})$ elemanı ile $f(j) = x_j$, $1 \leq j \leq k$ şeklinde özdeşlenir.

Tanım 1.7: V, W aynı bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayları olsun. Bir $T: V \longrightarrow W$ fonksiyonuna eğer tüm $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $x, y \in V$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

ise bir lineer dönüşüm denir. Tüm $T: V \longrightarrow W$ lineer dönüşümlerin kümesi $L(V,W)$ gösterilir.
$L(V,W)$ bir vektör uzayıdır (Tanım 1.5 teki işlemlerle) $V = W$ ise $L(V,V) = L(V)$ alınır.
$T \in L(V)$: $T: V \longrightarrow V$

Tüm $x \in V$ için $Ix = x$ birim dönüşümü tanımlanır (özdeşlik dönüşümü).

Lemma 1.8: V, W, X vektör uzayları ve $T \in L(V,W)$ $S \in L(W,X)$ olsun. Bu durumda $S \circ T \in L(V,X)$ dir.

$\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $x, y \in V$

$$(S \circ T)(\alpha x + \beta y) = S(T(\alpha x + \beta y)) = S(\alpha \underbrace{T(x)}_{S_1} + \beta \underbrace{T(y)}_{S_2})$$

$$= \alpha S(S_1) + \beta S(S_2)$$

$$= \alpha S(T(x)) + \beta S(T(y))$$

$$= \alpha (S \circ T) x + \beta (S \circ T)(y)$$

Lemma 1.9: V bir vektör uzayı, $R, S, T \in L(V)$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ olsun. Bu takdirde

a) $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$
b) $R \circ (S + T) = R \circ S + R \circ T$
c) $(S + T) \circ R = S \circ R + T \circ R$
d) $I_V \circ T = T \circ I_V = T$
e) $(\alpha S) \circ T = \alpha (S \circ T) = S \circ (\alpha T)$

Lemma 1.10: V, W vektör uzayları ve $T \in L(V,W)$ olsun.

a) $T(0) = 0$
b) U, V nin bir lineer alt uzayı ise $T(U)$ da W nin bir lineer alt uzayıdır. Ayrıca $\text{boy}\, T(U) \leq \text{boy}\,(U)$.
c) U, W nin bir lineer alt uzayı ise $\{x \in V : T(x) \in U\}$ kümesi de V nin bir lineer alt uzayıdır.

Tanım 1.11: V, W vektör uzayları ve $T \in L(V,W)$ olsun.

a) T nin görüntüsü (image ya da range) $\text{Im}\,T = T(V)$ uzayıdır; T nin rankı $r(T) = \text{boy}\,(\text{Im}\,T)$ dir.
b) T nin çekirdeği (kernel ya da sıfır (null) uzayı) $\ker T = \text{Çek}\,T = \{x \in V : T(x) = 0\}$.
T nin sıfırlığı $n(T) = \text{boy}\,(\text{Çek}\,T)$ dir.
c) $r(T) < \infty$ ise T ye sonlu ranka sahiptir denir.
d) Eğer $y \in W$ için $T(x) = y$ denklemi en fazla bir x çözümüne sahipse T ye 1-1 dönüşüm denir.

e) Eğer $y \in W$ için $T(x)=y$ denklemi en az bir x çözümüne sahipse T ye örten lineer dönüşüm denir.

f) Bire-bir ve örten T dönüşümüne bijektif dönüşüm denir.
$y \in W$ için $T(x)=y$ denklemi tam olarak bir x çözümüne sahiptir.

Lemma 1.12: V, W vektör uzayları ve $T \in L(V,W)$ olsun.
a) T nin birebir olması için gerek ve yeter koşul $T(x)=0$ denkleminin yalnızca $x=0$ çözümüne sahip olmasıdır.

$$\text{Çek}(T)=\{0\} \qquad n(T)=0$$

çekirdeğin boyutu

tek nokta ile doğru oluşturulamaz bu yüzden 0 dır.

b) T örtendir $\Leftrightarrow \text{Im}\, T = W$
Eğer $\text{boy}\, W < \infty$ ise $r(T) = \text{boy}\, W$

c) $T \in L(V,W)$ nin bijektif olması için gerek ve yeter koşul $S \circ T = I_V$ ve $T \circ S = I_W$ olacak şekilde bijektif bir $S \in L(W,V)$ dönüşümünün var olmasıdır.

V k-boyutlu ise $k = n(T) + r(T)$ $(k = \text{boy}\, V)$

Tanım 1.13: V bir vektör uzayı ve $T \in L(V)$ olsun. Eğer $T(x) = \lambda x$ denklemi $0 \neq x \in V$ çözümüne sahipse $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T nin bir özdeğeri denir. x vektörüne de λ özdeğerine karşılık gelen öz vektör denir.
$\text{Çek}\,(T-\lambda I) \subset V$ alt uzayına λ ya karşılık gelen öz uzay denir.

$m_\lambda = n(T-\lambda I)$ sayısına λ nın katlılığı denir.

13 Şubat

* bir fonk.un bir noktada sürekliliği ;

1) $f: A \to \mathbb{R}$

$x = x_0 \in A$ nok.

(*) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

x_0 da tanımlı

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ mevcut

(*) eşitliği sağlanır.

2) $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

o.ş. de vardır.

f $\forall x \in A$ nok.da sürekli ise f'e A üzerinde süreklidir denir.

$\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı tüm $x \in A$ için $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $(x_0 \in A)$

o.ş. $\delta = \delta(\varepsilon)$ bulunur.

3) (X, τ) ve (Y, τ') iki top uzay olsun.

$f: X \to Y$ sürekli olması :

$\Downarrow$

$U \in \tau'$ -açık

$V = f^{-1}(U) \in \tau$ -açık

2 Lineer Operatörler

2.1 Sürekli Lineer Dönüşümler

X ve Y iki normlu lineer uzay olsun. $T: X \to Y$ lin. dön. verilsin. $x_0 \in X$ alalım. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı

$$\|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\|_Y < \varepsilon$$

olacak şekilde bulunabilirse T ye $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir.

Lemma 2.1 : X ve Y normlu lineer uzaylar (NLU) ve $T: X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

a) T düzgün süreklidir;
b) T süreklidir
c) T 0 noktasında süreklidir.
d) $x \in X$ ve $\|x\| \leq 1$ için $\|T(x)\| \leq k$ o.ş. $k>0$ reel sayısı vardır.
e) Tüm $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq k\|x\|$ o.ş. $k>0$ reel sayısı vardır.

İspat: (a) $\Rightarrow$ (b), (b) $\Rightarrow$ (c) ispatları oldukça açıktır.

(c) $\Rightarrow$ (d): T, 0 noktasında sürekli olsun. $\epsilon = 1$ alalım. Bir $\delta > 0$ sayısı, $x \in X$ ve $\|x\| < \delta$ olduğunda $\|T(x)\| < 1$ o.ş. vardır. $w \in X$, $\|w\| \leq 1$ olsun.

$$\left\|\frac{\delta w}{2}\right\| = \frac{\delta}{2}\|w\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta \quad \text{olup}$$

$$\left\|T\left(\frac{\delta w}{2}\right)\right\| < 1 \quad \text{dir.} \quad T \text{ lineer olduğundan,}$$

$$T\left(\frac{\delta w}{2}\right) = \frac{\delta}{2} T(w) \quad \text{yazılabilir.}$$

Böylece $\frac{\delta}{2}\|T(w)\| < 1$ veya $\|T(w)\| < \frac{2}{\delta}$ olur.

