

*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 2^n}$ karakteri?

I. 401 Oran Testi ile:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+3}{(n+1)^2 2^{n+1}}}{\frac{2n+1}{n^2 2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3) \cdot n^2}{(n+1)^2 \cdot (2n+1)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{Oran Testine göre Seri yakınsaktır.}$$

II. 401 Limit Testi ile:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ seçelim. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $|r| = \frac{1}{2} < 1$ Geo. Seri yakınsaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{n^2 2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0 \Rightarrow \text{Limit Testine göre}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yakınsak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 \cdot 2^n}$ de yakınsaktır.

*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ seçelim. $p = \frac{1}{3} < 1$ inaksak seri

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+\ln n) = \infty \Rightarrow \text{Limit Testine göre,}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ inaksak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ de inaksaktır.

*) $\frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \frac{1+4\ln 4}{21} + \dots$ serisinin yakınsaklığını inceleyin.

$\frac{1}{4+5} \quad \frac{1}{9+5} \quad \frac{1}{16+5}$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $n=2 \quad n=3 \quad n=4$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5} = \frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \dots$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi. Harmonik Seridir, ıraksaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+n\ln n}{n^2+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n^2\ln n}{n^2+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{0}{\infty} + \frac{\infty}{\infty}}{\frac{0}{\infty} + \frac{5}{\infty}} = \infty \Rightarrow \text{Limit Tes. göre } \sum \frac{1}{n} \text{ ıraksak olduğundan}$$

$\sum \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$ de ıraksak

*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = ?$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

$a=1 \quad r=\frac{1}{2}$
 $|r|=\frac{1}{2} < 1$
 $\text{Toplam} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

$a=1 \quad r=\frac{1}{6}$
 $|r|=\frac{1}{6} < 1$
 $\text{Toplam} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$

(14) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n} a_n$ ile verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{n}{1+\ln n}} = 0 < 1 \Rightarrow \text{Oran Testinden Seri Yakınsak}$$

(15) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1+\sin n}{n} a_n$ ile verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\sin n}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \text{Oran Testinden Seri Yakınsak}$$

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$f(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ olsun. $f(x)$ $[1, \infty)$ da

- Pozitifdir ($f(x) > 0$)
- Azalandır ($f'(x) < 0$)
- Sürekli (Sürekli noktası yoktur)

Integral Testi Kullanılabilir

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\ln R} \frac{du}{1+u^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Arctan } u \Big|_0^{\ln R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=1 \Rightarrow u=0 \\ x=R \Rightarrow u=\ln R \end{array}$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Arctan}(\ln R) - \text{Arctan}(0)}{1} = \frac{\pi/2 - 0}{1} = \pi/2 \Rightarrow \text{improper integral yakınsak}$$

Integral Testine göre; $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ yakınsak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ serisi yakınsaktır.

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ karakteri?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

Oran Testine göre Seri yakınsaktır.

*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}$ karakteri?

Kök testini düşünelim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3} = 1 \rightarrow \text{Kök Testi Sonuç vermez X}$$

Limit Testini düşünelim:

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ seçelim. $p=3 > 1$ yakınsaktır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0, \infty$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli. $\sum \frac{1}{n^3}$ yakınsak olduğundan $\sum \frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}$ de yakınsaktır.

*) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{3n} \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ karakteri?

Kök testi uygulayalım.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{3n} \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^3 \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^3 \cdot \frac{1}{\frac{(1+\frac{2}{n})^n}{e^2}} = e > 1 \end{aligned}$$

Kök Testine göre seri ıraksaktır.

*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{(n+1)2^n}$ serisinin karakteri?

I. Yol Mukoyese Testi ile:

$\forall n \geq 2$ için $\ln n < n$ dir.

$$\frac{\ln n}{(n+1)2^n} < \frac{n}{(n+1)2^n} < \frac{n}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{(n+1)2^n} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \text{Geo. Seri}$$

$|r| = \frac{1}{2} < 1$ yakınsak.

Yakınsak
o halde Muk.
Testine göre

$\sum \frac{\ln n}{(n+1)2^n}$ serisi de yakınsak

II. Yol Limit Testi ile:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ geo. serisini seçelim. } |r| = \frac{1}{2} < 1 \text{ yakınsak}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{(n+1)2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 \Rightarrow$$

Limit Testine göre
 $\sum \frac{1}{2^n}$ yak. olduğun.

den $\sum \frac{\ln n}{(n+1)2^n}$ de yakınsaktır.

