

\*)  $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - y$  olsun. Aşağıdaki şartlarda  $\vec{u}$  yönlerini ve  $D_{\vec{u}}f|_{(1,-1)}$  değerlerini bulunuz:

a)  $D_{\vec{u}}f|_{(1,-1)}$  en büyük b)  $D_{\vec{u}}f|_{(1,-1)}$  en küçük

c)  $D_{\vec{u}}f|_{(1,-1)} = 0$

$$\nabla f = \langle 2x - y, -x + 2y - 1 \rangle \quad \nabla f|_{(1,-1)} = \langle 3, -4 \rangle$$

a)  $D_{\vec{u}}f|_{(1,-1)}$  en büyük  $\nabla f|_{(1,-1)} = \langle 3, -4 \rangle$  yönünde olur.

$$\vec{u} = \left\langle \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right\rangle \text{ dir. } D_{\vec{u}}f|_{(1,-1)} = |\nabla f| = 5 \text{ tir.}$$

b)  $D_{\vec{u}}f|_{(1,-1)}$  en küçük  $\nabla f|_{(1,-1)} = \langle 3, -4 \rangle$  in ters yönünde olur.

$$\vec{u} = \left\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle \text{ dir. } D_{\vec{u}}f|_{(1,-1)} = -|\nabla f| = -5 \text{ tir.}$$

c)  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$  olsun.  $\vec{u}$  birim vektör olduğundan  $a^2 + b^2 = 1$

$$(D_{\vec{u}}f)|_{(1,-1)} = 0 \Rightarrow \langle a, b \rangle \cdot \langle 3, -4 \rangle = 0 \Rightarrow 3a - 4b = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{3}b$$

$$\frac{16}{9}b^2 + b^2 = 1$$

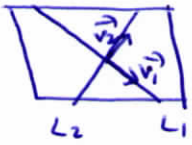
$$\frac{25b^2}{9} = 1 \quad b = \pm \frac{3}{5}$$

$$a = \pm \frac{4}{5}$$

$\vec{u}$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= -\frac{3}{5}\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{i} \\ \vec{u}_2 &= \frac{3}{5}\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{i} \end{aligned}$$

- \*  $L_1: x = -1+t, y = 2+t, z = 1-t$   
 $L_2: x = 1-4s, y = 1+2s, z = 2-2s$  } doğrularının belirlediği  
 düzlem bulunuz.



$\vec{v}_1 = \langle 1, 1, -1 \rangle$   
 $\vec{v}_2 = \langle -4, 2, -2 \rangle$  } Düzlemin normali  $\vec{v}_1$  ve  $\vec{v}_2$   
 ye diktir.

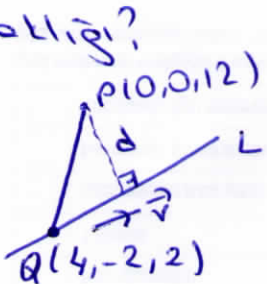
$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \langle 0, 6, 6 \rangle$$

A    B    C

$(-1, 2, 1) \rightarrow L_1$  üzerinde, dolayısıyla düzlem  
 $x_0 y_0 z_0$  üzerinde bir noktadır.

$$6(y-2) + 6(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{6y + 6z = 18}$$

- \*  $P(0, 0, 12)$  noktasının,  $L: x = 4t, y = -2t, z = 2t$  doğrusuna  
 uzaklığı?



$t=1 \Rightarrow x=4, y=-2, z=2 \rightarrow Q(4, -2, 2)$

$\vec{QP} = \langle -4, 2, 10 \rangle$

$\vec{v} = \langle 4, -2, 2 \rangle$

$d = |\vec{QP}| \cdot \sin \theta = \frac{|\vec{QP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

$d = \frac{|\vec{QP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

$\vec{QP} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 10 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \langle 24, 48, 0 \rangle$

$|\vec{QP} \times \vec{v}| = 24\sqrt{5}$

$|\vec{v}| = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24}$

$d = \frac{24\sqrt{5}}{\sqrt{24}} = \sqrt{120} = \underline{\underline{2\sqrt{30}}}$

\*  $f(x,y) = 2xy - 3y^2$  fonksiyonunun  $P_0(5,5)$  noktasındaki

$\vec{v} = \langle 4, 3 \rangle$  vektörü yönündeki türevini bulunuz.