$k = \frac{2}{\delta}$ aranan pozitif reel sayıdır.

(d) $\Rightarrow$ (e): $x \in X$, $\|x\| \leq 1$ için $\|T(x)\| \leq k$ o.ş. $k>0$ var olsun. $T(0) = 0$ old. dan $\|T(0)\| \leq k\|0\|$ çıkar. $y \neq 0$, $y \in X$ alalım,

$$\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = 1 \quad \text{olup} \quad \left\|T\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \leq k \quad \text{dir.}$$

T lineer olduğundan,

$$\left\|T\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| = \left\|\frac{1}{\|y\|} T(y)\right\| = \frac{1}{\|y\|}\|T(y)\| \leq k \quad \text{olup}$$

buradan $\Rightarrow \|T(y)\| \leq k\|y\|$ elde edilir.

Böylece $\forall x \in X$ için $\|T(x)\| \leq k\|x\|$ bulunur.

(e) $\Rightarrow$ (a): T lineer old. dan

$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| \underset{(e)\text{ den}}{\leq} k\|x-y\|$ olur.

$\varepsilon > 0$ ve $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ olsun.

O zaman $x, y \in X$ ve $\|x-y\| < \delta$ olduğunda

$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x-y\| < k\left(\dfrac{\varepsilon}{k}\right) = \varepsilon$ bulunur.

Böylece T düzgün süreklidir.

Örnek 2.2: $T: C_{\mathbb{F}}[0,1] \to \mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$, $\mathbb{R}$ ya $\mathbb{C}$ cisim)

lineer dönüşümü $T(f) = f(0)$ olarak verilsin.
T süreklidir.

Çözüm: $f \in C_{\mathbb{F}}[0,1]$ olsun. O halde

$|T(f)| = |f(0)| \leq \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\} = \|f\|$

$|T(f)| \leq \|f\|$

$k=1$ için Lemma 2.1 (e) den T 'nin dön sürekli olur.

Lemma 2.3: Eğer $\{c_n\} \in \ell^\infty$ ve $\{x_n\} \in \ell^p$ $(1 \leq p < \infty)$ ise $\{c_n x_n\} \in \ell^p$ olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|^p \leq \|\{c_n\}\|_\infty^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$$

eşitsizliği sağlanır.

İspatı: $\{c_n\} \in \ell^\infty$ ve $\{x_n\} \in \ell^p$ old. dan
$\lambda = \|\{c_n\}\|_\infty = \sup\{|c_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ ve
$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ dır. Tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$$|c_n x_n|^p \leq \lambda^p |x_n|^p$$

olup karşılaştırma testinden $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|^p < \infty$ bulunur.
Diğer bir deyişle $\sum |c_n x_n|^p$ serisi yakınsar.
Böylece $\{c_n x_n\} \in \ell^p$ olup istenen eşitsizlik sağlanır.

Örnek 2.4: Eğer $\{c_n\} \in \ell^\infty$ ise o zaman
$T : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{F}$, $T(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ lin. dön sürekldir.

Çözüm: lemma 2.3 ten $\{c_n x_n\} \in \ell^1$ olup T nin iyi-tanımlı olduğu anlamına gelir.
Ayrıca

$$|T(\{x_n\})| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n| \leq \|\{c_n\}\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$
$$= \underbrace{\|\{c_n\}\|_\infty}_{k} \|x_n\|_1$$

olup T açıkça süreklidir.

$$\|T(x)\| \leq k\|x\|$$

Örnek 2.5: Eğer $\{c_n\} \in \ell^\infty$ ise $T : \ell^2 \to \ell^2$,
$T(\{x_n\}) = \{c_n x_n\}$ lin. dön. süreklidir.

Çözüm: $\lambda = \|\{c_n\}\|_\infty$ olsun. $\{c_n x_n\} \in \ell^2$ olduğundan T iyi tanımlıdır.
Öte yandan,

$$\|T\{x_n\}\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|^2 \leq \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \lambda^2 \|\{x_n\}\|_2^2 \text{ dir.}$$

Böylece $k = \|\{c_n\}\|_\infty$ ile T süreklidir.

Tanım 2.6: X ve Y NLU ve $T: X \to Y$ bir lin. dön. olsun. Eğer tüm $x \in X$ için

$$\|T(x)\| \leq k \|x\|$$

olacak şekilde bir $k>0$ reel sayısı varsa T ye sınırlı dönüşüm denir.

* Yukarıdaki lemma 2.1 den lin. dön. için sınırlılık ve süreklilik kavramlarının denk oldukları görülür.

Tüm sürekli (sınırlı) $T: X \to Y$ lin. dön. için kümesi $B(X,Y)$ ile gösterilir.

$T \in B(X,Y)$: $T: X \to Y$ sınırlı (sürekli) lineer dönüşümdür

$B(X,Y) \subseteq L(X,Y)$: $T \in L(X,Y)$: $T: X \to Y$ lin. dön.

$T \in B(X,X) = B(X)$: $T: X \to X$ sürekli lin. dön.

örnek 2.7: $a,b \in \mathbb{R}$, $k: [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonk. ve $M = \sup \{ |k(s,t)| : (s,t) \in [a,b] \times [a,b] \}$ olsun.

a) Eğer $g \in C[a,b]$ ise $f: [a,b] \to \mathbb{C}$,
$f(s) = \int_a^b k(s,t).g(t).dt$ fonksiyonu da $C[a,b]$ de dir.

Yani $f \in C[a,b]$ dir.

b) $K: C[a,b] \to C[a,b]$, $(K(g))(s) = \int_a^b k(s,t)\, g(t)\, dt$

bir lin. dön. ise $K \in B(C[a,b], C[a,b])$ ve
$\|K(g)\| \leq M(b-a) \|g\|$.

Scanned by CamScanner

Çözüm:

a) $\varepsilon>0$ ve $s\in[a,b]$ olsun. $k_s\in C[a,b]$ fonksiyonunu $t\in[a,b]$ için $k_s(t)=k(s,t)$ olarak alalım. $[a,b]\times[a,b]$, $\mathbb{R}^2$ de kompakt olduğundan k fonk. düzgün süreklidir ve böylece,

eğer $|s-s'|<\delta \Rightarrow |k_s(t)-k_{s'}(t)|<\varepsilon$, $\forall t\in[a,b]$ için o.ş. $\delta>0$ sayısı vardır. O halde

$$|f(s)-f(s')|\leq \int_a^b |k(s,t)-k(s',t)|\,|g(t)|\,dt \leq \varepsilon(b-a)\|g\|$$

Bu nedenle f süreklidir.

b) Tüm $s\in[a,b]$ için

$$|K(g)(s)| \leq \int_a^b |k(s,t)\, g(t)|\,dt \leq \int_a^b M\|g\|\,dt \quad \text{olup}$$
$$= M(b-a)\|g\|$$

böylece $\|K(g)\|\leq M(b-a)\|g\|$ bulunur.

Buradan $K\in B(C[a,b], C[a,b])$

Örnek 2.8: $[0,1]$ üzerinde tanımlı tüm polinomların uzayı P olsun. $P\subset C_{\mathbb{F}}[0,1]$.

$$T: P\longrightarrow P \quad , \quad T(p)=p'$$

lineer dön. sürekli değildir.

