

Makine Hareketinin Evreleri:

1-) Yalnız Hıza Bağlı Genelleştirilmiş Kuvvet Hali: $Q = Q(\dot{q})$

Makine hareket denklemi aşağıdaki gibiydi,

$$\mathfrak{I}(q)\ddot{q} + C(q)\dot{q}^2 = Q(q, \dot{q}, t) \quad 1$$

burada,

$$C(q) = \frac{1}{2} \frac{d\mathfrak{I}(q)}{dq} \quad 2$$

idi, 1 nolu denklemin ilk parçasını aşağıdaki şekilde açalım.

$$\mathfrak{I}(q)\ddot{q} = \mathfrak{I}(q) \frac{d\dot{q}}{dt} = \mathfrak{I}(q) \frac{d\dot{q}}{dq} \frac{dq}{dt} = \mathfrak{I}(q) \frac{d\dot{q}}{dq} \dot{q} = \frac{1}{2} \mathfrak{I}(q) \frac{d\dot{q}^2}{dq} \quad 3$$

3 nolu eşitliği 1 nolu eşitlikte yerine koyalım.

$$\frac{1}{2} \mathfrak{I}(q) \frac{d\dot{q}^2}{dq} + C(q)\dot{q}^2 = Q(q, \dot{q}, t) \quad 4$$

Burada, $Q(q, \dot{q}, t)$ genelleştirilmiş kuvvet çalıştırma ve direnç kuvvetlerini içerir.



Santrifüj pompa

Şimdi buradaki makinanın bir santrifüj pompa olduğunu varsayalım ki, konu başlığında da belirtildiği gibi santrifüj pompaların direnç momentleri (iş momentleri) hıza bağlıdır ve aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

$$M_w(\omega) \cong M_R \left[0,1 + 0,9 \left(\frac{\omega}{\omega_R} \right)^2 \right] \quad 5$$

Burada, M_R, ω_R santrifüj pompanın maksimum direnç momenti ve açısal hızını göstermektedir. Santrifüj pompayı tahrik eden asenkron elektrik motorunun döndürme momentini de aşağıdaki gibi formüle edebiliriz.

$$M_d(\omega) \cong M_K \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_s} \right)^2 \right] \quad 6$$

Burada, M_K, ω_s asenkron elektrik motorunun kalkma momenti ve senkron açısal hızıdır. Burada genelleştirilmiş kuvvet aşağıdaki gibi yazılır.

$$Q(\dot{q}) = Q(\omega) = M_d(\omega) - M_w(\omega) \cong M_K \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_s} \right)^2 \right] - M_R \left[0,1 + 0,9 \left(\frac{\omega}{\omega_R} \right)^2 \right] \quad 7$$

Şimdi 7 nolu eşitliği 4 nolu eşitlikte yerine koyalım. Burada, $q = \varphi$, $\dot{q} = \omega$ dir.

$$\frac{d\omega^2}{d\varphi} + \left[C(\varphi) + \frac{M_K}{\omega_s^2} + 0,9 \frac{M_R}{\omega_R^2} \right] \omega^2 = \frac{2}{\mathfrak{I}(\varphi)} (M_K - 0,1M_R) \quad 8$$

Santrifüj pompada pompa çarkı direk motor miline bağlı olduğu için $\mathfrak{I}(\varphi) = I$ şeklinde yazabiliriz.

$$C(\varphi) = \frac{1}{2} \frac{d\mathfrak{I}(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{dI}{d\varphi} = 0 \quad 9$$

9 eşitliğini 8’de yerine koyalım.

$$\frac{d\omega^2}{d\varphi} + \frac{2}{I} \left[\frac{M_K}{\omega_s^2} + 0,9 \frac{M_R}{\omega_R^2} \right] \omega^2 = \frac{2}{I} (M_K - 0,1M_R) \quad 10$$

