

Makinelerde Rotor Dengelemesi:

Makinelerin döner parçalarının tümünün ortak adı rotor dur. Rotorların çalışması esnasında yataklarında dinamik kuvvetler oluşur. Bu kuvvetlerin oluşmasının temel nedeni, rotorun dönme eksenini ile rotorun kütle merkezinin çakışmamasıdır. Peki neden? Dönme merkezi ile kütle merkezi çakılmaz. Rotorlar genellikle simetrik olmalarına karşın bu çakışmama nedenlerinin başlıcaları şunlardır.

- Rotorların esnekliği,
- Rotor simetrikliğini bozan dizaynlar,
- Malzeme homojensizliği ve boşluklar,
- Yatak boşlukları,
- Montaj hataları,

Bu sorunu matematiksel olarak ifade etmek istersek, rotora hareket miktarı teoremini uygulayalım.

$$H^P = I^P \omega$$

Bu ifadenin her iki tarafının zaman göre türevini alalım,

$$M^P = \frac{dH^P}{dt} = I^P \alpha + \omega \times I^P \omega = I^P \alpha + \omega \times H^P$$

Burada, $M^P = M_x^P \vec{i} + M_y^P \vec{j} + M_z^P \vec{k}$ moment vektörü, $\omega = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$ açısal hız vektörü, $\alpha = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j} + \alpha_z \vec{k}$ ise açısal ivme vektörünü göstermektedir.

$$I^P = \begin{bmatrix} I_{xx}^P & I_{xy}^P & I_{xz}^P \\ I_{yx}^P & I_{yy}^P & I_{yz}^P \\ I_{zx}^P & I_{zy}^P & I_{zz}^P \end{bmatrix}$$

ise, rotorun atalet veya eylemsizlik tensörü dür. Bu ifadeyi açarsak,

$$\begin{aligned} M_x^P &= I_{xx}^P \alpha_x + I_{xy}^P (\omega_x \omega_y - \alpha_y) - I_{xz}^P (\omega_x \omega_y + \alpha_z) - I_{yy}^P \omega_y \omega_z - I_{yz}^P (\omega_y^2 - \omega_z^2) + I_{zz}^P \omega_y \omega_z \\ M_y^P &= I_{yy}^P \alpha_y - I_{xy}^P (\omega_y \omega_z + \alpha_x) + I_{yz}^P (\omega_x \omega_y - \alpha_z) + I_{xx}^P \omega_x \omega_z + I_{xz}^P (\omega_x^2 - \omega_z^2) - I_{zz}^P \omega_x \omega_z \\ M_z^P &= I_{zz}^P \alpha_z + I_{xz}^P (\omega_y \omega_z - \alpha_x) - I_{yz}^P (\omega_x \omega_z + \alpha_y) - I_{xx}^P \omega_x \omega_y - I_{xy}^P (\omega_x^2 - \omega_y^2) + I_{yy}^P \omega_x \omega_y \end{aligned}$$

şeklinde rotorun x, y, z eksenlerinde oluşan momentleri buluruz. Bu momentlerin gösterimi aşağıdaki gibidir. Ve bu momentler rotoru ilgili eksen etrafında aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi dönmeye zorlar.

Eğer bu eksenler asal eksen ise, bu durumda $I_{xy}^P = I_{yx}^P = I_{xx}^P = I_{zx}^P = I_{yz}^P = I_{zy}^P = 0$ olur ve yukarıdaki moment ifadeleri aşağıdaki biçime döner.

$$\begin{aligned} M_x^P &= I_{xx}^P \alpha_x - (I_{yy}^P - I_{zz}^P) \omega_y \omega_z \\ M_y^P &= I_{yy}^P \alpha_y - (I_{zz}^P - I_{xx}^P) \omega_x \omega_z \\ M_z^P &= I_{zz}^P \alpha_z - (I_{xx}^P - I_{yy}^P) \omega_x \omega_y \end{aligned}$$

Bu ifadeye Euler denklemleri de denir.