Çözüm: $p_n\in P$, $p_n(t)=t^n$ olsun.

$$\|p_n\| = \sup\{|p_n(t)| : t\in[0,1]\} = 1$$

$$\|T(p_n)\| = \|p_n'\| = \sup\{|p_n'(t)| : t\in[0,1]\}$$
$$= \sup\{|nt^{n-1}| : t\in[0,1]\} = n$$

Buradan tüm $p \in P$ için $\|T(p)\| \leq k\|p\|$ o.s. $k>0$ sayısının olmadığı anlaşılır. O halde T sürekli değildir.

<u>Teo 2.9</u>: X sonlu boyutlu N.L.U olsun. Herhangi bir NLU için $T: X \to Y$ bir lin. dön olsun. T süreklidir.

<u>İspat</u>: Önce X üzerinde yeni bir norm tanımlayalım

$\|\cdot\|_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\|$ olsun.

$\|\cdot\|_1$, fonk.nun X için bir norm olduğunu gösterelim:
$x, y \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{F}$ olsun.

i) $\|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\| \geq 0$

ii) $\|x\|_1 = 0 \Rightarrow \|x\| = \|T(x)\| = 0$ ve böylece $x=0$ olur. $x=0$ ise $\|x\| = \|T(x)\| = 0$ olup $\|x_1\| = 0$ olur.

$(\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

iii) $\|\lambda x\|_1 = \|\lambda x\| + \|T(\lambda x)\| = |\lambda|\|x\| + |\lambda|\|T(x)\|$
$= |\lambda| (\|x\| + \|T(x)\|)$
$= |\lambda| \|x\|_1$

iv) $\|x+y\|_1 = \|x+y\| + \|T(x+y)\|$

$= \|x+y\| + \|T(x) + T(y)\|$

$\leq \|x\| + \|y\| + \|T(x)\| + \|T(y)\|$

$= \|x\| + \|T(x)\| + \|y\| + \|T(y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

$\|\cdot\|_1 \approx \|\cdot\|_2$ a, b var ki:

$a\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq b\|\cdot\|_2$

X sonlu boyutlu old. dan $\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|_1$ normları denktir. Tüm $x \in X$ için $\|x\|_1 \leq k\|x\|$ o.s. $k>0$ sayısı vardır.

Bu nedenle $\|T(x)\| \leq \|x\|_1 \leq k\|x\|$, $\forall x \in X$ için olup T süreklidir.

Örnek 2.10: P polinomların kümesi için $T: P \to \mathbb{C}$, $T(p) = p'(1)$ lin. dön. sürekli değildir.

Lemma 2.11: X ve Y NLU ve $T: X \to Y$ sürekli lin. dön. olsun. O zaman $Ker(T) = çek(T)$ kümesi kapalıdır.

İspatı: $Ker(T) = \{x \in X : T(x) = 0\}$ ve $\{0\}$, Y de kapalıdır. Buradan $T^{-1}(\{0\}) = Ker(T)$, X de kapalıdır. T sürekli olduğundan.

Tanım 2.12: X ve Y NLU $T: X \to Y$ bir lin. dön. olsun. T nin grafiği

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, T(x)) : x \in X\}$$ kümesidir.

$\mathcal{G}(T) \subset X \times Y$

$\mathcal{G}(T)$, $X \times Y$ nin bir lineer alt uzayı $Ker(T)$ X in bir lineer alt uzayı.

Lemma 2.13: X ve Y NLU ve $T: X \to Y$ lin. dön. sürekli ise o zaman $\mathcal{G}(T)$ kapalıdır.

İspatı: $\{(x_n, y_n)\}$, $\mathcal{G}(T)$ de $(x, y) \in X \times Y$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. $(x, y) \in \mathcal{G}(T)$?

$x_n \to x$ X de
$y_n \to y$ Y de dir. $((x_n, y_n) \to (x, y) \in X \times Y)$

Eğer $(x, y) \in \mathcal{G}(T)$ olduğunu gösterebilirsek bu da $\mathcal{G}(T)$ nin kapalı olmasına yeter.

$(x_n, y_n) \to (x, y) \in X \times Y$ olduğundan $x_n \to x \in X$ ve $y_n \to y \in Y$ elde edilir (?)

20 Şubat

Bununla birlikte $(x_n, y_n) \in \mathcal{G}(T)$ olduğundan tüm $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = T(x_n)$ dir. Böylece, T sürekli olduğundan,

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x)$$

bulunur. O halde

$$(x,y) = (x, T(x)) \in \mathcal{G}(T)$$

elde edilir. Bu da $\mathcal{G}(T)$ nin kapalı olması demektir.

Lemma 2.14: X ve Y NLU olsun ve $S, T \in B(X,Y)$ yi tüm $x \in X$ için $\|S(x)\| \leq k_1\|x\|$ ve $\|T(x)\| \leq k_2\|x\|$ olacak şekilde seçelim. $\lambda \in \mathbb{F}$ olsun. Bu durumda,

a) $\|(S+T)(x)\| \leq (k_1+k_2)\|x\| \quad (\forall x \in X$ için$)$

b) $\|(\lambda S)(x)\| \leq |\lambda|\, k_1\|x\| \quad (\forall x \in X$ için$)$

c) $B(X,Y)$, $L(X,Y)$ nin bir lineer alt uzayıdır.

İspat:

a) Eğer $x \in X$ ise

$$\|(S+T)(x)\| \leq \|S(x)\| + \|T(x)\| \leq k_1\|x\| + k_2\|x\| = (k_1+k_2)\|x\|$$

bulunur.

b) Eğer $x \in X$ ise

$$\|(\lambda S)(x)\| = |\lambda|\,\|S(x)\| \leq |\lambda|\, k_1\|x\|$$

c) (a) ve (b) kısımlarından $(S+T) \in B(X,Y)$ ve $\lambda S \in B(X,Y)$ olarak $B(X,Y)$, $L(X,Y)$ nin bir lineer alt uzayıdır. Buradan $B(X,Y)$ nin bir lineer uzay (lineer vektör uzayı) olduğu elde edilir.

Alıştırmalar 1

① $T: C_{\mathbb{R}}[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$
lineer dönüşümünün sürekli old. gösteriniz

② $h \in L^\infty[0,1]$ olsun.

a) Eğer $f \in L^2[0,1]$ ise $fh \in L^2[0,1]$ old. gösterin

b) $T: L^2[0,1] \to L^2[0,1]$, $T(f) = hf$ lineer dönüşümünün sürekli old. gösterin.

③ H bir kompleks Hilbert uzayı ve $y \in H$ olsun. $f: H \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = (x, y)$ lineer dönüşümünün sürekli olduğunu gösteriniz

④ a) $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \in \ell^2 \Rightarrow (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4 \ldots) \in \ell^2$
$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$

b) $T: \ell^2 \to \ell^2$, $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4 \ldots)$
lin. dön. sürekli old. göst.

2.2 Sınırlı Lineer Operatörün Normu

X, Y NLU için tüm $T: X \to Y$ lineer dönüşümlerin kümesi $\mathcal{L}(X, Y)$ ile ve tüm sınırlı $T: X \to Y$ lin. dön. kümesini $B(X, Y)$ ile gösteriyoruz.

$\mathcal{L}(X, Y)$ bir vektör olup $B(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ bir alt uzaydır.

Lemma 2.15: X ve Y NLU olsun.
$\|\cdot\| : B(X,Y) \to \mathbb{R}$, $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$
şeklinde tanımlı fonksiyonu $B(X,Y)$ üzerinde bir normdur.