10 eşitliğine gelinir. Bu eşitlik ω^2 için 1.dereceden sağ taraflı bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemin integral çarpanı metodu ile çözersek,

$$\omega^2(\varphi) = \frac{M_K - 0,1M_R}{\frac{M_K}{\omega_s^2} + 0,9 \frac{M_R}{\omega_R^2}} + ce^{-\frac{2}{I} \left(\frac{M_K}{\omega_s^2} + 0,9 \frac{M_R}{\omega_R^2} \right) \varphi} \quad 11$$

çözümünü elde ederiz. $\varphi(0) = 0$, $\omega(0) = 0$ hareketin başlangıç şartları olarak kabul edersek,

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\frac{M_K - 0,1M_R}{\frac{M_K}{\omega_s^2} + 0,9 \frac{M_R}{\omega_R^2}} \left[1 - e^{-\frac{2}{I} \left(\frac{M_K}{\omega_s^2} + 0,9 \frac{M_R}{\omega_R^2} \right) \varphi} \right]} \quad 12$$

motor milinin hareketini milin konumu cinsinden elde ederiz. 12 nolu denklemden $\varphi \rightarrow \infty$ için motor hızının asimptotik olarak

$$\bar{\omega}(\varphi) = \sqrt{\frac{M_K - 0,1M_R}{\frac{M_K}{\omega_s^2} + 0,9 \frac{M_R}{\omega_R^2}}} \quad 13$$

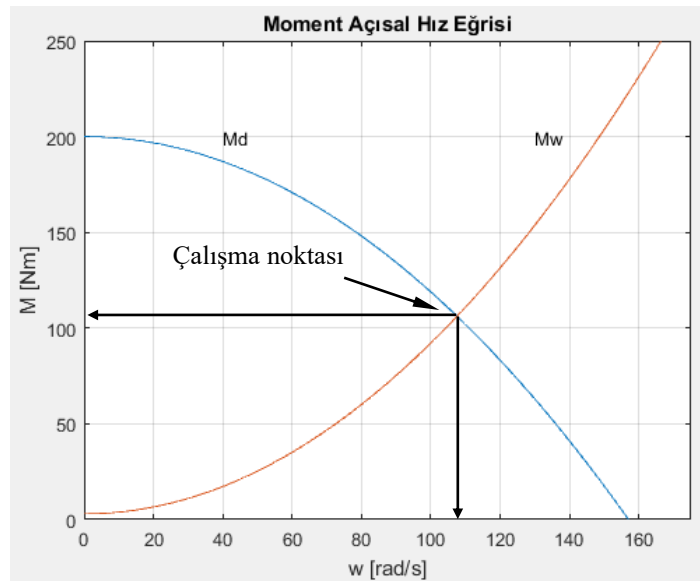
değerine yakınsamaktadır. Dikkat edilirse, kökün içinde payın $M_K > 0,1M_R$ olması şartında motor hareket edebilecektir.

Şekil-1’de M_d ile M_w ’nin M - ω grafiği çizilmiştir. Burada, eğrilerin kesişim noktası santrifüj pompanın çalışma noktasını belirtmektedir. Aşağıda Matlab kodlarında verilen değerler için çizim hesaplanmıştır.

```

clc
clear
MK=200;
wS=157;
MR=30;
wR=55;
w=0:01:200;
for i=1:length(w)
    Md(i)=MK*(1-(w(i)/wS)^2);
    Mw(i)=MR*(0.1+0.9*(w(i)/wR)^2);
end
plot(w,Md,w,Mw)
grid
axis([0 175 0 250])
title('Moment Açısal Hız Eğrisi')
xlabel('w [rad/s]')
ylabel('M [Nm]')
text(130,200,'Mw')
text(40,200,'Md')