III. Yol Oran Testi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+2)2^{n+1}}}{\frac{\ln n}{(n+1)2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \boxed{\frac{1}{2}} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$$

∞/∞
L'Hopital

Oran testine göre yakınsak

* $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$ karakteri?

$n > 3$ için $n > \ln n$ dir.

$n > \ln n \Rightarrow \ln n > \ln(\ln n) \Rightarrow n > \ln n > \ln(\ln n)$ sağlanır.

$n > \ln(\ln n) \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(\ln n)}$

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksak

ve $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(\ln n)}$ olduğundan Mukayese

testine göre $\sum \frac{1}{\ln(\ln n)}$ ıraksaktır.

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n! n!}{2 \cdot (2n)!}$ serisinin karakteri?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1} (n+1)! (n+1)!}{2 \cdot (2n+2)!} = \frac{5 \cdot (n+1) \cdot (n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{5^n n! n!}{2 \cdot (2n)!}$$

Oran Testine göre
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{5}{4} > 1$ Seri ıraksak

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ karakteri?

I. Yol Kök Testi:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^3} = \frac{2}{1^3} = 2 > 1$ Seri kök testine göre ıraksaktır.

$(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1)$

II. Yol Oran Testi:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} \cdot 2 = 2 < 2 > 1 \Rightarrow$ Seri oran testine göre ıraksaktır.

* a) $\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \dots$ } serilerinin karakterini belirleyiniz.

b) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \dots$

a) $\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ Limit testi için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ iraksak serisini seçelim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n}{(n+1)^2} = 2 \neq 0, \infty$$

iki seri aynı karakterli.

$\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ de iraksak

b) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ Limit testi için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (yakınsak $(r = \frac{1}{2})$) geometrik serisini seçelim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n - 1}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n(1 - \frac{1}{2^n})} = 1 \neq 0, \infty$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli.

$\sum \frac{1}{2^n - 1}$ de yakınsak

* $\frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \frac{1+4\ln 4}{21} + \dots$ serisinin yakınsaklığını inceleyin.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5} = \frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \dots$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ seçelim. Harmonik Seridir, iraksaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+n\ln n}{n^2+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n^2\ln n}{n^2+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{0}{\frac{1}{n}} + \frac{\infty}{\frac{1}{n}}}{\frac{0}{\frac{1}{n}} + \frac{5}{n^2}} = \infty \Rightarrow \text{Limit Tes. göre } \sum \frac{1}{n} \text{ iraksak}$$

olduğundan

$\sum \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$ de iraksak

b) Aşağıdaki serilerin yakınsak veya ıraksak olup olmadığını belirleyiniz. (9+9 puan)

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-1}$
 $= e^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{e} < 1$ old. YAK.
 (Kök Testine göre)

ii) $b_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksak

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$

Limit karşılaştırma testinden
 (her iki seri aynı karakterde)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksaktır.

Başarılar dilerim.

15

*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ karakteri?

$[2, \infty)$ da $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$

sürekli
 pozitif
 azalan
 ✓ $\left\{ \begin{array}{l} \text{int.} \\ \text{Testi} \\ \text{uygulan-} \\ \text{bilir.} \end{array} \right.$

$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{du}{u^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{u} \right]_{\ln 2}^{\ln R}$

$\ln x = u$
 $\frac{dx}{x} = du$

$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\ln R} + \frac{1}{\ln 2} \right] = \frac{1}{\ln 2}$
 0 yakınsak

*) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\frac{1}{n})}$ karakteri?

integral testine göre dolayısıyla

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$
 yakınsak.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak serisini seçelim.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-(1+\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0, \infty$

Limit Testine göre
 iki seri aynı karakterli.
 $\sum n^{-(1+\frac{1}{n})}$ ıraksak

13

⑥ $1 + \frac{1}{10} + \frac{1.2}{10^2} + \frac{1.2.3}{10^3} + \dots$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{10^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty > 1$$

olduğundan Oran testine göre seri ıraksaktır.