İspat: $S, T \in B(X,Y)$ ve $\lambda \in \mathbb{F}$ olsun.

i) $\|T\| \geq 0$ ($\forall T \in B(X,Y)$ için)

ii) $\|T\| = 0 \Leftrightarrow \|Tx\| = 0$ ($\forall x \in X$ için)
$\Leftrightarrow Tx = 0$ ($\forall x \in X$ için)
$\Leftrightarrow$ T bir "0" lineer dönüşümdür

iii) $\|T(x)\| \leq \|T\|\,\|x\|$ (tüm $x \in X$) $\Rightarrow \|(\lambda T)(x)\| \leq |\lambda|\,\|T\|\,\|x\|$
Böylece $\|\lambda T\| \leq |\lambda|\,\|T\|$ olur. (Lemma 2.14 (b))

$\lambda = 0$ ise eşitlik sağlanır.
$\lambda \neq 0$ ise $\|T\| = \|\lambda^{-1}\lambda T\| \leq |\lambda^{-1}|\,\|\lambda T\|$
$\leq |\lambda^{-1}|\,|\lambda|\,\|T\|$
$= \|T\|$

Bu nedenle $\|T\| = |\lambda^{-1}|\,\|\lambda T\|$ ya da $\|\lambda T\| = |\lambda| \cdot \|T\|$ yazılır.

$\|(\lambda T)(x)\| \leq |\lambda|\,\|T\|\,\|x\|$ $\quad |ab| = |a| \cdot |b|$

iv) $\|(S+T)(x)\| \leq \|S(x)\| + \|T(x)\|$
$\leq \|S\|\,\|x\| + \|T\|\,\|x\|$
$= (\|S\| + \|T\|)\,\|x\|$

yada

$\|S+T\| \leq \|S\| + \|T\|$

Tanım 2.16: X ve Y NLU ve $T \in B(X,Y)$ olsun.
T nin normu $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$
olarak tanımlanır.

Tanım 2.17: $T: \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$, $T(x) = Ax$ sınırlı, lineer dönüşümünün A matris normu $\|A\| = \|T\|$ ile tanımlanır.

Örnek 2.18: $T: C_{\mathbb{F}}[0,1] \longrightarrow \mathbb{F}$, $T(f) = f(0)$ sınırlı lineer operatörü için $\|T\| = 1$ old. gösterin.

Çözüm: Örnek 2.2 den tüm $f \in C_{\mathbb{F}}[0,1]$ için $|T(f)| \leq \|f\|$ olduğunu biliyoruz.

Böylece

$(*)$ $\|T\| = \inf\{k : \|T(x)\| \leq k\|x\| \quad \forall x \in X\} \leq 1$

olur. Diğer yandan tüm $x \in X$ için $g: [0,1] \to \mathbb{C}$ $g(x) = 1$ şeklinde tanımlanırsa $\|g\| = \sup\{|g(x)| : x \in [0,1]\}$ olup $g \in C_{\mathbb{C}}[0,1]$ olur. Ayrıca $|T(g)| = |g(0)| = 1$

Böylece

$(**)$ $1 = |T(g)| \leq \|T\| \, \|g\| = \|T\|$ olur.

$(*)$ ve $(**)$ den $\|T\| = 1$ bulunur.

Teorem 2.19: X, NLU ve W, X in yoğun bir alt uzayı olsun. Y bir Banach uzayı ve $S \in B(W, Y)$ olsun.

> Banach uzayı: Tam normlu uzaydır, Y deki bir Cauchy dizisi yine Y nın bir noktasına yakınsak ise Y ye tam uzay denir.

(a) $x \in X$ ve $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ $\lim x_n = \lim y_n = x$ olacak şekilde W uzayında diziler ise o zaman $\{S(x_n)\}$ ve $\{S(y_n)\}$ dizileri de yakınsak olup $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(y_n)$ dir.

b) Tüm $x \in W$ için $Tx = Sx$ ve $\|T\| = \|S\|$ olacak şekilde $T \in B(X, Y)$ vardır.

İspat: a) $\{x_n\}$ yakınsak olduğundan bir Cauchy dizisidir. Bu nedenle

$$\|S(x_n) - S(x_m)\| = \|S(x_n - x_m)\| \leq \|S\| \, \|x_n - x_m\|$$

olduğundan $\{S(x_n)\}$ de bir Cauchy dizisidir. Y bir Banach uzayı old. bu dizi yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$$

$$\|S(x_n) - S(y_n)\| = \|S(x_n - y_n)\| \leq \|S\| \, \|x_n - y_n\|$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} (S(x_n) - S(y_n)) = 0$$ olur. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} S(x_n) = \lim_{n\to\infty} S(y_n)$$ bulunur.

Tanım 2.20: X ve Y NLU ve $T \in L(X,Y)$ olsun. Eğer tüm $x \in X$ için $\|T(x)\| = \|x\|$ ise T ye bir "izometri" denir.

Örnek 2.21: X bir NLU ve I da X üzerindeki birim lineer dönüşüm olsun. I açıkça X üzerinde bir izometridir.

$$x \in X \Rightarrow I(x) = x \Rightarrow \|I(x)\| = \|x\|.$$

Örnek 2.22: a) $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \in \ell^2$

$y = (0, x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$

b) $S: \ell^2 \to \ell^2$, $S(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ lineer dönüşümü bir izometridir.

Çözüm: $x \in \ell^2$ old. dan

$$x \in \ell^2 \Rightarrow \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{2}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots < \infty$$

ve dolayısıyla

$$|0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots < \infty$$

olup $y \in \ell^2$ dir.

b) $$\|S(x)\|^2 = |0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots$$
$$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots$$
$$= \|x\|^2$$

$\|S(x)\| = \|x\|$, S bir izometridir.

<u>Lemma 2.23:</u> X ve Y normlu lineer uzaylar ve $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ olsun. T bir izometri ise T sınırlıdır ve $\|T\| = 1$ dir. (ödev)

<u>Açıklama:</u> Bu teoremin tersi genelde doğru değildir. $\|T\| = 1$ olmasına rağmen tüm $h \in C[0,1]$ için $\|T(h)\| = \|h\|$ olduğunu söyleyemeyiz. (Örnek 2.18 e bakınız)
Örneğin, $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{F}$, $h(x) = x$, $x \in [0,1]$ iken $\|h\| = 1$ ancak $\|T(h)\| = 0$ dır.

<u>Tanım:</u> X, Y NLU ve $T : X \to Y$ örten bir izometri ise T'ye izometrik izomorfizm ve X ve Y ye de izometrik olarak izomorfik uzaylar denir.

<u>Teorem 2.25:</u> H bir sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayı olsun. $\{e_n\}$, H de bir ortonormal taban olsun.

Hilbert uzayı: Tam iç çarpım uzayına hilbert uzayı denir.

İç çarpım uzayı: H bir vektör uzayı ve $x, y, z \in H$ olsun.

HATIRLATMA

- $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
- $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$
- $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle \quad (\langle x, \beta y\rangle = \beta \langle x, y\rangle)$
- $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

$\langle \cdot, \cdot\rangle$ iç çarpımı ile H ye bir iç çarpım uzayı denir.

$$\{x_n\}, \{y_n\} \in \ell^2 \qquad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

$\langle x, y\rangle = 0 \quad , x \perp y \Rightarrow$ ortogonal

$\langle x, y\rangle = 0 \quad , \|x\| = 1 , \|y\| = 1 \Rightarrow$ ortonormal

$$\left(\begin{array}{l} \langle e_i, e_j\rangle = 0 \qquad i \neq j \\ \|e_i\| = 1 \qquad i = 1, 2, \dots \\ x \in H \Rightarrow x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots \end{array}\right.$$

Bu durumda tüm $n \in \mathbb{N}$ için $T(e_n) = \tilde{e_n}$ olacak şekilde $T: H \to \ell^2_{IF}$ örten izometrisi vardır.