```



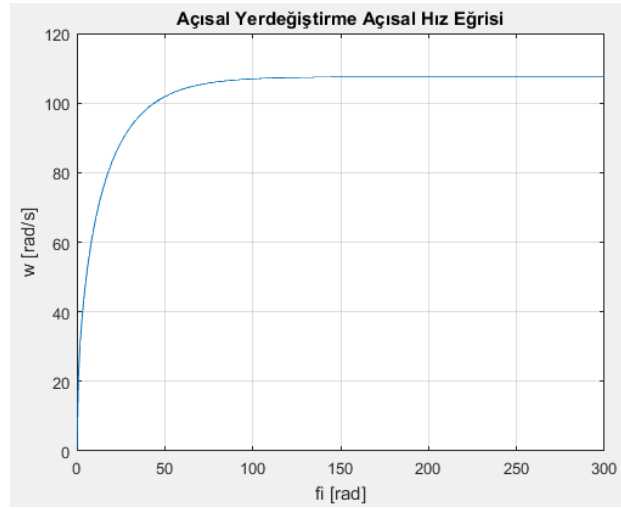
Şekil-1

12 nolu eşitlikle santrifüj pompanın yol alma ve daimi (stasyonör) çalışma evresinin değişimini hesaplayalım. Matlab kodu aşağıdaki gibidir.

```

clc
clear
MK=200;
wS=157;
MR=30;
wR=55;
I=0.75;
fi=0:001:300;
for i=1:length(fi)
    w(i)=sqrt(((MK-0.1*MR)/((MK/wS^2)+0.9*(MR/wR^2)))*...
    (1-exp((-2/I)*((MK/wS^2)+0.9*(MR/wR^2))*fi(i))));
end
plot(fi,w)
grid
title('Açısal Yerdeğiştirme Açısal Hız Eğrisi')
xlabel('fi [rad]')
ylabel('w [rad/s]')

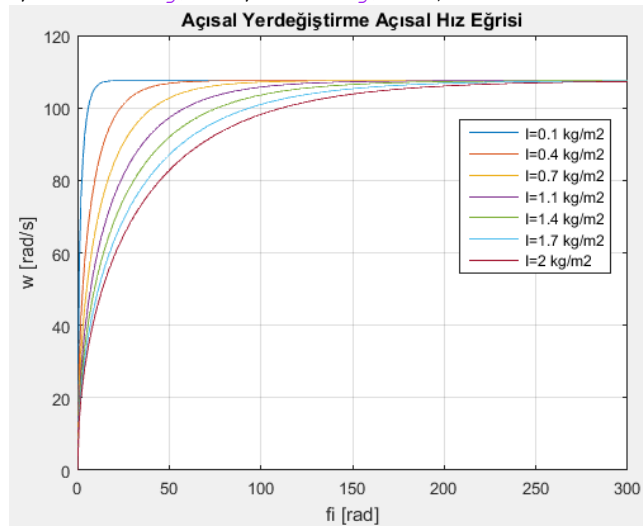
```



Şekil-2

Şimdi denklem 12’de I’nın yani sistemin hareket miline indirgenmiş kütleel atalet momentinin değişimi ile sistemin harekete geçme süresinin değişimine bakalım. Bu grafiğin Matlab kodu aşağıdaki gibidir.

```
clc
clear
MK=200;
wS=157;
MR=30;
wR=55;
fi=0:0.01:300;
I=0.1:0.3:2;
for j=1:length(I)
for i=1:length(fi)
    w(j,i)=sqrt(((MK-0.1*MR)/(MK/wS^2)+0.9*(MR/wR^2)))*...
        (1-exp((-2/I(j))*((MK/wS^2)+0.9*(MR/wR^2))*fi(i))));
end
end
plot(fi,w)
grid
title('Açısal Yerdeğiştirme Açısal Hız Eğrisi')
xlabel('fi [rad]')
ylabel('w [rad/s]')
legend('I=0.1 kg/m2','I=0.4 kg/m2','I=0.7 kg/m2','I=1.1 kg/m2',...
        'I=1.4 kg/m2','I=1.7 kg/m2','I=2 kg/m2')
```



Şekil-3

Acaba, bu santrifüj pompa sistemini durdursak yani motoru kapatsak bu durumda $M_K = 0$ olur. Bu durumda 11 nolu denklem aşağıdaki hali alır.

