Alıştırmalar 3.3

(1) $T \in B(\ell^2)$, $T(x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots) = (x_1,-x_2,x_3,-x_4,\ldots)$

(a) 1 ve -1 T nin özdeğerleri ve karşılık gelen özvektörler $(1,0,0,\ldots)$ ve $(0,1,0,\ldots)$ olduğunu gösteriniz

(b) T^2'yi bulunuz ve böylece $\sigma(T)=\{-1,1\}$ old. göst.

(2) $S \in B(\ell^2)$ tek-taraflı öteleme op. olsun. $S^*S = I$ olduğunu ancak $\lambda=0$, SS^* in bir özdeğeri olduğunu gösteriniz

Çözümler

(1) (a) $(1,0,0,\ldots), (0,1,0,\ldots) \in \ell^2$ dir.

- $T(1,0,0,\ldots) = (1,0,0,\ldots) = 1\cdot(1,0,0,\ldots)$ olup 1, $(1,0,0,\ldots)$ özvektörü ile T nin bir özd. dir.
- $T(0,1,0,\ldots) = (0,-1,0,\ldots) = -1\cdot(0,1,0,\ldots)$ olup -1, $(0,1,0,\ldots)$ özvektörü ile T nin bir özd. dir.

(b)

$$T^2(x_1,x_2,x_3,\ldots) = T(x_1,-x_2,x_3,\ldots) = (x_1,x_2,x_3,\ldots)$$

$\Rightarrow T^2 = I$

$\Rightarrow \sigma(T^2) = \{1\}$

$\sigma(T^2) = (\sigma(T))^2$

$\Rightarrow \sigma(T) \subseteq \{-1,1\}$

$\{-1,1\} \subseteq \sigma(T)$ ((a) dan)

$\Rightarrow \sigma(T) = \{-1,1\}$

(2) $S^*S(x_1,x_2,x_3,\ldots) = S^*(0,x_1,x_2,x_3,\ldots) = (x_1,x_2,x_3,\ldots)$

$\Rightarrow S^*S = I$.

$SS^*(x_1,x_2,x_3,\ldots) = S(x_2,x_3,\ldots) = (0,x_2,x_3,\ldots)$

$\Rightarrow SS^*(1,0,0,\ldots) = (0,0,0,\ldots) = 0\cdot(1,0,0,\ldots)$

$\Rightarrow \lambda = 0$ bir özdeğer ve karşılık gelen özvektör $x_\lambda = (1,0,0,\ldots)$ dır.

~~orthonormal basis for S.~~

(3) $c=\{c_n\}\in \ell^\infty$ ve $T_c\in B(\ell^2)$, $T_c(\{x_n\})=\{c_n x_n\}$

(a) $c_m\in\{c_n : n\in\mathbb{N}\}$ ve $\{e_n\}$, ℓ^2 de birim baz vektörler. $\lambda=c_m$, T_c nin e_m özvektörü ile bir özdeğeridir.

(b) $\overline{\{c_n : n\in\mathbb{N}\}}\subseteq\sigma(T_c)$ old. gösteriniz

Çözümler

~~(b) (5 points) Let~~

$$v=\begin{pmatrix}1\\5\\-1\\1\end{pmatrix}$$

~~find the projection p_S of v on S.~~

(a) $T_c(e_m)=(0,0,\dots,0,c_m,0,\dots)=c_m(0,0,\dots,0,1,0,\dots)$
$=c_m e_m$

$\Rightarrow \lambda=c_m$, e_m özvektörü ile T_c nin bir özdeğeri

~~(c) (5 points) Show that p_S and $v-p_S$ are orthogonal.~~

(b)

(a) $\Rightarrow \{c_n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq\sigma(T_c)$

$\sigma(T_c)$ kapalıdır $\Rightarrow \overline{\{c_n : n\in\mathbb{N}\}}\subseteq\sigma(T_c)$

4. Given the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

~~(a) (20 points) Find a diagonalizing matrix X and a diagonal matrix D such that $A = XDX^{-1}$. (Clearly multiply XDX^{-1} to show this equality)~~

(4) $T \in B(\ell^2)$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)$ olsun.

(a) $(T^*)^2 = ?$, $|\mu| < 4$ olmak üzere $(T^*)^2 x = \mu x$, $x \neq 0$ old. göst.