İspat: $x \in H$ olsun. Bu durumda $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$ yazılabilir.

Ayrıca, eğer $\alpha_n = \langle x, e_n\rangle$ ise $\{\alpha_n\} \in \ell^2_{IF}$ dir. Böylece

$T: H \to \ell^2_{IF}$, $T(x) = \{\alpha_n\}$ lineer dönüşümü tanımlanabilir.

Tüm $x \in H$ için

$$\|T(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2$$

olur. O halde T bir izometridir.

27 Şubat

2.3 $B(X,Y)$ Uzayı ve Dual Uzaylar

$B(X,Y)$, X ve Y NLU o.ü X ten Y ye sınırlı tüm lineer operatörlerin uzayıdır.

Teorem 2.27: X bir NLU ve Y bir Banach uzayı ise o zaman $B(X,Y)$ uzayı da bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.28: X bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde NLU olsun. Bu durumda, $B(X,\mathbb{F})$ uzayına X uzayının dual uzayı denir. ve X' ile gösterilir.

Sonuç 2.29: X bir NLU ise X' bir Banach uzayıdır.

İspat: $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ya da $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ seçildiğinde her bir durumda bu uzaylar normlu uzaylar olup aynı zamanda tamdır. Yani $\mathbb{F}$ bir Banach uzayıdır. O halde bir önceki teorem gereği $X' = B(X,\mathbb{F})$ uzayı da Banach uzayı olur.

Örnek 2.30: H, $\mathbb{F}$ cismi ile bir Hilbert uzayı ve $y \in H$ olsun. Eğer $f : H \to \mathbb{F}$ fonkunu $f(x) = (x,y)$ $\left(\begin{array}{c} (x,y) \\ \langle x,y \rangle \end{array} \right)$ olarak tanımlanırsa $f \in H'$ olur.

Teorem 2.31: (Riesz – Fréchet Teoremi) Eğer H bir Hilbert uzayı ve $f \in H'$ ise o zaman tüm $x \in H$ için $f(x) = (x,y)$ olacak şekilde tek bir $y \in H$ vardır. Ayrıca $\|f\| = \|y\|$ dır.

İspat: (a) (Varlık kısmı)

Eğer tüm $x \in H$ için $f(x)=0$ ise $y=0$ seçimi uygun olacaktır. Aksi takdirde $\ker f = \{x \in H : f(x)=0\}$, H nin kapalı öz-alt uzayıdır.
Ayrıca $(\ker f)^{\perp} \neq 0$ dır.
Bu nedenle $f(z)=1$ o.ş. bir $z \in (\ker f)^{\perp}$
özellikle $z \neq 0$ için $y = \dfrac{z}{\|z\|^2}$ tanımlanabilir.

f lineer olduğundan
$f(x - f(x)z) = f(x) - f(x) \cdot f(z) = 0$
olur ve böylece $x - f(x)z \in \ker f$ bulunur.
Bu arada, $z \in (\ker f)^{\perp}$ olup böylece
$(x - f(x)z, z) = 0$ bulunur.
Buradan
$$(x - f(x)z, z) = (x,z) - f(x)(z,z)$$
$$= (x,z) - f(x)\|z\|^2 = 0 \quad \text{ya da}$$
$$(x,z) = f(x) \cdot \|z\|^2 \quad \text{alır.}$$

$f(x) = \left(x, \dfrac{z}{\|z\|^2}\right) = (x,y)$ olarak yazılması demektir.

Eğer $\|x\| \leq 1$ ise Cauchy Schwartz eşitsizliğinden;

$|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \leq \|y\|$
Yani $\|f\| \underset{*}{\leq} \|y\|$ bulunur.

Diğer yandan eğer $x = \dfrac{y}{\|y\|}$ ise $\|x\| = 1$ ve böylece
$$\|f\| \geq |f(x)| = \frac{|f(y)|}{\|y\|} = \frac{\langle y, y\rangle}{\|y\|} = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\|$$

$\|f\| \underset{**}{\geq} \|y\|$.

$(*)$ ve $(**)$ den $\|f\| = \|y\|$ bulunur.

(b) Teklik

Eğer y ve w vektörleri her $x \in H$ için $f(x) = (x,y) = (x,w)$ o.ş. varsa bu durumda tüm $x \in X$ için $(x, y-w) = 0$ olur.
Bu da $y - w = 0$ ya da $y = w$ olması demektir.

Teorem 2.32: (a) Eğer $c=\{c_n\}\in \ell^\infty$ ve $\{x_n\}\in \ell^1$ ise o takdirde $\{c_n x_n\}\in \ell^1$ dir. Eğer $f_c:\ell^1\to \mathbb{F}$, $f_c(\{x_n\})=\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ olarak tanımlanırsa o zaman $f_c\in(\ell^1)'$ olup $\|f_c\|\leq \|c\|_\infty$ olur.

(b) Eğer $f\in(\ell^1)'$ ise o takdirde $f=f_c$ ve $\|c\|_\infty \leq \|f\|$ o.ş. $c\in \ell^\infty$ vardır.

(c) $(\ell^1)'$ uzayı ℓ^∞ uzayına izometrik olarak izomorfiktir.

Lemma 2.33: Eğer X,Y ve Z NLU ve $T\in B(X,Y)$ ve $S\in B(Y,Z)$ ise $S\circ T\in B(X,Z)$ olup
$\|S\circ T\|\leq \|S\|.\|T\|$ dir.

İspat: $S\circ T$ kolayca lineer olup.

$\|(S\circ T)(x)\|=\|S(T(x))\|\leq \|S\|\,\|T(x)\|\leq \|S\|.\|T\|.\|x\|$.
eşitsizliğinden $S\circ T\in B(X,Z)$ ve $\|S\circ T\|\leq\|S\|.\|T\|$ elde edilir.

Tanım 2.34: X,Y ve Z NLU ve $T\in B(X,Y)$ ve $S\in B(Y,Z)$ olsun. S ve T op.nin bileşkesi olan $S\circ T$ operatörü ST ile gösterilir ve bu operatörlerin çarpımı olarak tanımlanır.

$X=Y=Z \Rightarrow$ TS ve ST her ikisi de tanımlıdır.
Genelde $TS\neq ST$
X NLU ise $B(X,X)=B(X)$: X den X e tüm sınırlı lin. op. in uzayı.

Lemma 2.35: X bir NLU olsun.
(a) $B(X)$, birimsel bir cebirdir ve böylece birimsel bir halkadır.

(b) Eğer $\{T_n\}$ ve $\{S_n\}$, $B(X)$ de $\lim_{n\to\infty} T_n=T$ ve $\lim_{n\to\infty} S_n=S$ o.ş. diziler ise o zaman
$\lim_{n\to\infty} S_n T_n = ST$ dir.

İspat: (a) Açıktır.

(b) $\{T_n\}$ yakınsak old. dan sınırlıdır. Böylece tüm $n \in \mathbb{N}$ için $\|T_n\| \leq K$ o.ş. $K>0$ vardır.

$\varepsilon > 0$ alalım.