$$\nabla f = 2y\vec{i} + (2x - 6y)\vec{j} \quad \nabla f|_{P_0} = 10\vec{i} - 20\vec{j}$$

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} (D_{\vec{v}}f)_{P_0} &= \nabla f|_{P_0} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \langle 10, -20 \rangle \cdot \left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle \\ &= 8 - 12 \\ &= \underline{\underline{-4}} \end{aligned}$$

\*  $f(x,y)$  fonksiyonunun  $P_0(1,2)$  de  $\vec{i} + \vec{j}$  yönünde türevi  $2\sqrt{2}$ ;  $-2\vec{j}$  yönünde türevi  $-3$  ise  $f$  in  $-\vec{i} - 2\vec{j}$  yönündeki türevi nedir?

$$\nabla f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} \rightarrow \nabla f|_{P_0} = f_x|_{P_0}\vec{i} + f_y|_{P_0}\vec{j} \quad f_x|_{P_0} = a \quad f_y|_{P_0} = b \text{ olsun.}$$

$$f \text{ in } \frac{\vec{i} + \vec{j}}{|\vec{i} + \vec{j}|} \text{ yönünde türevi } 2\sqrt{2} \text{ ise: } (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} \right) = 2\sqrt{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a + b = 4}$$

$$f \text{ in } \frac{-2\vec{j}}{|\vec{-2j}|} \text{ yönünde türevi } -3 \text{ ise: } (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot \left( -\vec{j} \right) = -3$$

$$-b = -3 \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

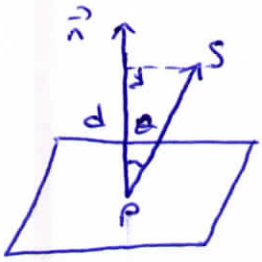
$$\circledast a = 1$$

$$a = f_x|_P = 1 \quad b = f_y|_P = 3 \Rightarrow \boxed{\nabla f|_{P_0} = \vec{i} + 3\vec{j}}$$

$$f \text{ in } \frac{-\vec{i} - 2\vec{j}}{|\vec{-i-2j}|} \text{ yönündeki türevi: } \nabla f|_{P_0} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \langle 1, 3 \rangle \cdot \left\langle -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

$$= \boxed{\underline{\underline{-\frac{7}{\sqrt{5}}}}}$$

⑧  $S(2, -3, 4)$  noktasının  $x+2y+2z=13$  düzlemine uzaklığı?



$$y=z=0 \Rightarrow x=13 \Rightarrow P(13, 0, 0) \text{ düzlemde}$$

$$\vec{n} = \langle 1, 2, 2 \rangle$$

$$d = |\vec{PS}| \cdot \cos \theta = |\vec{PS}| \cdot \frac{\vec{PS} \cdot \vec{n}}{|\vec{PS}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\vec{PS} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$\vec{PS} = \langle -11, -3, 4 \rangle$$

$$\vec{PS} \cdot \vec{n} = -11 - 6 + 8 = -9 \quad |\vec{n}| = 3$$

$$d = \frac{-9}{3} = -3 \Rightarrow d = |-3| = \underline{\underline{3}}$$

⑧  $\vec{u} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$  vektörünün  $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$  vektörüne izdüşümünü bulunuz.

$$\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 6 - 6 - 4 = -4$$

$$|\vec{v}| = 3$$

$$= \frac{-4}{9} \cdot \langle 1, -2, -2 \rangle$$

$$= \left\langle -\frac{4}{9}, +\frac{8}{9}, \frac{8}{9} \right\rangle$$

\*  $f(x,y) = x^2y + e^{xy} \sin y$  fonksiyonunun  $P_0(1,0)$  da en hızlı artan ve en hızlı azalan olduğu yönleri bulunuz.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = (2xy + ye^{xy} \sin y) \vec{i} + (x^2 + xe^{xy} \sin y + e^{xy} \cos y) \vec{j}$$

$$\nabla f|_{(1,0)} = 2\vec{j}$$

En hızlı artarken

olmalı. ( $\vec{u}$ : birim vektör)

$$\vec{u} = \vec{j}$$

En hızlı azalırken  $\vec{u}$  ile  $\nabla f$  ters yönlü olmalı.  $\Rightarrow \vec{u} = -\vec{j}$