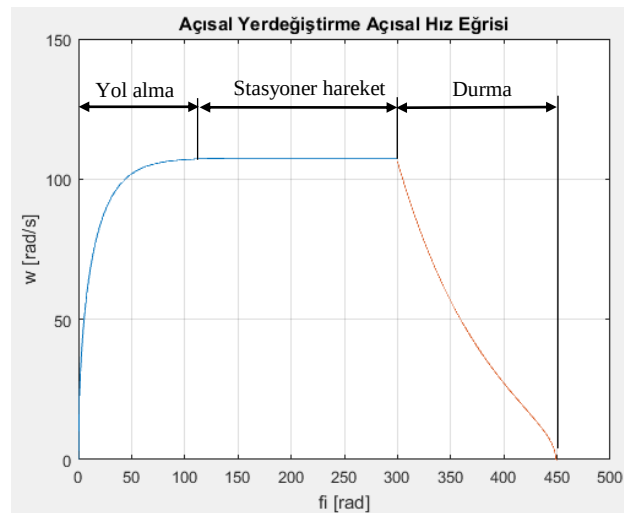
$$\omega^2(\varphi) = -\frac{\omega_R^2}{9} + ce^{\left(-\frac{1,8M_R}{I\omega_R^2}\right)\varphi} \quad 14$$

Bu durumda, motorun kapatıldığı andaki konumu $\varphi = \varphi_d$ ve $\omega = \bar{\omega}$ başlangıç şartları kabul ederek c'yi hesaplayıp 14 nolu denklemde yerine koyarsak, hareketin durma evresini veren ifadeyi aşağıdaki gibi buluruz.

$$\omega(\varphi) = \sqrt{-\frac{\omega_R^2}{9} + \left(\bar{\omega}^2 + \frac{\omega_R^2}{9}\right) e^{\left(-\frac{1,8M_R}{I\omega_R^2}\right)(\varphi - \varphi_d)}} \quad 15$$

Bu ifadenin etkisini gösterecek Matlab yazılımı aşağıdaki gibidir.

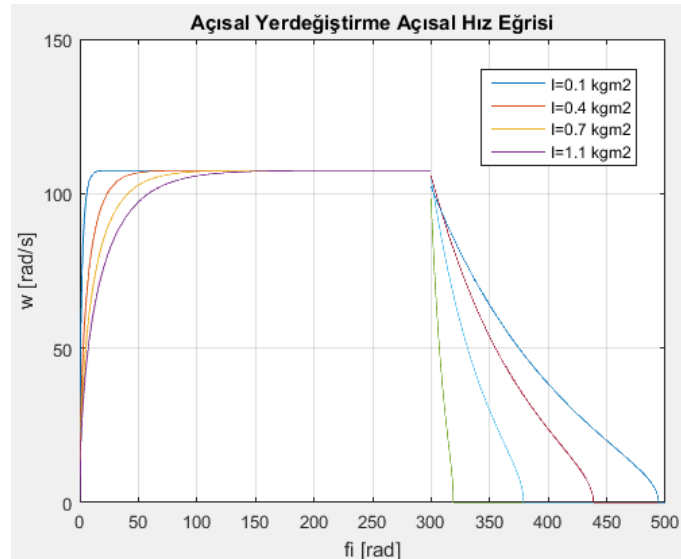
```
clc
clear
MK=200;
wS=157;
MR=30;
wR=55;
I=0.75;
fi=0:0.001:300;
for i=1:length(fi)
    w(i)=sqrt(( (MK-0.1*MR) / ( (MK/wS^2)+0.9*(MR/wR^2) ) ) * ...
    (1-exp((-2/I)*( (MK/wS^2)+0.9*(MR/wR^2) ) * fi(i) ) ) );
end
fid=fi(300);
wc=w(300);
fidi=300:0.001:450;
for j=1:length(fidi)
    wd(j)=sqrt((-wR^2/9) + (wc^2+wR^2/9) * ...
    exp((-1.8*MR/(I*wR^2)) * (fidi(j)-fid)));
end
plot(fi,w,fidi,wd)
grid
title('Açısal Yerdeğiştirme Açısal Hız Eğrisi')
xlabel('fi [rad]')
ylabel('w [rad/s]')
axis([0 500 0 150])
```



