Makine Hareket Denklemi

Makine hareket denklemi, Lagrange denkleminin makinalara uygulanmış özel bir halidir. Lagrange denklemini aşağıdaki gibi yazalım.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q \qquad (1)$$

Burada,

T : Makinenin toplam kinetik enerjisi
q : Makinenin esas genelleştirilmiş koordinatı (hareket veren uzvun konumu)
Q : Genelleştirilmiş kuvvet
t : Zaman

göstermektedir.

Makinenin toplam kinetik enerjisi aşağıdaki gibi yazalım.

$$T=\frac{1}{2}\Im(q)\dot{q}^2 \qquad (2)$$

Burada, $\Im(q)$ makine hareket miline indirgenmiş kütlesel atalet momenti dir. Bunun nasıl hesaplanacağını ilerideki örneklerde göreceğiz.

Şimdi, 2 nolu denklemi 1 nolu denklemde yerine koyalım ve gerekli türevleri alalım.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}\Im(q)\dot{q}^2\right)=\Im(q)\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)=\frac{d}{dt}\left[\Im(q)\dot{q}\right]=\frac{d\Im(q)}{dq}\underbrace{\frac{dq}{dt}}_{\dot{q}}\dot{q}+\Im(q)\underbrace{\frac{d\dot{q}}{dt}}_{\ddot{q}}=\frac{d\Im(q)}{dq}\dot{q}^2+\Im(q)\ddot{q} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q}=\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\Im(q)\dot{q}^2\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial\Im(q)}{\partial q}\dot{q}^2$$

3 nolu eşitlikleri 1 nolu denklemde yerine koyalım.

$$\boxed{\Im(q)\ddot{q}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Im(q)}{\partial q}\dot{q}^2=Q} \qquad (4)$$

Şeklinde elde edilir.

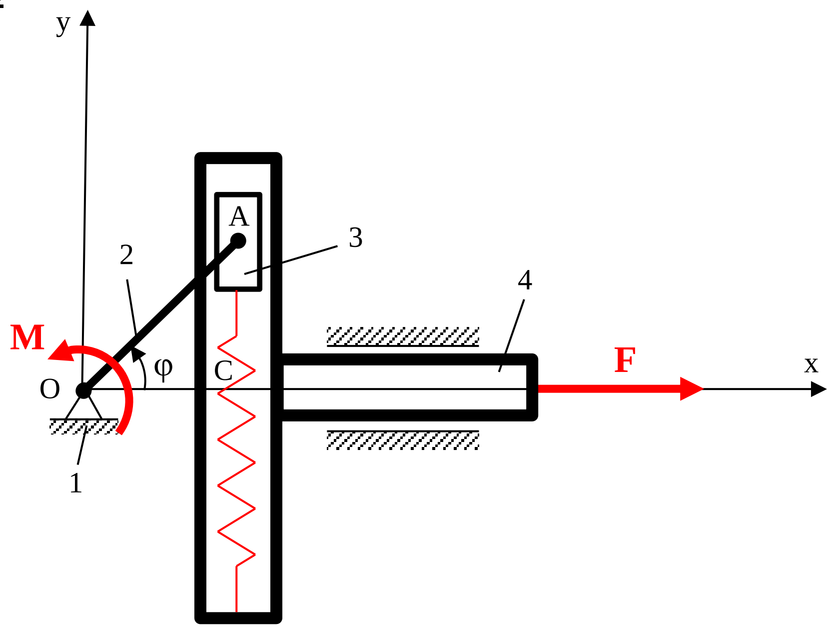
Q genelleştirilmiş kuvvet, Q' korunumsuz ve Q'' korunumlu kuvvetlerin toplamı şeklindedir.

$$Q=Q'+Q''$$

Burada, $Q''=-\dfrac{dV(q)}{dq}$ ve $V(q)$ potansiyel enerjiyi göstermektedir.

$$\boxed{\Im(q)\ddot{q}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Im(q)}{\partial q}\dot{q}^2+\frac{dV(q)}{dq}=Q'} \qquad (5)$$

Örnek 1:



(Bu problem Prof. Dr. ÖzgürTURHAN Hocamızın ders notundan alınmıştır.)