\*  $f(x,y,z) = xy + yz + xz$

,  $P(1,-1,2)$ ,  $\vec{u} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow (D_{\vec{u}}f)_P = ?$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$= \langle y+z, x+z, y+x \rangle$$

$$\nabla f|_P = \langle 1, 3, 0 \rangle$$

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left\langle \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{2}{7} \right\rangle$$

$$\rightarrow (D_{\vec{u}}f)_P = \nabla f|_P \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \langle 1, 3, 0 \rangle \cdot \left\langle \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{2}{7} \right\rangle$$

$$= \frac{3}{7} + \frac{18}{7} = \underline{\underline{3}}$$

Soru 2-a)  $y \neq 0$  olmak üzere  $f(x, y, z) = \frac{x}{y} - yz$  ile verilen  $f$  fonksiyonunu gözönüne alalım.  $f$  en hızlı olarak  $P(4, 1, 1)$  de hangi yönlerde değişir ve bu yönlerdeki değişim oranları (hızları) nedir? (13 P)

$$\nabla f = \left\langle \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} - z, -y \right\rangle$$

$$\nabla f|_P = \langle 1, -4, -1 \rangle ; |\nabla f|_P = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Fonksiyon en hızlı olarak  $\nabla f = \vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$  yönünde artar ve en hızlı olarak  $-\nabla f$  yönünde azalır.

Bu yönlerde değişim oranları (hızları) sırasıyla  $|\nabla f| = 3\sqrt{3}$  ve  $-|\nabla f| = -3\sqrt{3}$  dir.

Soru 2-b)  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^4 + y^2}$  ile verilen  $f$  fonksiyonu için -eğer mevcut ise,  $f_x(0, 0)$  ve  $f_y(0, 0)$  değerlerini bulunuz. (14 P)

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^4 + 0} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{1/3} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0+h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{1/3}} \quad \text{40K}$$

- 2-a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n x^n}{\ln n}$  kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının 3 olması için, b sabitinin alacağı değer(ler)i bulunuz. (12 Puan)

Genel terim  $a_n = \frac{b^n \cdot x^n}{\ln n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b^{n+1} x^{n+1}}{\ln(n+1)} \cdot \frac{\ln n}{b^n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left| \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right|}_{1} |b| \cdot |x|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1$$

$$\Rightarrow |b| \cdot |x| < 1$$

$$|x| < \frac{1}{|b|}$$

yakınsaklık yarıçapı 3 olması için  $|b| = \frac{1}{3}$  olmalıdır

$$b = \pm \frac{1}{3} //$$

- 2-b) f fonksiyonu;  $f(x, y) = xy$ ,  $x > 0, y > 0$  ile tanımlanıyor.  $f(x, y) = 1$  seviye eğrisini, t parametresine göre parametrize ediniz. Bu parametrizasyonu kullanarak;  $t = 2$  değerine karşılık gelen noktada, seviye eğrisinin teğet vektörünün,  $\nabla f$  gradyent vektörüne dik olduğunu gösteriniz. (13 Puan)

$$xy = 1, x > 0, y > 0$$

$$x = t \Rightarrow y = \frac{1}{t}, t > 0$$

$$\vec{r}(t) = t \vec{i} + \frac{1}{t} \vec{j}, t > 0$$

Teğet vektör:  $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{i} - \frac{1}{t^2} \vec{j}$

$$t = 2 \text{ için } \frac{d\vec{r}(2)}{dt} = \vec{i} - \frac{1}{4} \vec{j}$$

$$\nabla f|_{t=2} = \frac{1}{2} \vec{i} + 2 \vec{j}$$

$$\nabla f|_{t=2} \perp \frac{d\vec{r}(2)}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\vec{r}(2)}{dt} \cdot \nabla f|_{t=2} = 0$$

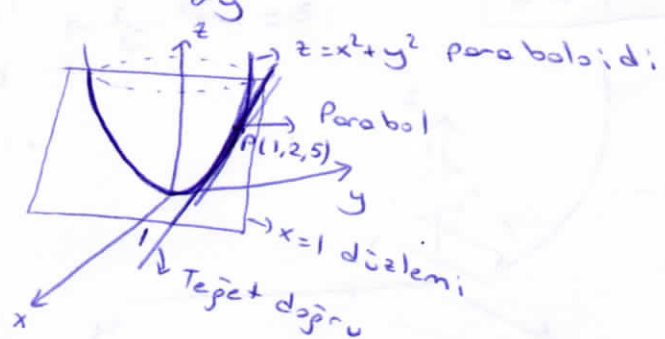
$$-\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 2 = 0 //$$

Öhalde  $\nabla f|_{t=2} \perp \frac{d\vec{r}(2)}{dt}$

\*  $x=1$  düzlemi  $z=x^2+y^2$  paraboloidi ile bir parabolde kesişmektedir.  $(1,2,5)$  noktasında parabolün teğetinin eğimini bulunuz.