$n \geq N_1 \Rightarrow \|S_n - S\| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$ o.ş. bir $N_1 \in \mathbb{N}$ ve

$n \geq N_2 \Rightarrow \|T_n - T\| < \dfrac{\varepsilon}{2(\|S\|+1)}$ o.ş. bir $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$\|S_nT_n - ST\| \leq \|S_nT_n - ST_n\| + \|ST_n - ST\| \leq K\|S_n - S\| + \|S\| \cdot \|T_n - T\|$$

olup tüm $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ için

$\|S_nT_n - ST\| \leq K\|S_n - S\| + \|S\|\,\|T_n - T\| < \varepsilon$ bulunur.

Böylece $\lim\limits_{n\to\infty} S_nT_n = ST$ elde edilir.

Notasyon:

X NLU ve $T \in B(X)$ olsun.

(a) $TT = T^2$

$TTT = T^3$

$\cdots$

$\underbrace{TT\ldots T}_{n \text{ tane}} = T^n$

b) $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ ve

$P: \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ ise

$P(T) = a_0 I + a_1T + \cdots + a_nT^n$

↳ birim operatör

Lemma 2.36: X, NLU ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer p ve q birer polinom ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ise o zaman

(a) $(\lambda p + \mu q)(T) = \lambda p(T) + \mu q(T)$

(b) $(pq)(T) = p(T) \cdot q(T)$

Alıştırma I Çözümleri

① $T: C_{\mathbb{R}}[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$

lineer dönüşümü süreklidir.

$$|T(f)| = \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \int_0^1 \|f\|\,dx = \|f\|$$

$|T(f)| \leq \|f\|$ $\Rightarrow$ T sınırlıdır, dolayısıyla süreklidir.

$\forall x \in X$ için

$$|f(x)| \leq \sup\{|f(y)| : y \in [0,1]\} = \|f\|$$

② ⓐ $h \in L^\infty[0,1]$ ve $f \in L^2[0,1] \Rightarrow fh \in L^2[0,1]$

hemen hemen her yerde (almost every where) a.e

$|g(x)| \leq \|g\|$ olup

$|f(x)\,g(x)|^2 \leq |f(x)|^2 \|g\|_\infty^2$ a.e

$\int_X |fg|^2\,d\mu \leq \|g\|_\infty^2 \int_X |f|^2\,d\mu < \infty$ $(f \in L^2)$ olur.

Böylece $fg \in L^2$ olur.

Ayrıca $\|fg\|_2^2 = \int_X |fg|^2\,d\mu \leq \|g\|_\infty^2 \int_X |f|^2\,d\mu$

$$= \|g\|_\infty^2 \, \|f\|_2^2$$

(b) $T: L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$, $T(f) = hf$, $h \in L^\infty[0,1]$

$\|T(f)\|_2^2 = \|hf\|_2^2 \leq \|h\|_\infty^2 \, \|f\|_2^2$

$f \in L^2$
$\|f\|_2$

$\Rightarrow \|T(f)\|_2 \leq \|h\|_\infty \|f\|_2$

$\Rightarrow$ T süreklidir.

③ H kompleks Hilbert uzayı ve $y \in H$ ise
$f: H \to \mathbb{C}$, $f(x) = (x,y)$ lin. dön. süreklidir.

Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden $\forall x \in H$ için

$$|f(x)|^2 = |(x,y)|^2 \le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

$\Rightarrow |f(x)| \le \|y\| \cdot \|x\|$

$\Rightarrow f$ süreklidir.

$\ell^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$

$\Rightarrow x = \{x_n\} \in \ell^2$

$\{x_1, x_2, \dots\}$

④ (a) $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2 \Rightarrow (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots) \in \ell^2$

$$\|(0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)\|^2 = 16|x_1|^2 + |x_2|^2 + 16|x_3|^2 + x_4^2 + \dots$$

$$\le 16(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 + \dots)$$

$$= 16 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

$$= 16\|x\|^2 < \infty$$

$\|y\|^2 < \infty$ yani $y \in \ell^2$ bulunur.

(b) $T: \ell^2 \to \ell^2$, $T(x) = y$ lin. dönüşümü süreklidir

$$\|T(x)\|_2^2 = \|y\|_2^2 = \|(0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)\|_2^2 \le 16\|x\|^2$$

$\Rightarrow \|Tx\|_2 \le 4\|x\| \Rightarrow T$ süreklidir.

$\Rightarrow \|T(f)\|_2 \le k\|f\|_2$

$\|T\| \le k$

Alıştırmalar 2

① $T: C_{\mathbb{R}}[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(f) = \int_0^1 f(x)dx$ olsun.

(sınırlı lin. dön)

a) $\|T\| \leq 1$ old. göster.

b) Eğer $g \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$, $\forall x \in [0,1]$ için $g(x)=1$ ise $|T(g)|$ ve böylece $\|T\|$ bulunuz.

② $h \in L^{\infty}[0,1]$ ve $T: L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$, $T(f) = hf$ olsun.

$$\|T\| \leq \|h\|_{\infty}$$

③ $T: \ell^2 \longrightarrow \ell^2$, $Tx=y$ $\quad x=(x_1, x_2, x_3, \ldots)$
$\quad y=(0, 4x_1, x_2, \ldots)$

Sınırlı lin. dön. ün $\|T\|$ normunu bul.

④ Lemma 2.23 ü ispatlayın.

⑤ H bir hilbert uzay ve $y, z \in H$ olsun. $T(x) = (x, y)z$ lin. dönüşümün sınırlı old ve $\|T\| \leq \|y\| \cdot \|z\|$ old. göster.

5 Mart

2.4 Ters Operatörler

$$Ax=y \Leftrightarrow x=A^{-1}\cdot y$$

Tanım 2.37: X bir normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer $TS=ST=I$ o.s. bir $S \in B(X)$ operatörü varsa T operatörüne tersinir operatör denir.

Bir $T \in B(X)$ operatörünün bir $S \in B(X)$ tersi varsa bu ters operatör tektir ve o $T^{-1}=S$ şeklinde gösterilir.

Lemma 2.38: X NLU ve T_1, T_2, $B(x)$ de iki tersinir operatör olsun. O takdirde,

(a) T_1^{-1} operatörü T_1 tersi ile tersinirdir. (T operatörünün tersi T^{-1} olup T^{-1} operatörünün tersi de T dir)

(b) $T_1 T_2$ de tersinirdir ve $(T_1 T_2)^{-1} = T_2^{-1} \cdot T_1^{-1}$ dir.

İspat: ÖDEV

Örnek 2.39: Bir $h \in C[0,1]$ için $T_h \in B(L^2[0,1])$ operatörü $(T_h g)(t) = h(t) g(t)$ şeklinde tanımlansın. Eğer $f \in C[0,1]$, $f(t) = 1+t$ ise T_f operatörü tersinirdir.

Çözüm: Alıştırma 1 2. sorudan böyle bir $h \in C[0,1]$ için T_h nin sınırlı olduğunu biliyoruz.