Şekildeki harmonik hareket mekanizması esaslı makinenin 2 numaralı uzvu M momentinin, 4 numaralı uzvu da F kuvvetinin etkisi altındadır. Makinenin hareketli uzuvlarının kütleleri m_2, m_3, ve m_4 dür. 2 numaralı uzvun OA'nın tam ortasında bulunan S_2 kütle merkezine göre eylemsizlik yarıçapı ise i_{S2} olarak bilindiğine ve $\varphi=0$ iken k yayı gerilmesiz olduğuna göre makinenin hareket denklemini elde ediniz.

Çözüm 1:

Verilenler ışığında makinenin toplam kinetik enerjisini yazalım.

$$T=\frac{1}{2}\mathrm{I}\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\mathrm{m}_2\mathrm{V}_3^2+\frac{1}{2}\mathrm{m}_4\mathrm{V}_4^2 \qquad \text{(i)}$$

Amacımız, bütün hızları makine hareket uzvu hızı cinsinden yazmamız gerekiyordu, burada;

$$\mathrm{V}_3=r\dot{\varphi} \qquad \mathrm{x}_\mathrm{C}=\mathrm{r}\cos\varphi \;\rightarrow\; \mathrm{V}_4=\dot{\mathrm{x}}_\mathrm{C}=-r\dot{\varphi}\sin\varphi \qquad \text{(ii)}$$

1 nolu uzvun S_2 ağırlık merkezine göre verilen atalet yarıçapının O dönme merkezine göre yazılımını Huygens-Steiner formülüne göre yazalım.

$$\mathrm{i}_{\mathrm{O}_2}^2=\mathrm{i}_{\mathrm{S}_2}^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2 \;\rightarrow\; \mathrm{I}_2=\mathrm{m}_2\mathrm{i}_{\mathrm{O}_2}^2 \qquad \text{(iii)}$$

Toplam kinetik enerjiyi (ii) ve (iii) eşitlikleri ışığında yeniden düzenleyelim.

$$T=\frac{1}{2}\underbrace{\left(\underbrace{\mathrm{m}_2\mathrm{i}_{\mathrm{O}_2}^2}_{I_2}+\mathrm{m}_3\mathrm{r}^2+\mathrm{m}_4\mathrm{r}^2\sin^2\varphi\right)}_{\Im}\dot{\varphi}^2 \qquad \text{(iv)}$$

Makine hareket miline indirgenmiş kütlesel atalet momenti ifadesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\Im=\mathrm{I}_2+\mathrm{m}_3\mathrm{r}^2+\mathrm{m}_4\mathrm{r}^2\sin^2\varphi \qquad \text{(iv)}$$

Şimdi makine hareket denklemini (iv) eşitliğini kullanarak yazalım. Burada, $q=\varphi$ dir.

$$\Im(\varphi)\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Im(\varphi)}{\partial\varphi}\dot{\varphi}^2+\frac{dV(\varphi)}{d\varphi}=Q' \qquad \text{(v)}$$

(v) nolu denklemin bileşenlerini hesaplayalım.

$$\partial\Im(\varphi)\ddot{\varphi}=\left(\mathrm{I}_2+\mathrm{m}_3\mathrm{r}^2+\mathrm{m}_4\mathrm{r}^2\sin^2\varphi\right)\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial\Im(\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\mathrm{I}_2+\mathrm{m}_3\mathrm{r}^2+\mathrm{m}_4\mathrm{r}^2\sin^2\varphi\right)=2\mathrm{m}_4\mathrm{r}^2\sin\varphi\cos\varphi \qquad \text{(vi)}$$

Burada, potansiyel enerji ifadesini şu şekilde hesaplayabiliriz.

$$\mathrm{V}(\varphi)=\mathrm{m}_2\mathrm{g}\mathrm{y}_{\mathrm{S}_2}+\mathrm{m}_3\mathrm{g}\mathrm{y}_{\mathrm{A}}+\frac{1}{2}\mathrm{k}\mathrm{y}_{\mathrm{A}}^2 \qquad \text{(vii)}$$

Kütle yer değiştirmeleri için aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\mathrm{y}_{\mathrm{S}_2}=\frac{r}{2}\sin\varphi \qquad \mathrm{y}_{\mathrm{A}}=r\sin\varphi \qquad \text{(viii)}$$

Potansiyel enerji ifadesini yeniden düzenleyelim.

$$\mathrm{V}(\varphi)=\left(\frac{\mathrm{m}_2}{2}+\mathrm{m}_3\right)gr\sin\varphi+\frac{1}{2}\mathrm{k}r^2\sin^2\varphi \qquad \text{(ix)}$$