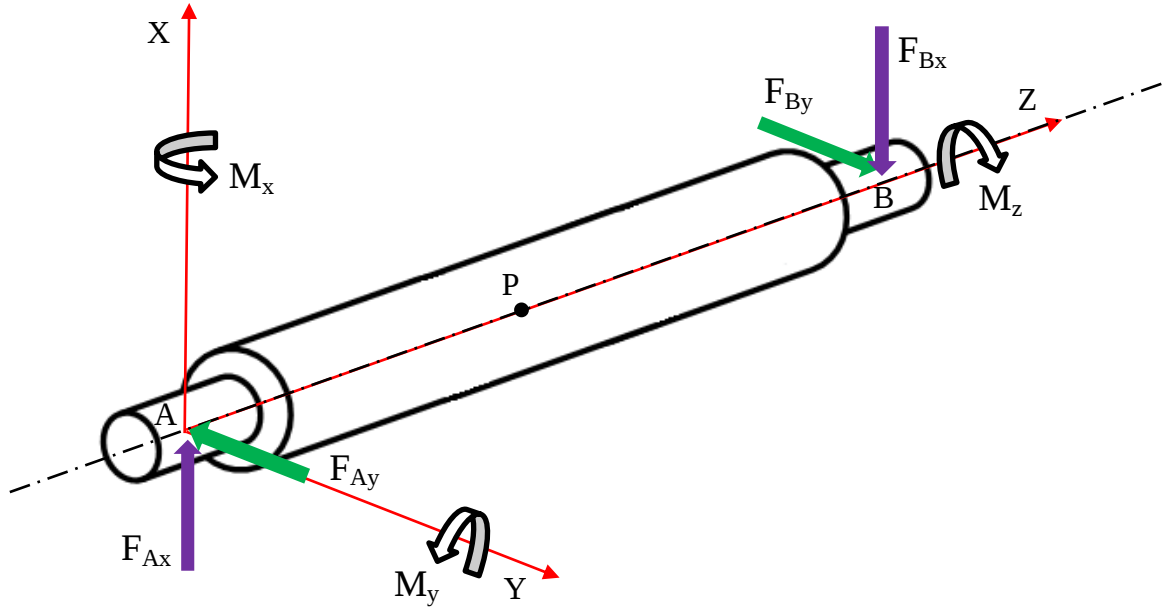
Gerçek bir rotor da dönme eksenleri hiçbir zaman asal eksen olamaz ve aynı anda hiçbir rotor üç eksen de dönemez. Rotorlar sadece bir eksen etrafında döner bu eksenin z eksenini olduğunu kabul edelim bu durumda $\omega_z \neq 0$ ve $\alpha_z \neq 0$ olur. Ve $\omega_x = \omega_y = 0$ ve $\alpha_x = \alpha_y = 0$ dır. Buradan yukarıdaki moment ifadesi aşağıdaki hale dönüşür.

$$M_x^P = -I_{xz}^P \alpha_z + I_{yz}^P \omega_z^2$$

$$M_y^P = -I_{yz}^P \alpha_z - I_{xz}^P \omega_z^2$$

$$M_z^P = I_{zz}^P \alpha_z$$

Görüldüğü gibi, eğer dönme eksenleri asal eksen değil ve rotor sadece z ekseninde dönüyor ise, x ve y eksenlerinde de momentler oluşur. Bu momentler ilgili ekseni tutan yataklarda dinamik kuvvet oluşmasına neden olur. Bu kuvvetlerin gösterimi aşağıdaki gibidir.



Bu kuvvetleri yok etmenin yolu, yataklarda bu kuvvetlere zıt yönde ve eşit değerde yeni kuvvetler oluşturmaktır. Bunun için rotora dengeleme büyüklükleri ilave edilmesi gerekir. Bu büyüklükler öyle bir değerde olsun ve öyle bir yere konsun ki, M_x ve M_y momentleri sıfır olsun. Bunun için,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \quad \text{ve} \quad \sum M_x = 0 \\ \sum F_y &= 0 \quad \text{ve} \quad \sum M_y = 0 \end{aligned}$$

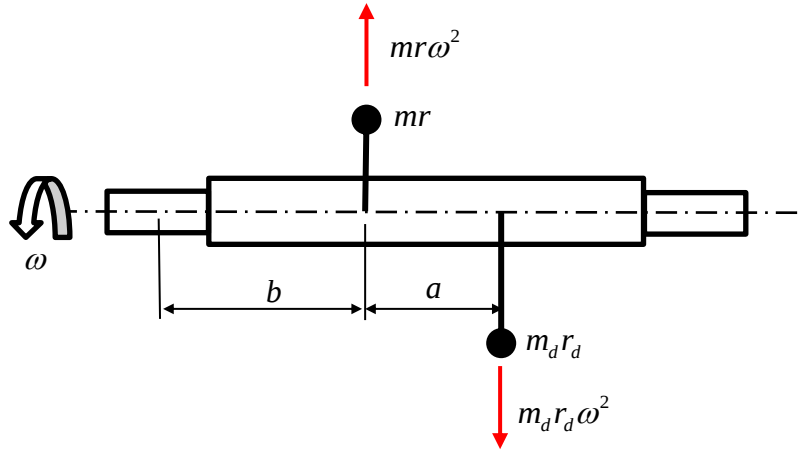
olmalıdır. Rotor dengelenmesi rotor boyut ve hızlarına bağlı olarak iki türlü yapılır.