Şekil-4

Şimdi de, durma evresinde santrifüj pompanın hareket miline indirgenmiş kütleli atalet momentinin etkisini görmek istersek, aşağıdaki kodu yazabiliriz.

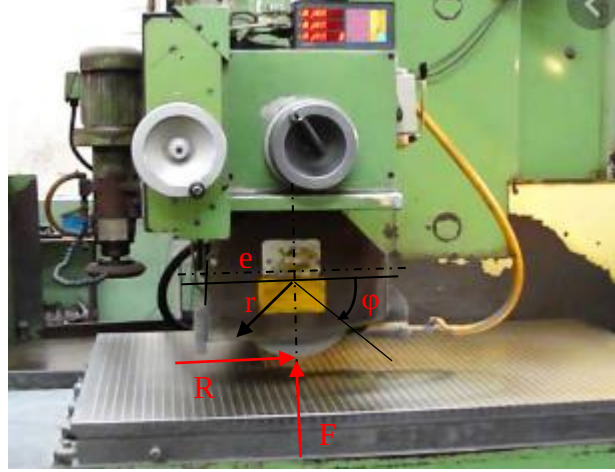
```
clc
clear
MK=200;
wS=157;
MR=30;
wR=55;
I=0.75;
fi=0:0.001:300;
I=0.1:0.3:1.1;
for ii=1:length(I)
for i=1:length(fi)
    w(ii,i)=sqrt(((MK-0.1*MR)/((MK/wS^2)+0.9*(MR/wR^2)))*...
        (1-exp((-2/I(ii))*((MK/wS^2)+0.9*(MR/wR^2))*fi(i))));
end
fid=fi(300);
wc=w(300);
fidi=300:0.001:500;
for j=1:length(fidi)
    wd(ii,j)=sqrt((-wR^2/9)+(wc^2+wR^2/9)*...
        exp((-1.8*MR/(I(ii)*wR^2))*(fidi(j)-fid)));
end
end
plot(fi,w,fidi,wd)
grid
title('Açısal Yerdeğiştirme Açısal Hız Eğrisi')
xlabel('fi [rad]')
ylabel('w [rad/s]')
axis([0 500 0 150])
legend('I=0.1 kgm2', 'I=0.4 kgm2', 'I=0.7 kgm2', 'I=1.1 kgm2')
```



Şekil-5

2-) Konuma ve Hıza Bağlı Genelleştirilmiş Kuvvet Hali: $Q = Q(q, \dot{q})$

İkinci bir örnek olarak 6 nolu ifade ile tanımlanan karakteristiğe sahip bir elektrik motorunun taşlama tezgahını tahrik ettiğini ve taşın e merkez kaçıklığına sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda, iş kuvveti:



Taşlama tezgahı.

$$M_w = Fe \cos \varphi + R(r + e \sin \varphi) \quad 16$$

6 ve 16 nolu ifadeler 7 nolu ifadede yerine koyalım Burada, M_K, ω_s asenkron elektrik motorunun kalkma momenti ve senkron açısal hızıdır. Burada genelleştirilmiş kuvvet aşağıdaki gibi yazılır.

$$Q(q, \dot{q}) = Q(\omega) = M_d(\omega) - M_w(\omega) \cong M_K \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_s} \right)^2 \right] - Fe \cos \varphi - R(r + e \sin \varphi) \quad 17$$