Bu ifadenin hareket denklemindeki türevini alalım.

$$\frac{\partial\mathrm{V}(\varphi)}{\partial\varphi}=\left(\frac{\mathrm{m}_2}{2}+\mathrm{m}_3\right)gr\cos\varphi+\mathrm{k}r^2\sin\varphi\cos\varphi \qquad \text{(x)}$$

Q' Genelleştirilmiş kuvvetin korunumsuz bileşeninin φ genelleştirilmiş koordinatına indirgenmiş eşdeğeri şu şekilde yazılır.

$$Q'(\varphi)=M\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}}+F\frac{V_4}{\dot{\varphi}}=M-Fr\sin\varphi \qquad \text{(xi)}$$

(vi), (x) ve (xi) nolu eşitlikleri (v) nolu denklemde yerine koyup gerekli düzenlemeyi yaparsak,

$$\boxed{\left(\mathrm{I}_2+\mathrm{m}_3\mathrm{r}^2+\mathrm{m}_4\mathrm{r}^2\sin^2\varphi\right)\ddot{\varphi}+\mathrm{m}_4\mathrm{r}^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2+\left(\frac{\mathrm{m}_2}{2}+\mathrm{m}_3\right)gr\cos\varphi+\mathrm{k}r^2\sin\varphi\cos\varphi+Fr\sin\varphi=M} \qquad \text{(xii)}$$

Makineye ait hareket denklemini buluruz.

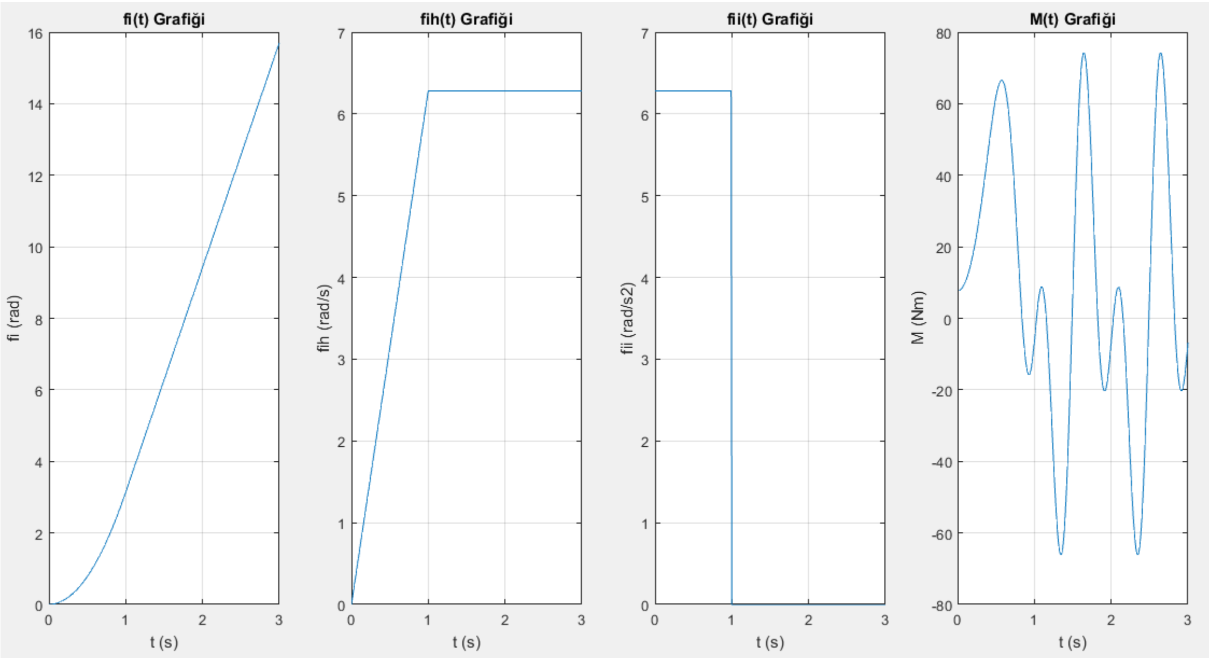
Şimdi bu denklemi sabit hızda çalışması hali için sayısal çözümünü Matlab programında yapalım. Sayısal verilerimiz şu şekilde olsun.