A-) Statik Dengeleme:

Yataklar arası mesafesi kısa veya hızları nispeten düşük rotorlarda,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \quad \text{ve} \quad \sum M_x \neq 0 \\ \sum F_y &= 0 \quad \text{ve} \quad \sum M_y \neq 0 \end{aligned}$$

dengeleme yukarıdaki koşullarda yapılırsa, buna statik dengeleme denir.



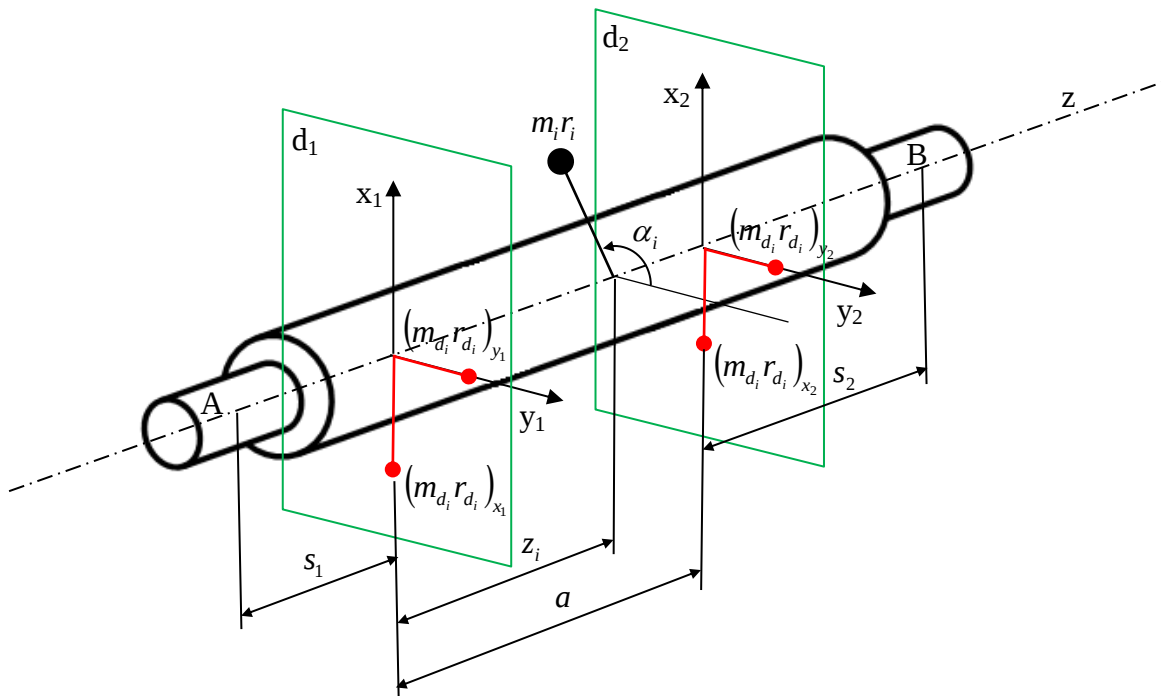
$$\sum F = mr\omega^2 - m_d r_d \omega^2 = 0 \quad mr = m_d r_d$$

$$\sum M = -mr \omega^2 a + m_d r_d \omega^2 (b + a) = m_d r_d \omega^2 b \neq 0$$

Görüldüğü gibi b değeri küçüldükçe momentte sıfıra yaklaşır.

B-) Dinamik Dengeleme:

Şimdi rotorun dönme ekseninin asal eksen olmaması yani $I_{xz}^P \neq 0$ ve $I_{yz}^P \neq 0$ olmasına neden olan bir mr dengesizlik büyüklüğüne sahip olsun. Bunu iki dengeleme düzleminde dengeleyelim.