Sorulan eğim  $(1,2,5)$  noktasındaki  $\frac{\partial z}{\partial y}$  kısmi türevinin değerine eşittir.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \quad m = \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,2,5)} = \underline{\underline{4}}$$



\*  $\vec{r}(t) = \sin t \vec{i} + (t^2 - \cos t) \vec{j} + e^t \vec{k}$  eğrisinin  $t=0$  daki teğet doğrusunun parametrik denklemleri?

$$\vec{r}(t) = \sin t \vec{i} + (t^2 - \cos t) \vec{j} + e^t \vec{k} \Rightarrow \vec{r}'(t) \text{ Teğet vektör}$$

$$\vec{r}'(t) = \cos t \vec{i} + (2t + \sin t) \vec{j} + e^t \vec{k} \rightarrow \vec{r}'(0) = 1 \vec{i} + 0 \vec{j} + 1 \vec{k} = \langle 1, 0, 1 \rangle \rightarrow t=0 \text{ daki teğet doğrusu ya paralel vektör}$$

$$t=0 \text{ için } \begin{cases} x = \sin t \\ y = t^2 - \cos t \\ z = e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow x_0 \\ y = -1 \rightarrow y_0 \\ z = 1 \rightarrow z_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + at = t \\ y = y_0 + bt = -1 \\ z = z_0 + ct = 1 + t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 1 + t \end{cases} \rightarrow t=0 \text{ daki teğet doğrusu}$$

\*  $\vec{r}(t) = \ln t \vec{i} + \frac{t-1}{t+2} \vec{j} + t \ln t \vec{k}$  eğrisinin  $t=1$  daki teğet doğrusu?

$$\vec{r}'(t) = \frac{1}{t} \vec{i} + \frac{t+2-t+1}{(t+2)^2} \vec{j} + (\ln t + 1) \vec{k} \rightarrow \vec{r}'(1) = \vec{i} + \frac{1}{3} \vec{j} + \vec{k} \rightarrow \text{Teğet doğrusu ya paralel}$$

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{t-1}{t+2} \\ z = t \ln t \end{cases} \Rightarrow t=1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow x_0 \\ y = 0 \rightarrow y_0 \\ z = 0 \rightarrow z_0 \end{cases} \quad \vec{r}'(1) = \vec{v} = \langle 1, \frac{1}{3}, 1 \rangle$$

$$\begin{cases} x = x_0 + at = t \\ y = y_0 + bt = \frac{t}{3} \\ z = z_0 + ct = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{3} \\ z = t \end{cases} \rightarrow t=1 \text{ daki Teğet doğrusu}$$

|                                                                                                                                                                                                                |  |                                     |  |              |      |      |            |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------------------------|--|--------------|------|------|------------|------------|
| YTÜ -                                                                                                                                                                                                          |  | II. VİZE Sınav Soru ve Cevap Kağıdı |  | NOT TABLOSU  |      |      |            |            |
| Adı Soyadı                                                                                                                                                                                                     |  | Grup No                             |  | 1. S         | 2. S | 3. S | 4. S       | TOPLAM     |
| Öğrenci Numarası                                                                                                                                                                                               |  |                                     |  |              |      |      |            |            |
| Bölümü                                                                                                                                                                                                         |  |                                     |  | Sınav Tarihi |      |      |            | 13.05.2017 |
| Dersin Adı                                                                                                                                                                                                     |  | MAT1072 MATEMATİK II                |  | Sınav Süresi |      | 90dk | Sınav Yeri |            |
| Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı                                                                                                                                                                        |  |                                     |  |              |      | İmza |            |            |
| YÖK'nun 2547 sayılı Kanunun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar. |  |                                     |  |              |      |      |            |            |