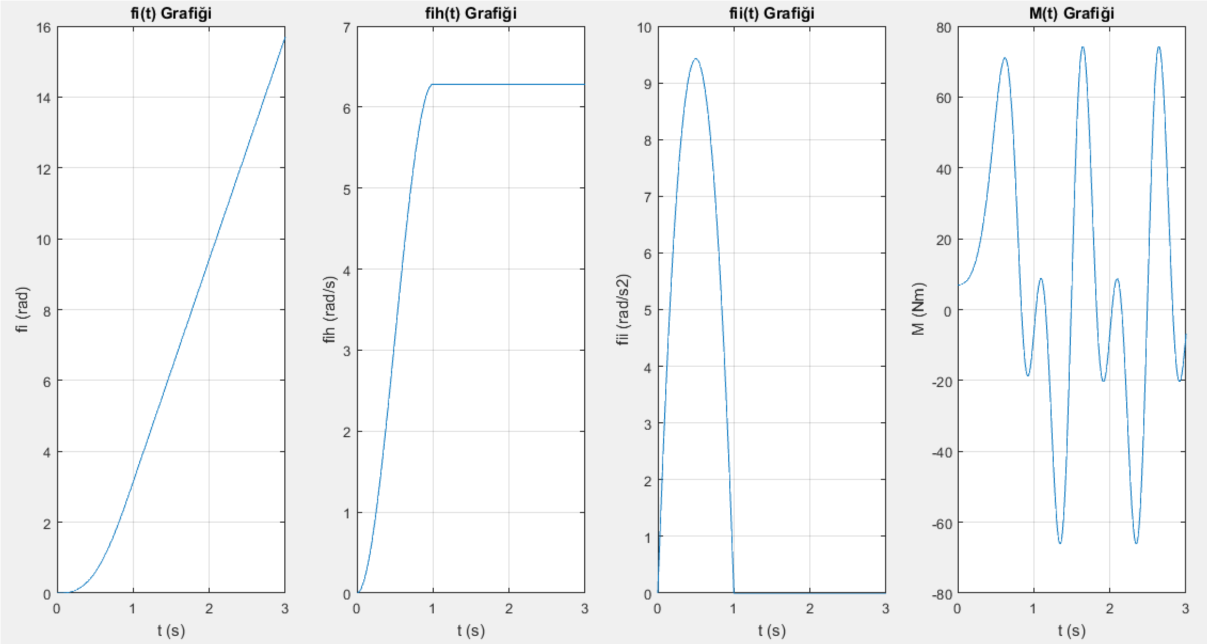
I_2=0,04 kgm^2, m_2=3 kg, m_3=2 kg, m_4=25 kg, r=0,2 m, k=1.000 N/m, F=200 N

Programın Matlab kodunu aşağıdaki gibi yazılabilir.