* $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

Oran testine göre seri yakınsak

⑦ Genel terimi $a_n = \frac{1}{2^n} \cdot \tan \frac{\pi}{2^n}$ olan serinin karakterini inceleyiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} \cdot \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n} \cdot \tan \frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\tan \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}}{\frac{\tan \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} < 1$$

Seri Yakınsak (Oran Testine göre)

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2 \sqrt{n+1}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad \text{serisini seçelim. } p = \frac{7}{6} > 1 \text{ seri yakınsak.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2 \sqrt{n+1}} \cdot n^{7/6} = 1 \neq 0, \infty$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2 \sqrt{n+1}} \text{ yakınsak.}$$

SORU 1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt[n]{n}}$ seçelim, $p = \frac{1}{3} < 1$ (p-serisi) olduğunda seçilen seri iraksak. Limit ~~mukayese~~ testine göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}}{\frac{1}{3\sqrt[n]{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/3} + n^{5/3}}{2 + n^{5/3}}$$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{5/3} (\frac{1}{n^{4/3}} + 1)}{n^{5/3} (\frac{2}{n^{5/3}} + 1)} = 1$ olduğundan her iki seri aynı karakterde yani $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$ serisi de iraksak.

*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{1+n^2}$ karakteri?

$\frac{1+\cos n}{1+n^2} \leq \frac{2}{1+n^2} < \frac{2}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{1+n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \Rightarrow$ Mukayese Testine göre $p=2>1$ yak. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{1+n^2}$ de yak.

*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(e^n+n)^n}$ karakteri?

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(e^n+n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^2}{\frac{e^n+n}{\infty}} = 0 < 1 \Rightarrow$ Kök Testine göre seri yakınsak

*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}+1}$ karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($p=2>1$ yak.) serisini seçelim.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{e^{n^2}+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{e^{n^2}+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{2ne^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4ne^{n^2}} = 0 \Rightarrow$

$\downarrow \infty/\infty$ L'Hopital $\downarrow \infty/\infty$ L'Hopital

Limit Testine göre $\sum \frac{1}{n^2}$ yak. olduğundan $\sum \frac{n}{e^{n^2}+1}$ de yak.

*) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n^2}$ serisinin yakınsak olduğunu integral testi ile gösteriniz.

$$f(x) = \frac{x}{e^{x^2}} \quad [1, \infty) \rightarrow f(x), [1, \infty) \text{ da pozitifdir}$$

$$\rightarrow f(x), [1, \infty) \text{ da sürekli.$$

$$\forall f'(x) = \frac{e^{x^2} - 2x^2 e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \frac{1 - 2x^2}{e^{x^2}} < 0 \Rightarrow f(x) [1, \infty) \text{ da azalandır.}$$

Integral testi uygulanabilir.

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{x}{e^{x^2}} dx$$

$$x^2 = u \quad 2x dx = du$$

$$x=1 \Rightarrow u=1$$

$$x=R \Rightarrow u=R^2$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^{R^2} \frac{1}{2} e^{-u} du = \lim_{R \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{2} e^{-u} \right|_1^{R^2}$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{-\frac{1}{2} e^{-R^2}}_0 + \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2e} \rightarrow \text{int. yakınsak}$$

$\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}} dx$ integrali yakınsak olduğundan, integral testi.

ne göre $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n^2}$ serisi de yakınsaktır.

*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!+1}$ serisinin karakteri? 1. vize 4. uygulama

I. 401
 $\frac{n!}{(n+2)!+1} < \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+2)(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n^2+3n+2} \quad (*)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ serisinin karakterini incelemek için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

seçelim. ($p=2>1$ yakınsak seridir)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2+3n+2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow$ Limit testine göre iki seri aynı karakterlidir. O halde $\sum \frac{1}{n^2+3n+2}$ de yakınsaktır.

(*)'a göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ dir.
↓
Yakınsak

Mukayese Testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!+1}$ serisi yakınsaktır.

Not: Oran Testini kullansaydık:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{(n+3)!+1}}{\frac{n!}{(n+2)!+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot (n+2)! \cdot (1 + \frac{1}{(n+2)!})}{(n+3)! \cdot (1 + \frac{1}{(n+3)!})} = 1$

II. 401 Limit Testi ile:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($p=2>1$) yakınsak seçersek:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{(n+2)!+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \cancel{n!}}{(n+2)! \cdot (1 + \frac{1}{(n+2)!})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} = 1 \neq 0, \infty$

Test Sonuç vermezdi!!!

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli $\sum \frac{n!}{(n+2)!+1}$ de yakınsak