$k(t) = \dfrac{1}{1+t}$ seçelim. O zaman $k \in C[0,1]$ ve tüm $t \in [0,1]$ için

$$(T_k T_f g)(t) = (T_k f g)(t) = k(t) f(t) g(t)$$

$$= \frac{1}{1+t} (1+t) \cdot g(t) = g(t)$$

olur. Böylece tüm $g \in L^2[0,1]$ için $(T_k T_f) g = g$ bulunur. O halde $T_k T_f = I$ dir. Benzer şekilde $T_f T_k = I$. T_f operatörünün tersinir olup $T^{-1}_f = T_k$ dir.

$$\boxed{\begin{gathered} T_h : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1] \\ \int_{L^2[0,1]} |T_h|^2 dx < \infty \end{gathered}}$$

Teorem 2.40: X bir Banach uzayı olsun. Eğer $T \in B(X)$, $\|T\| < 1$ ise $I-T$ operatörü tersinirdir ve

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

İspat: X Banach olduğundan Teo 2.27 den $B(X)$ de Banach'dır.

$\|T\| < 1$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n$ yakınsar.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|$ serisi de yakınsar. Buradan $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ serisi de yakınsar.

$S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ ve $S_k = \sum_{n=0}^{k} T^n$ olsun.

$\{S_k\}$ dizisi $B(X)$ de S'ye yakınsar

$$\|(I-T)S_k - I\| = \|I - T^{k+1} - I\| = \|-T^{k+1}\| \leq \|T\|^{k+1}$$

$\|T\| < 1$ old. dan $\lim_{k \to \infty} (I-T) S_k = I$.

Bu nedenle, lemma 2.35 ten

$(I-T)S = (I-T) \lim_{k \to \infty} S_k = \lim_{k \to \infty} (I-T_k) S_k = I$ bulunur.

Benzer şekilde $S(I-T) = I$ olduğu da gösterilebilir. Böylece $I-T$ operatörü tersinir olup $(I-T)^{-1} = S$.

Örnek 2.41: $A \in \mathbb{C}$ sayısı için $a, b \in \mathbb{R}$ o.ü

$k: [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım.
$k(x,y) = A \sin(x-y)$

Eğer $|A|<1$ ise, bir $f\in C[a,b]$ için
$$g(x)=f(x)+\int_a^b k(x,y)\,g(y)\,dy \quad (*)$$
olacak şekilde bir $g\in C[a,b]$ var olduğunu gösteriniz.

Çözüm: 2.7 (b) de,

$$K: C[a,b]\to C[a,b]\ ,\ (K(g))(s)=\int_a^b k(s,t)\,g(t)\,dt$$

lineer dönüşümünün sınırlı olduğu ve $\|K(y)\|\le |A|\,\|y\|$ olduğu gösterilmişti. Böylece $\|K\|<|A|$ dır.
(*) denkleminden $(I-K)g=f$ yazılabilir.

$I-K$ tersinir olup (Teo 2.40), bu son denklemin $g=(I-K)^{-1}f$ (tek) çözümü vardır.

Sonuç 2.42: X bir Banach uzayı olsun. $B(X)$ in tüm tersinir elemanlarının $\mathcal{A}$ kümesi açıktır.

İspat: $T\in\mathcal{A}$ ve $r=\|T^{-1}\|^{-1}$ olsun.

T^{-1}: ters op.
$\|T^{-1}\|^{-1}=\dfrac{1}{\|T^{-1}\|}$

$\mathcal{A}$'nın açık olduğunu göstermek için $\|T-S\|<r \Rightarrow S\in\mathcal{A}$ old. göstermek yeter.

$\|T-S\|<r$ olsun. O zaman,

$$\|(T-S)T^{-1}\|\le\|T-S\|\,\|T^{-1}\|<\|T^{-1}\|^{-1}.\|T^{-1}\|=1$$

olur. Böylece teo 2.40 gereği $I-(T-S)T^{-1}$ operatörü tersinirdir.

$$\|T\|<1 \Rightarrow I-T \text{ tersinir}$$

$$\|(T-S).T^{-1}\|<1 \Rightarrow I-(T-S).T^{-1} \text{ tersinirdir}$$

Aslında $I-(T-S).T^{-1}=I-(T.T^{-1}-S.T^{-1})$
$$=I-I+S.T^{-1}=S.T^{-1}$$

olup $S.T^{-1}$ op. tersinirdir. Böylece

$S = S.T^{-1}.T$ op'ü tersinirdir. (lemma 2.38)

O halde $S \in \mathcal{A}$ dir.

Teorem 2.43: (Açık Tasvir Teoremi)

X ve Y Banach uzayı ve $T \in B(X,Y)$ olsun. $L = \{T(x) : x \in X$ ve $\|x\| \leq 1\}$ olsun. O takdirde

a) $\{y \in Y : \|y\| \leq r\} \subseteq \overline{L}$ o.ş. $r > 0$ vardır.
↳ L nin kapanısı
(L yi içeren tüm kapalı kümelerin kesişimi)

b) $\{y \in Y : \|y\| \leq \frac{r}{2}\} \subseteq L$

c) Eğer T birebir ise $S \circ T = I_X$ ve $T \circ S = I_Y$ o.ş. $S \in B(X,Y)$ vardır.

$T : X \longrightarrow Y$ sınırlı (sürekli)
V, Y de açık ise $T^{-1}(V)$, X de açıktır.

$S : Y \longrightarrow X$ sınırlı (sürekli)
T^{-1}

$\underset{X}{U}$ açık için $S^{-1}(U) = \underset{Y}{T(U)}$ açıktır.

Sonuç 2.44 (Kapalı Grafik Teoremi)

Eğer X ve Y Banach ve $T : X \longrightarrow Y$ bir lin. dön. ise ve eğer $g(T)$ grafiği kapalı ise o zaman T süreklidir.

İspat: $X \times Y$, Banach Uzayı olup $g(T)$ kapalı grafiği de Banach uzayıdır.

$(\underset{\text{kapalı}}{g(T)} \subseteq \underset{\text{Banach}}{X \times Y} \Rightarrow g(T)$ Banach$)$

$R: g(T) \longrightarrow X$, $R(x, Tx) = x$ olsun.
R açıkça birebir ve örtendir.

$\|R(x,Tx)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x,Tx)\|$
olup R sınırlıdır ve $\|R\| \leq 1$ dir.

$$\|R(x,Tx)\| \leq 1 . \|(x,Tx)\|$$
$$\|R(y)\| \leq k . \|y\|$$

Böylece $S \circ R = I_{g(T)}$ ve $R \circ S = I_X$ o.ş. sınırlı bir $S: X \to g(T)$ lineer dönüşümü vardır. (Teo 2.43 ten)

Özellikle tüm $x \in X$ için $Sx = (x, Tx)$ dir.
$\forall x \in X$ için

$$\|Tx\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x,Tx)\| = \|Sx\| \leq \|S\| . \|x\|$$

olduğundan T sınırlı olur. $(\|T\| \leq \|S\|)$
(Yani sürekli)

Sonuç 2.45: X Banach ve $T \in B(X)$ (X': X üzerine) örten bire-bir ise T tersinirdir.

lemma 2.46: X NLU ve $T \in B(X)$ tersinir ise tüm $x \in X$ için $\|T(x)\| \geq \|T^{-1}\|^{-1} \|x\|$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: Tüm $x \in X$ için $\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq \|T^{-1}\| . \|T(x)\|$ olup buradan,

$$\|x\| . \|T^{-1}\|^{-1} \leq \|T(x)\| \quad \text{ya da}$$
$$\|T(x)\| \geq \|T^{-1}\|^{-1} . \|x\| .$$

Lemma 2.47: X Banach ve $T \in B(X)$, tüm $x \in X$ için $\|T(x)\| \geq \alpha \|x\|$ o.ş. bir $\alpha > 0$ var özelliği ile verilsin. O takdirde T nin $Im(T)$ görüntü kümesi kapalıdır.