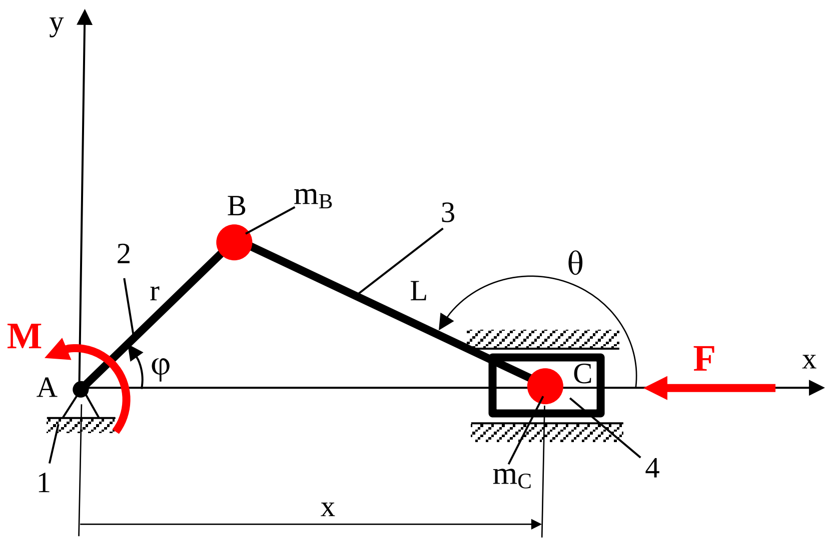
```
% Odev_1.m
clc
clear
I2=0.04; m2=3; m3=2; m4=25; r=0.2; k=1000; F=200; g=9.81;
% İvmelenme süresi ti (s)
ti=1;
% Çalışma devri n (d/d)
n=60;
% Çalışma süresi T (s)
T=3;
% Örnekleme zamanı dt (s)
dt=0.01;
t=0:dt:T;
fihmax=pi*n/30;

for j=1:length(t)
   if t(j)<ti
      [fi,fih,fii]=konum_profili_yumusak(ti,n,dt);
      %[fi,fih,fii]=konum_profili(ti,n,dt);
   else
      fi(j)=fi(j-1)+fihmax*dt;
      fih(j)=fihmax;
      fii(j)=0;
   end
end

for i=1:length(t)
     M(i)=(I2+m3*r^2+m4*r^2*sin(fi(i))^2)*fii(i)+...
          m4*r^2*sin(fi(i))*cos(fi(i))*fih(i)^2+...
          ((m2/2)+m3)*g*r*cos(fi(i))+...
          k*r^2*sin(fi(i))*cos(fi(i))+F*r*sin(fi(i));
end

subplot(1,4,1)
plot(t,fi)
grid
title('fi(t) Grafiği')
xlabel('t (s)')
ylabel('fi (rad)')

subplot(1,4,2)
plot(t,fih)
grid
title('fih(t) Grafiği')
xlabel('t (s)')
ylabel('fih (rad/s)')

subplot(1,4,3)
plot(t,fii)
grid
title('fii(t) Grafiği')
xlabel('t (s)')
ylabel('fii (rad/s2)')

subplot(1,4,4)
plot(t,M)
grid
title('M(t) Grafiği')
xlabel('t (s)')
ylabel('M (Nm)')
```

```
function [fi,fih,fii]=konum_profili(ti,n,dt)
fihmax=pi*n/30;
tt=0:dt:ti;
for i=1:length(tt)
        fih(i)=(fihmax/ti)*tt(i);
        fi(i)=fih(i)*tt(i)/2;
        fii(i)=fih(i)/(tt(i));
end

function [fi,fih,fii]=konum_profili_yumusak(ti,n,dt)
fihmax=pi*n/30;
tt=0:dt:ti;
T=ti;
B=[0  0  0   fihmax*ti/2  fihmax   0];
J=[1    0    0    0     0       0;
   0    1    0    0     0       0;
   0    0    2    0     0       0;
   1    T    T^2  T^3   T^4     T^5;
   0    1    2*T  3*T^2 4*T^3   5*T^4;
   0    0    2    6*T   12*T^2  20*T^3];
A=inv(J)*B';
for i=1:length(tt)

fi(i)=A(1)+A(2)*tt(i)+A(3)*tt(i)^2++A(4)*tt(i)^3+A(5)*tt(i)^4+A(6)*tt(i)^5;
  fih(i)=A(2)+2*A(3)*tt(i)+3*A(4)*tt(i)^2+4*A(5)*tt(i)^3+5*A(6)*tt(i)^4;
  fii(i)=2*A(3)+6*A(4)*tt(i)+12*A(5)*tt(i)^2+20*A(6)*tt(i)^3;
end
```





Örnek 2:



Şekilde, noktasal kütle indirgemesi yapılmış krank biyel mekanizması görülmektedir. m_B,, m_C, r ve L değerleri bilinmektedir. Mekanizma F kuvvetine maruz kalmaktadır. Sistemin hareket denklemini elde ediniz.

Çözüm 2:

Sistemin devre kapalılık denklemini yazalım.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$re^{i\varphi} + Le^{i\theta} = x$$

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + L(\cos\theta + i\sin\theta) = x$$

$$r\cos\varphi + L\cos\theta = x \qquad \text{(i)}$$

$$r\sin\varphi + L\sin\theta = 0 \qquad \text{(ii)}$$

(ii) nolu denklemden θ(φ) bulunur.

$$r\sin\varphi + L\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \sin^{-1}\left(-\frac{r}{L}\sin\varphi\right) \qquad \text{(iii)}$$

(i) nolu denkleme (iii) nolu eşitlik yerleştirilirse, buradan da x(φ) elde edilir.