Şimdi 17 nolu eşitliği 4 nolu eşitlikte yerine koyalım. Burada, $q = \varphi, \dot{q} = \omega$ dir. Ayrıca, taş motor miline bir redüktör olmadan doğrudan bağlı olduğu için $\mathfrak{Z}(\varphi) = I$ yazılabilir. Buradan da,

$$C(\varphi) = \frac{1}{2} \frac{d\mathfrak{Z}(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{dI}{d\varphi} = 0 \quad \text{olur.}$$

$$\frac{d\omega^2}{d\varphi} + \frac{2M_K}{I\omega_s^2} \omega^2 = \frac{2}{I} (M_K - Rr) - \frac{2e}{I} (F \cos \varphi + R \sin \varphi) \quad 18$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemi çözelim. Burada c integrasyon sabiti olup başlangıç şartlarından bulunacaktır.

$$\omega^2(\varphi) = \left(1 - \frac{Rr}{M_K} \right) \omega_s^2 + c e^{-\frac{2M_K}{I\omega_s^2} \varphi} + \frac{2e\omega_s^2}{I^2\omega_s^4 + 4M_K^2} \left[(\omega_s^2 R - 2M_K F) \cos \varphi - (I\omega_s^2 F + 2M_K R) \sin \varphi \right] \quad 19$$

çözümünü elde ederiz. $\varphi(0) = 0, \omega(0) = 0$ hareketin başlangıç şartları olarak kabul edersek,

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\left(1 - \frac{Rr}{M_K} \right) \omega_s^2 + \left[\frac{2e\omega_s^2}{I^2\omega_s^4 + 4M_K^2} (2M_K F - I\omega_s^2 R) - \left(1 - \frac{Rr}{M_K} \right) \omega_s^2 \right] e^{-\frac{2M_K}{I\omega_s^2} \varphi} + \frac{2e\omega_s^2}{I^2\omega_s^4 + 4M_K^2} \left[(I\omega_s^2 R - 2M_K F) \cos \varphi - (I\omega_s^2 F + 2M_K R) \sin \varphi \right]} \quad 20$$

motor milinin hareketini milin konumu cinsinden elde ederiz. 20 nolu denklemden hız $\varphi = 0$ iken sıfırdan başlayıp $\varphi \rightarrow \infty$ motor hızının asimptotik olarak

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\left(1 - \frac{Rr}{M_K}\right) \omega_s^2 + \frac{2e\omega_s^2}{I^2\omega_s^4 + 4M_K^2} \left[(I\omega_s^2 R - 2M_K F) \cos \varphi - (I\omega_s^2 F + 2M_K R) \sin \varphi \right]} \quad 21$$

değerine yakınsamaktadır. Bunun ise ortalama bir $\bar{\omega}$ hızı civarında dalgalanma gösterdiği açıktır.

$$\bar{\omega} = \sqrt{\left(1 - \frac{Rr}{M_K}\right)} \omega_s \quad 22$$

Durma evresine bakacak olursak, 18 nolu denklemde motor momentini sıfır alalım.

$$\frac{d\omega^2}{d\varphi} = -\frac{2Rr}{I} - \frac{2e}{I} (F \cos \varphi + R \sin \varphi) \quad 23$$

Bu denklemi çözelim.