(b) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 2\}$

Çözümler

(a) $T^*(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (4x_2, x_3, 4x_4, \dots)$

$$\Rightarrow (T^*)^2(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = T^*(T^*(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots))$$
$$= T^*(4x_2, x_3, 4x_4, x_5, \dots)$$
$$= (4x_3, 4x_4, 4x_5, 4x_6, \dots)$$

$\{x_n\} \in \ell^2$ bulmalıyız: $(4x_3, 4x_4, 4x_5, \dots) = (\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3, \dots)$

$$\Rightarrow 4x_{n+2} = \mu x_n$$

$x_1 = x_2 = 1$ ve $x_{2n-1} = x_{2n} = \left(\frac{\mu}{4}\right)^{n-1}$ $(n \geq 2)$ olsun.

~~(b) (5 points) Find A^8 in terms of X, D, and X^{-1}~~

Bu durumda $\{x_n\}$ sıfırdan farklıdır ve $|\mu| < 4$ old.dan

$$\sum |x_n|^2 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|\mu|}{4}\right)^{2(n-1)} < \infty$$

bulunur. Bu da $\{x_n\} \in \ell^2$ olması demektir.

Böylece μ, $\{x_n\}$ özvektörü ile $(T^*)^2$'nin bir özdeğeridir.

(b) $\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<4\}\subseteq\sigma((T^*)^2)$ ((a) dan ve Lemma 3.34)

$\Rightarrow \{\bar{\lambda}\in\mathbb{C}:|\lambda|<4\}\subseteq\sigma(T^2)$ (Lemma 3.37)

$\Rightarrow \{\bar{\lambda}\in\mathbb{C}:|\lambda|<4\}=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<4\}$ (Biliniyor)

$\Rightarrow \{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<4\}\subseteq\sigma(T^2)$

$\Rightarrow \{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\le 4\}\subseteq\sigma(T^2)$ (kapalı old.dan)

$\Rightarrow$ Eğer $|\lambda|\le 2 \Rightarrow \lambda\in\sigma(T)$ olur (Aksi halde $\lambda^2\notin\sigma(T^2)$)

Diğer yandan $\lambda\in\sigma(T)$ ise $\lambda^2\in\sigma(T^2)$ (Teo. 3.39)

$\Rightarrow |\lambda|^2\le r_\sigma(T^2)\le\|T^2\|=4$ (Teo. 3.36 ve alışt.)

$\Rightarrow \sigma(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\le 2\}$

be a subspace ...

(5) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ve (b) $= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B$ matrislerinin normlarını bulunuz.

(a)
A kendine-eş olup $\|A\| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \|A\| = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ dir.}$$

(b) $\|B\|^2 = \|B^*B\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\| = \|A\|$

$$\Rightarrow \|B\| = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

(6) $S \in B(H)$ kendine-eş ise S^n de kendine eştir ve $\|S^n\| = \|S\|^n$ sağlanır.

$$(S^n)^* = (S^*)^n = S^n \quad (S \text{ kendine-eş})$$

$\Rightarrow S^n$ kendine-eştir.

$$\|S^n\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(S^n)\}$$
$$= \sup\{|\lambda^n| : \lambda \in \sigma(S)\}$$
$$= (\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(S)\})^n$$
$$= \|S\|^n$$

(7) $S \in B(H)$ kendine-eş olsun.
Eğer $\sigma(S) = \{\lambda\}$ ise $S = \lambda I$ olmalıdır.

$S - \lambda I$ kendine-eş $\Rightarrow$ $\sigma(S - \lambda I) = \{0\}$ (Teo. 3.39)

$\Rightarrow \|S - \lambda I\| = r_\sigma(S - \lambda I) = 0$ (Teo. 3.43)

$\Rightarrow S - \lambda I = 0$ ve

$\Rightarrow S = \lambda I$.

(8) $T \in B(\ell^2)$, $T \neq 0$ ancak $\sigma(T) = \{0\}$ olacak şekilde T operatörünü bulunuz.

$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, x_1, 0, x_3, 0, \dots)$ olsun.

$$\|T(x_1, x_2, x_3, \dots)\|^2 = \|(0, x_1, 0, x_3, 0, \dots)\|^2$$

(b) (5 points) Find A^3 in terms of X, D, and X^{-1}.

$$\leq \|(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)\|^2$$

$\Rightarrow T$ sınırlıdır.

$T \neq 0$ ancak $T^2(x_1, x_2, x_3, \dots) = T(0, x_1, 0, x_3, \dots)$
$= (0, 0, 0, 0, \dots)$

$\Rightarrow T^2 = 0$: $\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow \lambda^2 \in \sigma(T^2) = \{0\}$
Ayrıca $T(0, 1, 0, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$ olup 0 T bir özd. ve $0 \in \sigma(T)$

$\Rightarrow \sigma(T) = \{0\}$