$$x = r\cos\varphi + L\cos\theta = r\cos\varphi + L\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$x = r\cos\varphi + L\sqrt{1-\underbrace{\sin^2\left(\sin^{-1}\left(-\frac{r}{L}\sin\varphi\right)\right)}_{\left(-\frac{r}{L}\sin\varphi\right)^2}} = r\cos\varphi + L\sqrt{1-\underbrace{\frac{r^2}{L^2}}_{\lambda^2}\sin^2\varphi} = r\cos\varphi + L\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi} \quad \text{(iv)}$$

$\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}$ İfadesini binom serisine açalım,

$$\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi} = 1-\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi - \frac{1}{8}\lambda^4\sin^4\varphi - \frac{1}{16}\lambda^6\sin^6\varphi - \dots\dots\dots$$

Burada ilk iki terimi almak sonucu anlamlı şekilde hatalı çıkarmayacaktır. (iv) eşitliğini yeniden düzenleyelim.

$$x \cong r\cos\varphi + L\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi\right)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[r\cos\varphi + L\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi\right)\right] \cong -r\dot{\varphi}\sin\varphi - L\lambda^2\dot{\varphi}\underbrace{\sin\varphi\cos\varphi}_{\frac{1}{2}\sin 2\varphi} \qquad \text{(v)}$$

$$\dot{x} = -\left(r\sin\varphi + \frac{L}{2}\lambda^2\sin 2\varphi\right)\dot{\varphi}$$

Sistemin toplam kinetik enerji ifadesini yazalım.

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}m_B \mathrm{V}_\mathrm{B}^2 + \frac{1}{2}m_C \mathrm{V}_\mathrm{C}^2$$

$$\text{(vi)}$$

$$\mathrm{V}_\mathrm{B} = r\dot{\varphi} \qquad \mathrm{V}_\mathrm{C} = \dot{x}$$

(vi) nolu eşitlikte gerekli düzenlemeyi yaparak hareket miline indirgenmiş kütlesel atalet momenti ifadesini bulalım.

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\left\{\underbrace{m_B r^2 + m_C\left(r^2\sin^2\varphi + rL\lambda^2\sin\varphi\sin 2\varphi + \frac{L^2}{4}\lambda^4\sin^2 2\varphi\right)}_{\Im}\right\}\dot{\varphi}^2 \qquad \text{(vii)}$$

Buradan, makine hareket denklemindeki ifadeleri elde edelim.

Bu problemde potansiyel enerji fonksiyonu,

$$\mathrm{V} = m_B g r \sin\varphi$$

Hareket miline indirgenmiş kuvveti şu şekilde yazabiliriz.

$$Q' = M\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} - F\frac{\dot{x}}{\dot{\varphi}} = M + F\left(r\sin\varphi + \frac{L}{2}\lambda^2\sin 2\varphi\right) \qquad \text{(viii)}$$

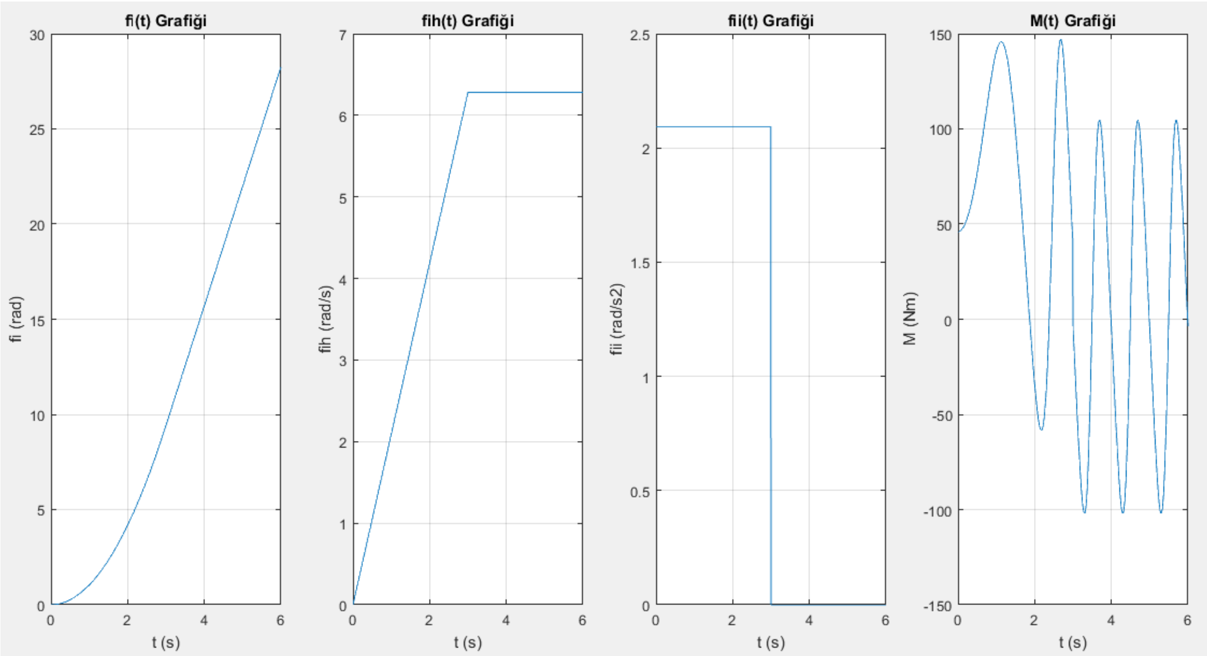
Makine hareket denklemini aşağıdaki gibi elde ederiz.