1 numaralı dengeleme düzlemini referans alıp xz ve yz düzlemlerinde kuvvet ve moment denge denklemlerini yazalım.

xz düzleminde denge denklemlerini yazalım:

$$\sum F = 0 \rightarrow \sum_i m_i r_i \sin \alpha_i - \sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_1} - \sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_2} = 0 \quad 1$$

$$\sum M = 0 \rightarrow \sum_i m_i r_i \sin \alpha_i z_i - \sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_2} a = 0 \rightarrow \boxed{\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_2} = -\sum_i m_i r_i \sin \alpha_i \frac{z_i}{a}} \quad 2$$

2 no'lu ifade 1 no'lu ifadede yerine konulursa,

$$\sum_i m_i r_i \sin \alpha_i - \sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_1} - \sum_i m_i r_i \sin \alpha_i \frac{z_i}{a} = 0 \rightarrow \boxed{\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_1} = -\sum_i \left(1 - \frac{z_i}{a}\right) m_i r_i \sin \alpha_i}$$

yz düzleminde denge denklemlerini yazalım:

$$\sum F = 0 \rightarrow \sum_i m_i r_i \cos \alpha_i - \sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_1} - \sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_2} = 0 \quad 3$$

$$\sum M = 0 \rightarrow \sum_i m_i r_i \cos \alpha_i z_i - \sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_2} a = 0 \rightarrow \boxed{\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_2} = -\sum_i m_i r_i \cos \alpha_i \frac{z_i}{a}} \quad 4$$

4 no'lu ifade 3 no'lu ifadede yerine konulursa,

$$\sum_i m_i r_i \cos \alpha_i - \sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_1} - \sum_i m_i r_i \cos \alpha_i \frac{z_i}{a} = 0 \rightarrow \boxed{\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_1} = -\sum_i \left(1 - \frac{z_i}{a}\right) m_i r_i \cos \alpha_i}$$

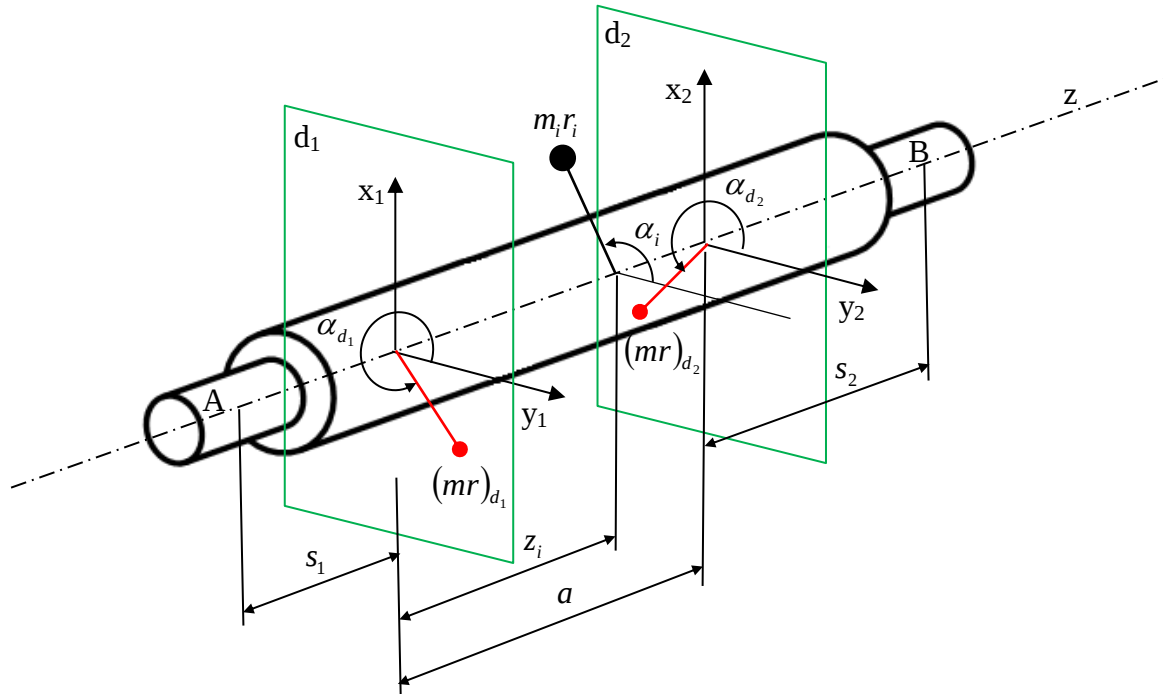
d₁ düzleminde dengeleme büyüklüğünün değeri ve konumu:

$$\boxed{(mr)_{d_1} = \sqrt{\left[\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_1}\right]^2 + \left[\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_1}\right]^2} \quad \alpha_{d_1} = \tan^{-1} \frac{\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_1}}{\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_1}}}$$

d₂ düzleminde dengeleme büyüklüğünün değeri ve konumu:

$$\boxed{(mr)_{d_2} = \sqrt{\left[\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_2}\right]^2 + \left[\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_2}\right]^2} \quad \alpha_{d_2} = \tan^{-1} \frac{\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_2}}{\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_2}}}$$

Dengelenmiş sistem.



Örnek:

Aşağıdaki tabloda verilen değerlere sahip bir dengelenmemiş rotor sistemini iki dengeleme düzleminde dengeleyecek dengeleme büyüklüklerini ve konumlarını bulunuz.

i	m_i [kg]	r_i [mm]	z_i [mm]	α_i [°]
1	2	0,5	-300	0
2	5	0,8	400	150
3	4	1,2	600	70
		$a = 1.000\text{mm}$		

Çözüm:

$$\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_1} = -\sum_i \left(1 - \frac{z_i}{a}\right) m_i r_i \sin \alpha_i = -\left(1 + \frac{300}{1.000}\right) 2 \cdot 0,5 \sin 0 - \left(1 - \frac{400}{1.000}\right) 5 \cdot 0,8 \sin 150 - \left(1 - \frac{600}{1.000}\right) 4 \cdot 1,2 \sin 70 = -3,0042 \text{ kg}\cdot\text{mm}$$

$$\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_1} = -\sum_i \left(1 - \frac{z_i}{a}\right) m_i r_i \cos \alpha_i = -\left(1 + \frac{300}{1.000}\right) 2 \cdot 0,5 \cos 0 - \left(1 - \frac{400}{1.000}\right) 5 \cdot 0,8 \cos 150 - \left(1 - \frac{600}{1.000}\right) 4 \cdot 1,2 \cos 70 = 0,1218 \text{ kg}\cdot\text{mm}$$

$$\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_2} = -\sum_i m_i r_i \sin \alpha_i \frac{z_i}{a} = 2 \cdot 0,5 \sin 0 \frac{300}{1.000} - 5 \cdot 0,8 \sin 150 \frac{400}{1.000} - 4 \cdot 1,2 \sin 70 \frac{600}{1.000} = -3,5063 \text{ kg}\cdot\text{mm}$$

$$\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_2} = -\sum_i m_i r_i \cos \alpha_i \frac{z_i}{a} = 2 \cdot 0,5 \cos 0 \frac{300}{1.000} - 5 \cdot 0,8 \cos 150 \frac{400}{1.000} - 4 \cdot 1,2 \cos 70 \frac{600}{1.000} = 0,7006 \text{ kg}\cdot\text{mm}$$

$$(mr)_{d_1} = \sqrt{\left[\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_1} \right]^2 + \left[\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_1} \right]^2} = \sqrt{-3,0042^2 + 0,1218^2} = 3,0066 \text{ kg}\cdot\text{mm}$$

$$\alpha_{d_1} = \tan^{-1} \frac{\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_1}}{\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_1}} = \tan^{-1} \frac{-3,0042}{0,1218} = 272,32^\circ$$

$$(mr)_{d_2} = \sqrt{\left[\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_2} \right]^2 + \left[\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_2} \right]^2} = \sqrt{-3,5063^2 + 0,7006^2} = 3,5756 \text{ kg}\cdot\text{mm}$$

$$\alpha_{d_2} = \tan^{-1} \frac{\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{x_2}}{\sum_i (m_{d_i} r_{d_i})_{y_2}} = \frac{-3,5063}{0,7006} = 281,3^\circ$$