Lemma 2.48: X Banach ve $T \in B(X)$ olsun. O takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) T tersinirdir.
(b) $Im(T)$, X de yoğundur ve tüm $x \in X$ için $\|T(x)\| \geq \alpha \|x\|$ o.ş. $\alpha > 0$ vardır.

İspat:

(a) $\Rightarrow$ (b) Lemma 1.12 ve Teo 2.46 nin sonucu olarak elde edilir.

(b) $\Rightarrow$ (a) $Im(T)$, X de yoğun olsun. Bu durumda lemma 2.47 den $Im(T)$ kapalıdır. O halde $Im(T) = X$ olur.

Eğer $x \in Ker(T)$ ise $T(x) = 0$ ve böylece

$$0 = \|T(x)\| \geq \alpha \|x\|$$

yani $x = 0$. O halde $Ker(T) = \{0\}$ ve → T birebir. böylece Sonuç 2.45 ten T tersinir olur.

Alıştırmalar 3

① X NLU ve $P, Q \in B(X)$ olsun.

$T: B(X) \to B(X)$, $T(R) = PRQ$

lin. dönüşümünün sınırlı old. gösterin

Çözüm: $\|T(R)\| = \|PRQ\| \leq \|P\| \, \|RQ\| \leq \|P\| \, \|R\| \, \|Q\|$

$\Rightarrow T$ sınırlı ve $\|T\| \leq \|P\| \, \|Q\|$

(2) $T: \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ sınırlı op.
$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)$
şeklinde olsun.
a) T^2 bul.
b) $\|T^2\|$ bul ve $\|T\|^2$ ile karşılaştır.

a) Çözüm:

$$T^2 = TT(x_1, x_2, x_3, \dots) = T(\underbrace{0}_{y_1}, \underbrace{4x_1}_{y_2}, \underbrace{x_2}_{y_3}, 4x_3, \dots)$$
$$= (0, 4y_1, y_2, 4y_3, \dots)$$
$$= (0, 0, 4x_1, 4x_2, 4x_3, \dots)$$

b)
$$\|T^2(x)\|^2 = \|(0, 0, 4x_1, 4x_2, \dots)\|^2 = 16 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2}_{\|x\|}$$

$\|T^2\|^2 \leq 16 \Rightarrow \|T^2\| \leq 4$ çıkar

$x = (1, 0, 0, \dots) \Rightarrow \|x\| = 1$

$\|T^2\| \geq 4$. $\|T^2\| = 4$

(3) X, Y, Z NLU ve $T: X \longrightarrow Y$ ve $S: Y \longrightarrow Z$ izometriler ise $S \circ T$ da bir izometridir.

Çözüm: $\|(S \circ T)(x)\| = \|S(T(x))\| = \|T(x)\| = \|x\|$

bileşke tanımı — S izometri — T izometri

$\Rightarrow S \circ T$ bir izometridir.

12 Mart

ALIŞTIRMA 2 ÇÖZÜMLERİ

$*\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$

① a) $\|T\| \leq 1$?

$$|T(f)| = \left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 \underbrace{\|f\|}_{\text{sayı}} dx = \|f\|$$

$\Rightarrow |T(f)| \leq 1 . \|f\| \Rightarrow \|T\| \leq 1$ ① elde edilir.

b) $g \in C_R[0,1]$, $g(x) = 1$, $x \in [0,1]$ için

$$|T(g)| = \left|\int_0^1 g(x)dx\right| = \left|\int_0^1 dx\right| = 1$$

$$\|g\| = \sup\{|g(x)| : x \in [0,1]\} = 1$$

$$1 = |T(g)| \leq \|T\| \|g\| = \|T\|$$

$$1 \leq \|T\| \quad ②$$

① ve ② den $\|T\| = 1$ bulunur.

② $h \in L^\infty[0,1]$ ve $T: L^2[0,1] \to L^2[0,1]$, $T(f) = hf$ sınırlı dönüşüm

$\|T\| \leq \|h\|_\infty$

$$\|T(f)\|_2 = \|hf\|_2 \leq \|h\|_\infty \|f\|_2$$

$\|T(f)\|_2 \leq \|f\|_2 \|h\|_\infty$

$$\Rightarrow \|T\|_2 \leq \|h\|_\infty$$

$\rightarrow \|T\|_2 \leq \|h\|_\infty$

③ $T: \ell^2 \to \ell^2$ sınırlı operatörü $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, \ldots)$

$$\|T(x)\|^2 = \|(0, 4x_1, x_2, \ldots)\|^2 = (16|x_1|^2 + |x_2|^2 + 16|x_3|^2 + \ldots)$$

$$\leq (16|x_1|^2 + 16|x_2|^2 + 16|x_3|^2 + \ldots)$$

$$= 16(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots)$$

$$= 16\|x\|^2$$

$\|T(x)\|^2 \leq 16\|x\|^2$

$\|T(x)\| \leq 4\|x\| \rightarrow \|T\| \leq 4$ ①

Alıştırma 4

① Lemma 2.38'i ispatlayınız.

② X lineer uzay üzerinde $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normları verilsin. X bu normlara göre bir Banach uzayı olsun. Ayrıca tüm $x \in X$ için $\|x\|_1 \leq k\|x\|_2$ o.ş. bir $k>0$ sayısı mevcut olsun. Bu durumda $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarının eşdeğer olduklarını yani; $\|x\|_2 \leq r\|x\|_1$ o.ş bir $r>0$ sayısının var olduğunu gösteriniz.

($\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normları denktir $\Leftrightarrow k_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq k_2\|x\|_2$ o.ş. $k_1, k_2 > 0$ vardır.)

Yol Gösterme: $I: X \longrightarrow X$ $(X, \|.\|_2) \rightarrow (X, \|.\|_1)$ birim operatörü alınız.

$\|Ix\|_1 = \|x\|_1$ sınırlıdır.
(Teorem 2.4'ü kullanırsak) I, 1-1 old. tersinirdir.
I'nın tersi kendisi old. tersi de sınırlıdır.

$I^{-1} = I : (X, \|.\|_1) \rightarrow (X, \|.\|_2)$

$\|x\|_2 \leq r\|x\|_1$ o.ş $r>0$ vardır.
Böylece $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normları eşdeğerdir.

③ $c = \{c_n\} \in \ell^\infty$ ve $T_c \in B(\ell^2)$ operatörü $T_c(\{x_n\}) = \{c_n x_n\}$ olarak tanımlansın.

a) $\inf\{|c_n| : n \in \mathbb{N}\} > 0$ ve $d_n = \frac{1}{c_n}$ ise $d = \{d_n\} \in \ell^\infty$ ve $T_c T_d = T_d T_c = I$ old. gösterin.

b) $\lambda \notin \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ ise $T_c - \lambda I$ operatörü tersinirdir.

(4) $c=\{c_n\}\in \ell^{\infty}$ ve $T_c \in B(\ell^2)$ operatörü $T_c(\{x_n\})=\{c_n x_n\}$ olsun. $c_n=\frac{1}{n}$ ise T op. tersinir olamaz.

(5) X Banach uzayı ve $\{T_n\}$, $B(X)$ de $T\in B(X)$ operatörüne yakınsayan tersinir operatörlerin bir dizisi olsun. $\forall n\in \mathbb{N}$ için $\|T_n^{-1}\| < 1$ old. kabul edelim. Bu halde T tersinirdir.