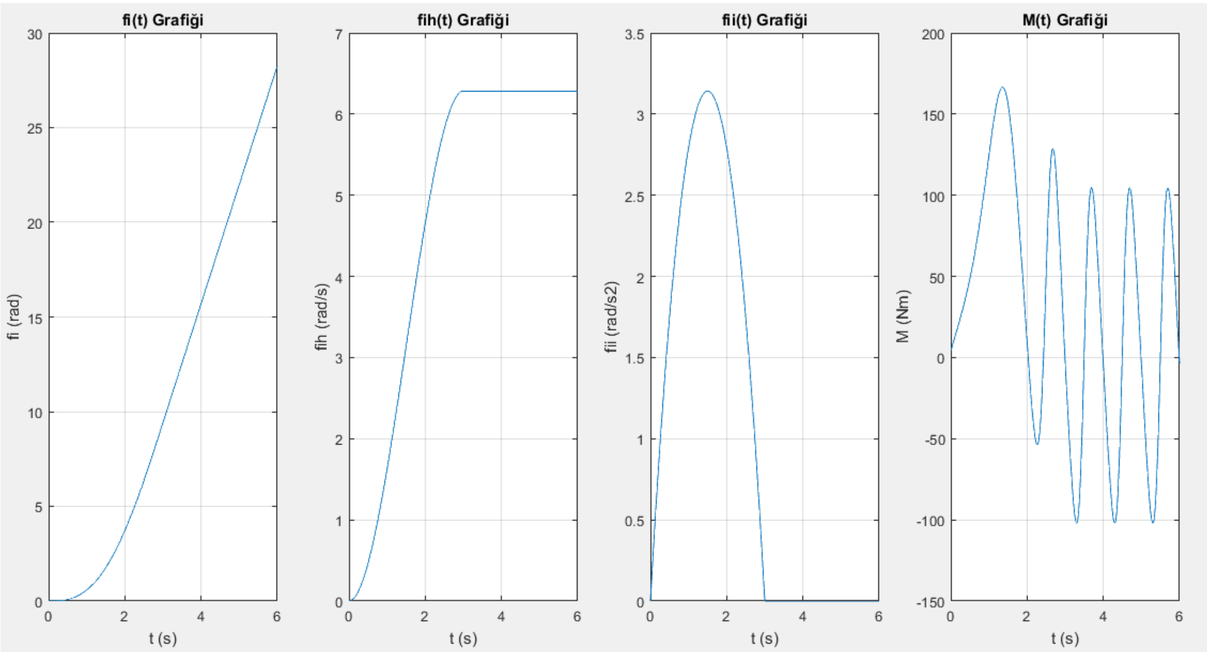
$$\begin{aligned}&\left[m_B r^2 + m_C\left(r^2\sin^2\varphi + rL\lambda^2\sin\varphi\sin 2\varphi + \frac{L^2}{4}\lambda^4\sin^2 2\varphi\right)\right]\ddot{\varphi}\\ &+ m_C\left[r^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{rL\lambda^2}{2}(\cos\varphi\sin 2\varphi + 2\cos 2\varphi\sin\varphi) + L^2\lambda^4\sin 2\varphi\cos 2\varphi\right]\dot{\varphi}^2 \qquad \text{(ix)}\\ &- F\left(r\sin\varphi + \frac{L}{2}\lambda^2\sin 2\varphi\right) + m_B g r\cos\varphi = M\end{aligned}$$