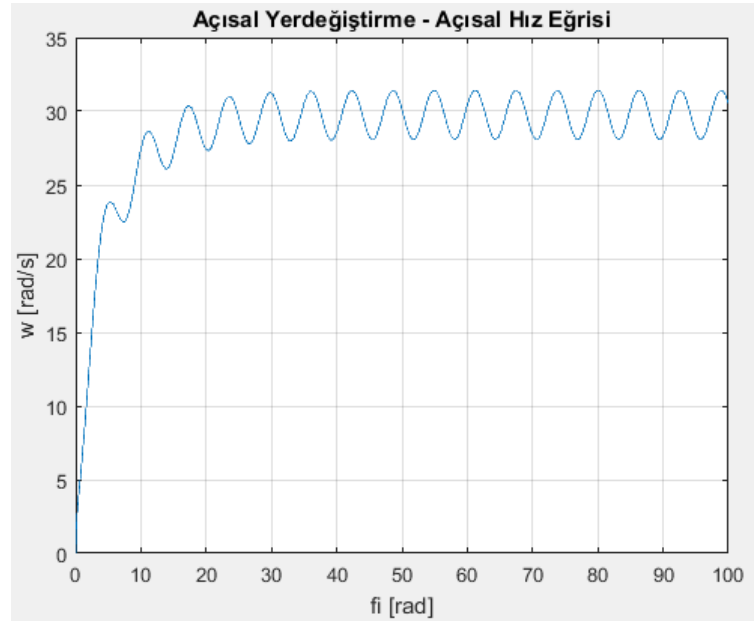
$$\omega^2 = -\frac{2Rr}{I} \varphi - \frac{2e}{I} (F \sin \varphi - R \cos \varphi) + c \quad 24$$

Motorun kapatıldığı andaki başlangıç şartları $\varphi = \varphi_d$ $\omega = \omega_d$ alınarak integrasyon sabiti c bulunur. Buradan c 24 nolu eşitlikte yerine konulduğunda aşağıdaki 25 nolu ifade elde edilir.

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\omega_d^2 - \frac{2Rr}{I} (\varphi - \varphi_d) - \frac{2e}{I} [F(\sin \varphi - \sin \varphi_d) - R(\cos \varphi - \cos \varphi_d)]} \quad 25$$

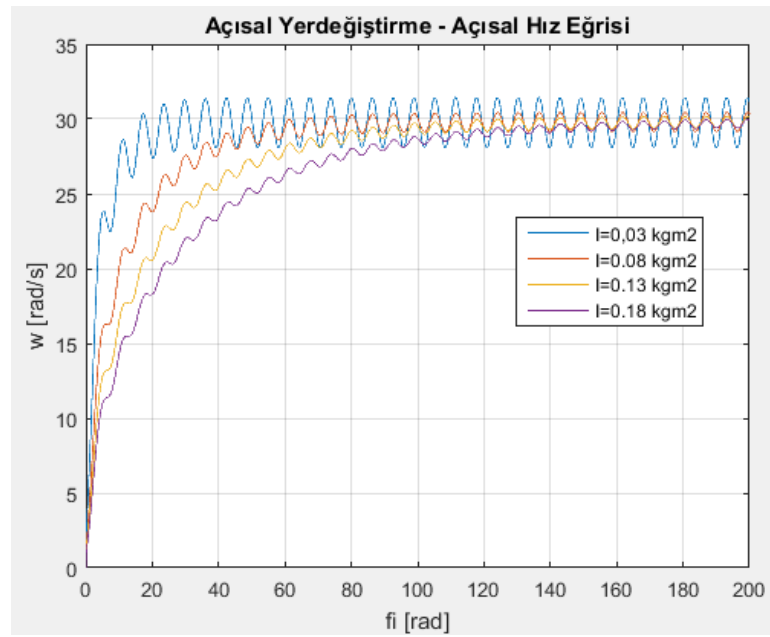
Bu makinanın hareketini hesaplayan Matlab kodu aşağıdaki gibidir.

```
clc
clear
MK=20;
wS=30*pi;
F=1500;
R=120;
I=0.03;
r=0.15;
e=0.001;
fi=0:0.001:100;
for i=1:length(fi)
    w(i)=sqrt((1-(R*r/MK))*wS^2+((2*e*wS^2)/(I^2*wS^4+4*MK^2))*...
        (2*MK*F-I*wS^2*R)-(1-(R*r/MK))*wS^2)*exp(-2*MK*fi(i)/(I*wS^2))+...
        (2*e*wS^2/(I^2*wS^4+4*MK^2))*((I*wS^2*R-2*MK*F)*cos(fi(i))-...
        (I*wS^2*F+2*MK*R)*sin(fi(i))));
end
plot(fi,w)
grid
title('Açısal Yerdeğiştirme - Açısal Hız Eğrisi')
xlabel('fi [rad]')
ylabel('w [rad/s]')
```