S. 1-a)  $\vec{r}(t) = (1+t^2)^{3/2}\vec{i} + (3-t^2)^{3/2}\vec{j} + (4t^2)\vec{k}$  eğrisinin  $-1 \leq t \leq 1$  aralığında kalan kısmının (yay) uzunluğunu, belirli integral ile hesaplayınız. (13 P)

$$\vec{r}'(t) = \langle 3t\sqrt{1+t^2}, -3t\sqrt{3-t^2}, 8t \rangle$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{9t^2(1+t^2) + 9t^2(3-t^2) + 64t^2} = 10|t|$$

$$S = \int_{-1}^1 \|\vec{r}'(t)\| dt = 10 \int_{-1}^0 -t dt + 10 \int_0^1 t dt$$

$$= 5[-t^2]_{-1}^0 + 5[t^2]_0^1 = 10 \text{ birim}$$

11-13

S. 1-b) Uzayda, zamana bağlı olarak hareket eden bir cismin konum fonksiyonu

$$\vec{r}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + (t\sqrt{3})\vec{k}$$

ile veriliyor. Cismin, konum fonksiyonu ile ivmesi arasındaki açı, ne zaman  $\frac{2\pi}{3}$  olur? (12 P)

$$\vec{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, \sqrt{3} \rangle$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = \langle -\cos t, -\sin t, 0 \rangle$$

$$-\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{\langle \cos t, \sin t, \sqrt{3}t \rangle \cdot \langle -\cos t, -\sin t, 0 \rangle}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 3t^2} \cdot \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}}$$

$$= \frac{-\cos^2 t - \sin^2 t}{\sqrt{1+3t^2}} \Rightarrow \sqrt{1+3t^2} = 2$$

$$\Rightarrow 1+3t^2 = 4$$

$$\Rightarrow t = \pm 1$$

S. 2-a)  $f(x, y) = \arccos\left(\frac{y}{x^2}\right) + \ln(1-x^2)$  ile verilen  $f$  fonksiyonunun **tanım kümesini** bulunuz.

(Şekil çizilecek) (15 P)

$$z_1 = \arccos \frac{y}{x^2} \Rightarrow \cos z_1 = \frac{y}{x^2}$$

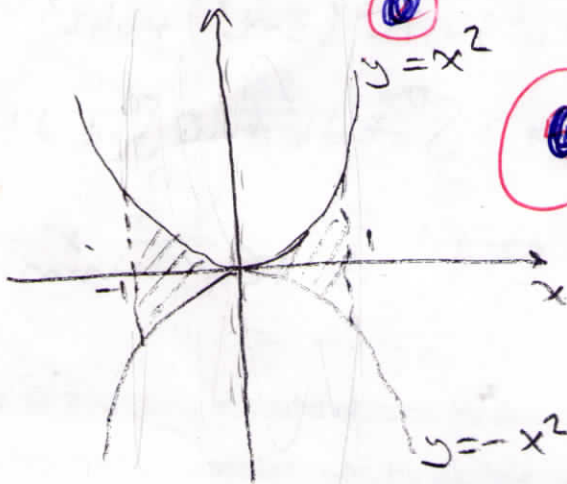
$$-1 \leq \sin z_1 \leq 1 \Rightarrow$$

$$x \neq 0$$

$$-1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x \neq 0 \\ -x^2 \leq y \leq x^2 \end{array} \right\}$$

$$z_2 = \ln(1-x^2), \quad 1-x^2 > 0 \text{ olmak} \Rightarrow -1 < x < 1$$



S. 2-b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\sqrt{1+3x^2y^2} - 2}{xy - 1}$  limitini hesaplayınız. (10 P)

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(\sqrt{1+3x^2y^2} - 2)(\sqrt{1+3x^2y^2} + 2)}{(xy - 1)(\sqrt{1+3x^2y^2} + 2)}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{3(x^2y^2 - 1)}{(xy - 1)(\sqrt{1+3x^2y^2} + 2)} \quad (xy \neq 1)$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{3(xy + 1)}{\sqrt{1+3x^2y^2} + 2} = \frac{3}{2} //$$

S. 3-a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot \ln(1+y)}{x^2+y^2}$  limitinin varlığını araştırınız. (10 P)

II.401  $y=mx$  için  $m$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+mx)}{(1+m^2)x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+mx}{1+m^2}$   
 $\xrightarrow{L'H} = \frac{m}{1+m^2} \rightarrow L.$   
 $= \frac{m}{1+m^2} \rightarrow L.$   
YOK

$x$ -ekseni boyunca,  $y=0$  olup,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot \ln(1+y)}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \ln 1}{x^2+0^2} = 0$$

olmasına rağmen,  $y=x$  değerin boyunca,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot \ln(1+y)}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \ln(1+x)}{x^2+x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x}$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \neq 0$$

olduğundan, limit YOK.