Programın Matlab kodunu aşağıdaki gibi yazılabilir.

```
% Odev_2.m
clc
clear
Volan=20; mB=2; mC=10; r=0.2; Lamda=0.2; L=1; g=9.81; F=500;
% İvmelenme süresi ti (s)
ti=3;
% Çalışma devri n (d/d)
n=60;
% Çalışma süresi T (s)
T=6;
% Örnekleme zamanı dt (s)
dt=0.01;
t=0:dt:T;
fihmax=pi*n/30;

for j=1:length(t)
   if t(j)<ti
      [fi,fih,fii]=konum_profili_yumusak(ti,n,dt);
      %[fi,fih,fii]=konum_profili(ti,n,dt);
   else
      fi(j)=fi(j-1)+fihmax*dt;
      fih(j)=fihmax;
      fii(j)=0;
   end
end

for i=1:length(t)
    A(i)=(Volan+mB*r^2+mC*(r^2*sin(fi(i))^2+r*L*Lamda^2*sin(fi(i))*...
        sin(2*fi(i))+(L^2/4)*Lamda^4*(sin(2*fi(i)))^2));
    B(i)=mC*(r^2*sin(fi(i))*cos(fi(i))+(r*L*Lamda^2/2)*(cos(fi(i))*...
        sin(2*fi(i))+2*sin(fi(i))*cos(2*fi(i)))+L^2*Lamda^4*...
        cos(2*fi(i))*sin(2*fi(i)));
    C(i)=F*(r*sin(fi(i))+(L*Lamda^2/2)*sin(2*fi(i)))+mB*g*r*cos(fi(i));
    M(i)=A(i)*fii(i)+B(i)*fih(i)^2+C(i);
end
```

```
subplot(1,4,1)
plot(t,fi)
grid
title('fi(t) Grafiği')
xlabel('t (s)')
ylabel('fi (rad)')

subplot(1,4,2)
plot(t,fih)
grid
title('fih(t) Grafiği')
xlabel('t (s)')
ylabel('fih (rad/s)')

subplot(1,4,3)
plot(t,fii)
grid
title('fii(t) Grafiği')
xlabel('t (s)')
ylabel('fii (rad/s2)')

subplot(1,4,4)
plot(t,M)
grid
title('M(t) Grafiği')
xlabel('t (s)')
ylabel('M (Nm)')

function [fi,fih,fii]=konum_profili(ti,n,dt)
fihmax=pi*n/30;
tt=0:dt:ti;
for i=1:length(tt)
        fih(i)=(fihmax/ti)*tt(i);
        fi(i)=fih(i)*tt(i)/2;
        fii(i)=fih(i)/(tt(i));
end

function [fi,fih,fii]=konum_profili_yumusak(ti,n,dt)
fihmax=pi*n/30;
tt=0:dt:ti;
T=ti;
B=[0  0  0   fihmax*ti/2  fihmax   0];
J=[1    0    0    0     0       0;
   0    1    0    0     0       0;
   0    0    2    0     0       0;
   1    T    T^2  T^3   T^4     T^5;
   0    1    2*T  3*T^2 4*T^3   5*T^4;
   0    0    2    6*T   12*T^2  20*T^3];
A=inv(J)*B';
for i=1:length(tt)

fi(i)=A(1)+A(2)*tt(i)+A(3)*tt(i)^2++A(4)*tt(i)^3+A(5)*tt(i)^4+A(6)*tt(i)^5;
  fih(i)=A(2)+2*A(3)*tt(i)+3*A(4)*tt(i)^2+4*A(5)*tt(i)^3+5*A(6)*tt(i)^4;
  fii(i)=2*A(3)+6*A(4)*tt(i)+12*A(5)*tt(i)^2+20*A(6)*tt(i)^3;
end
```


fi(t) Grafiği
fi (rad)
t (s)
fih(t) Grafiği
fih (rad/s)
t (s)
fii(t) Grafiği
fii (rad/s2)
t (s)
M(t) Grafiği
M (Nm)
t (s)


fi(t) Grafiği
fi (rad)
t (s)
fih(t) Grafiği
fih (rad/s)
t (s)
fii(t) Grafiği
fii (rad/s2)
t (s)
M(t) Grafiği
M (Nm)
t (s)