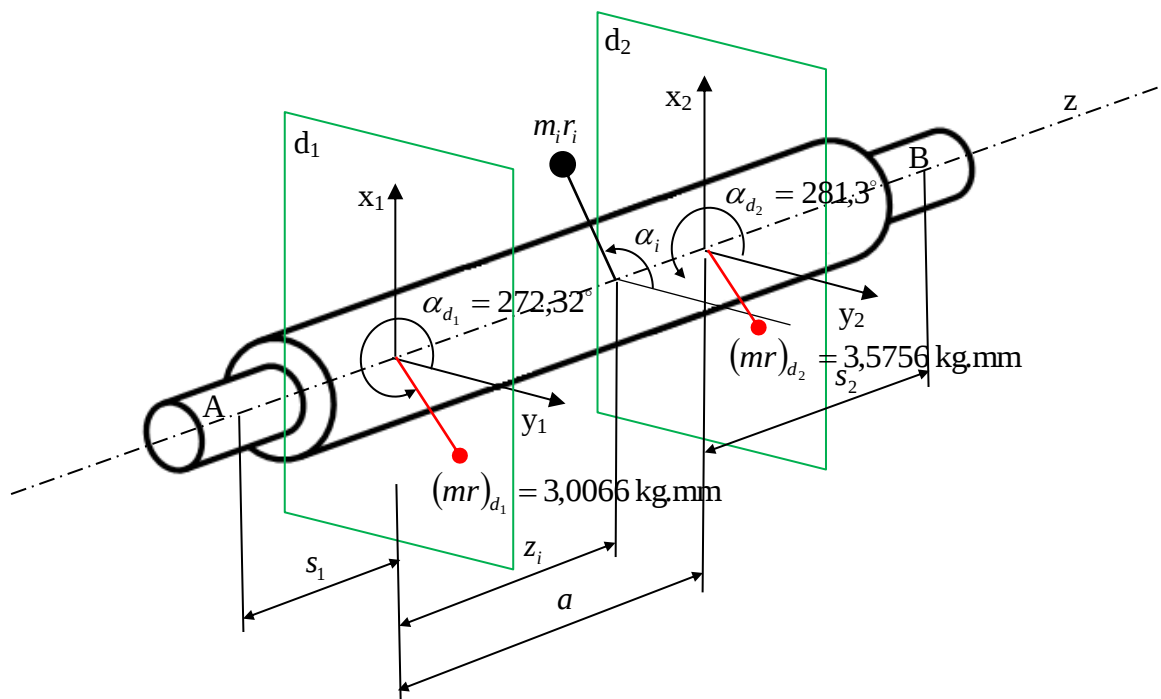
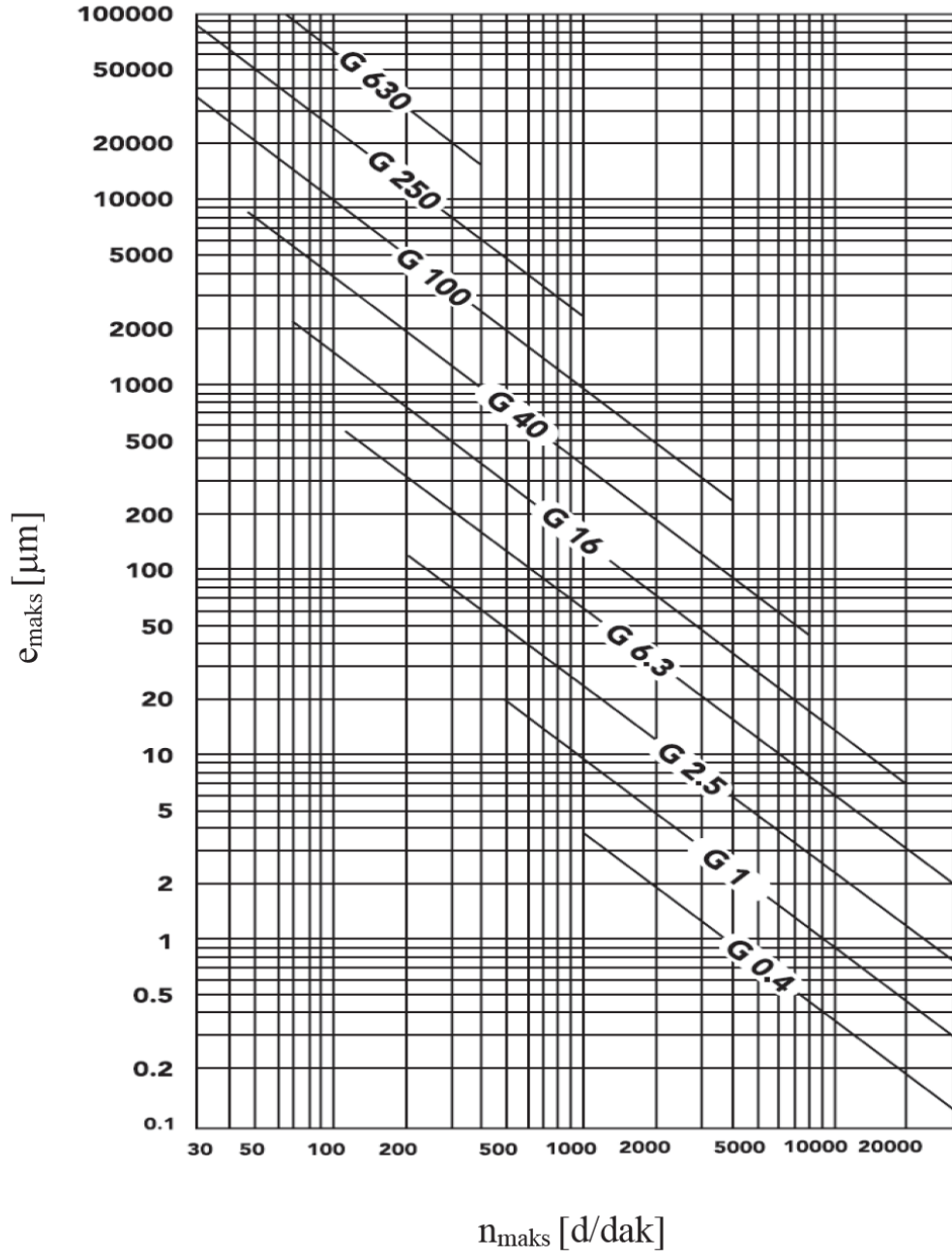