S. 3-b) Eğer mevcut ise,  $f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+y^4})$  ile verilen  $f$  fonksiyonu için  $f_x(0,0)$  ve  $f_y(0,0)$  değerlerini ( $f$  nin  $(0,0)$  noktasında  $x$  ve  $y$  ye göre 1.mertebe **kısmi türevlerini**) bulunuz. (15 P)

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{h^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin|h|}{h} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-h)}{h} = -1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

olduğundan,  $f_x(0,0)$  YOK.

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{h^4}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin h^2}{h^2} \cdot h \right) = 0 //$$

S. 4-a)  $f$ , birinci merteye kısmi türevleri mevcut (sabit olmayan) iki değişkenli bir fonksiyon ve  $z = f(x, y)$  olsun. Eğer  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  dönüşümü yapılırsa,

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

denkleminin alacağı şekli bulunuz. (12 P)

1. yöl  $\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot (r \cos \theta)$   
 $= -y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 //$

2. yöl  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$  ( $x \neq 0$ )

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{aligned} \right\}$$

$$0 = y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xy}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{y^2}{r^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} - \frac{xy}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial \theta} //$$

S. 4-b) Kabul edelim ki  $z$ ,  $x$  ve  $y$  nin sabit olmayan bir fonksiyonudur ve  $\varphi(2x - z^2, y - \frac{1}{3}z^3) = 0$  denklemini ile kapalı olarak tanımlanmıştır. Bu takdirde gösteriniz ki,

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}$$

dir. (13 P)

$g$ , türevlenebilen bir fonksiyon olarak üzere

1. yöl  $y - \frac{z^3}{3} = g(2x - z^2)$  ve  $F(x, y, z) = g(2x - z^2) + \frac{1}{3}z^3 - y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2g'(2x - z^2)}{-2z \cdot g'(2x - z^2) + z^2} \quad (2) \quad (z - 2g'(2x - z^2) \neq 0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-1}{-2z \cdot g'(2x - z^2) + z^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2g'(2x - z^2) + z}{2[-2g'(2x - z^2) + z]} = \frac{1}{z} //$$

$f_z \rightarrow z$   
 $F_x \rightarrow 2$   
 $F_y \rightarrow -1$

4b)

2. YOL

(Bence en kolay bulgular!)

 $u \rightarrow u, v \rightarrow x, y, z$ 

$$F(x, y, z) = \varphi(u, v)$$

$$u = 2x - z^2, \quad v = y - \frac{1}{3}z^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \varphi_u \cdot 2 + \varphi_v \cdot 0 = 2\varphi_u \quad (2)$$

$$F_y = \varphi_u \cdot 0 + \varphi_v \cdot 1 = \varphi_v \quad (2)$$

$$F_z = \varphi_u(-2z) + \varphi_v(-z^2) = -2z\varphi_u - z^2\varphi_v \quad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F_x}{F_z} = \frac{2\varphi_u}{z(2\varphi_u + z\varphi_v)} \quad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F_y}{F_z} = \frac{\varphi_v}{z(2\varphi_u + z\varphi_v)} \quad (2)$$

$$z_x + z z_y = \frac{2\varphi_u + z\varphi_v}{z(2\varphi_u + z\varphi_v)} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{z} \quad (1)$$

$$3. YOL: \varphi(u, v) = 0, \quad u = 2x - z^2, \quad v = y - \frac{1}{3}z^3$$

$$\rightarrow \varphi_u(2 - 2z z_x) + \varphi_v(-z^2 z_x) = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow z_x = \frac{2\varphi_u}{2z\varphi_u + z^2\varphi_v} \quad (2)$$

$$F = \varphi(u, v) \rightarrow x, y, z$$

$$\rightarrow \varphi_u(-2z z_y) + \varphi_v(1 - z^2 z_y) = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow z_y = \frac{\varphi_v}{2z\varphi_u + z^2\varphi_v} \quad (2)$$

$$\rightarrow z_x + z z_y = \frac{2\varphi_u + z\varphi_v}{z(2\varphi_u + z\varphi_v)} = \frac{1}{z} \quad (1)$$