Table 1 — Guidance for balance quality grades for rotors in a constant (rigid) state

Machinery types: General examples	Balance quality grade G	Magnitude $e_{\text{per}} \cdot \Omega$ mm/s
Crankshaft drives for large slow marine diesel engines (piston speed below 9 m/s), inherently unbalanced	G 4000	4 000
Crankshaft drives for large slow marine diesel engines (piston speed below 9 m/s), inherently balanced	G 1600	1 600
Crankshaft drives, inherently unbalanced, elastically mounted	G 630	630
Crankshaft drives, inherently unbalanced, rigidly mounted	G 250	250
Complete reciprocating engines for cars, trucks and locomotives	G 100	100
Cars: wheels, wheel rims, wheel sets, drive shafts Crankshaft drives, inherently balanced, elastically mounted	G 40	40
Agricultural machinery Crankshaft drives, inherently balanced, rigidly mounted Crushing machines Drive shafts (cardan shafts, propeller shafts)	G 16	16
Aircraft gas turbines Centrifuges (separators, decanters) Electric motors and generators (of at least 80 mm shaft height), of maximum rated speeds up to 950 r/min Electric motors of shaft heights smaller than 80 mm Fans Gears Machinery, general Machine-tools Paper machines Process plant machines Pumps Turbo-chargers Water turbines	G 6,3	6,3
Compressors Computer drives Electric motors and generators (of at least 80 mm shaft height), of maximum rated speeds above 950 r/min Gas turbines and steam turbines Machine-tool drives Textile machines	G 2,5	2,5
Audio and video drives Grinding machine drives	G 1	1
Gyroscopes Spindles and drives of high-precision systems	G 0,4	0,4



Şekil 13.2.4 e_{maks} - ω_{maks} (n_{maks}) Diyagramı (ISO 1940/1)

6.2.3 Permissible residual unbalance

The permissible residual unbalance U_{per} can be derived on the basis of a selected balance quality grade G by the following equation:

$$U_{\text{per}} = 1\,000 \frac{(e_{\text{per}} \cdot \Omega) \cdot m}{\Omega} \quad (6)$$

where

U_{per} is the numerical value of the permissible residual unbalance, expressed in gram millimetres (g·mm);

$(e_{\text{per}} \cdot \Omega)$ is the numerical value of the selected balance quality grade, expressed in millimetres per second (mm/s);

m is the numerical value of the rotor mass, expressed in kilograms (kg);

Ω is the numerical value of the angular velocity of the service speed, expressed in radians per second (rad/s), with $\Omega \approx n/10$ and the service speed n in revolutions per minute (r/min).

As an alternative, Figure 2 may be used to derive e_{per} , then:

$$U_{\text{per}} = e_{\text{per}} \cdot m \quad (7)$$