Şekil-6

Makine hareket miline indirgenmiş kütleli atalet momenti değerinin değişiminin rejime geçme süresine ve rejim halinde hız dalgalanmasına etkisini inceleyelim.



Şekil-7

Görüldüğü üzere makine hareket miline indirgenmiş kütleli atalet momenti değerinin artması rejime geçme süresini arttırmakta buna karşın hız dalgalanma frekansında değişiklik olmamasına karşın hız dalgalanma genliğini de azaltmaktadır. Bu konuyu ilerde daha ayrıntılı göreceğiz.

Şimdi bir de taşlama tezgahının durma evresini inceleyelim. Bunun için 18 nolu ifadedeki motora ait değişkenleri sıfır almamız yeterli olacaktır.

$$\frac{d\omega^2}{d\varphi} = -\frac{2Rr}{I} - \frac{2e}{I}(F \cos \varphi + R \sin \varphi) \quad 26$$

Bu ifadenin her iki tarafının integralini almak çözüm için yeterli olacaktır. Aldığımız takdirde,

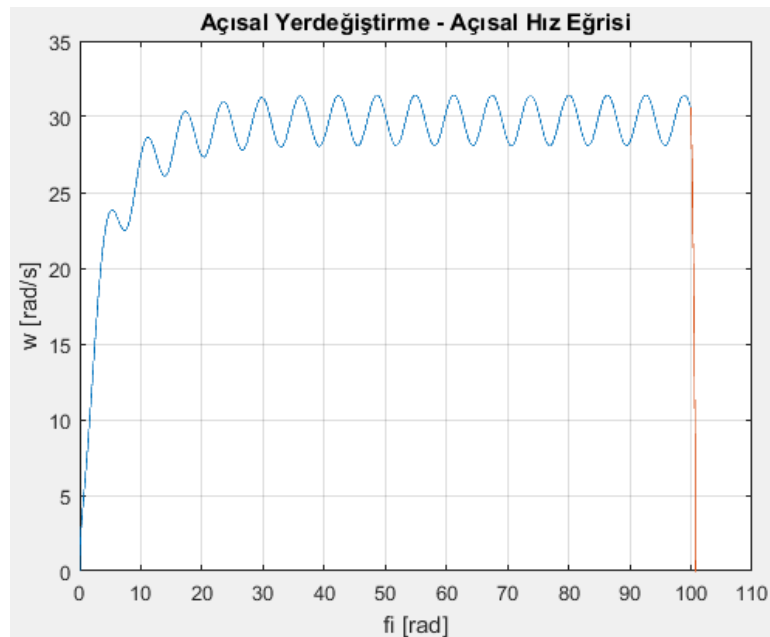
$$\omega^2 = -\frac{2Rr}{I}\varphi - \frac{2e}{I}(F \sin \varphi - R \cos \varphi) + c \quad 27$$

Motorun durduğu anda $\varphi = \varphi_d$ $\omega = \omega_d$ kabul edilirse, buradan integrasyon sabiti bulunur ve durma evresinde makine hareket denklemi aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\omega = \sqrt{\omega_d^2 - \frac{2Rr}{I}(\varphi - \varphi_d) - \frac{2e}{I}[F(\sin \varphi - \sin \varphi_d) - R(\cos \varphi - \cos \varphi_d)]} \quad 28$$

Harekete durma evresini de ekleyecek olursak.

```
clc
clear
MK=20; wS=30*pi; F=1500; R=120; r=0.15; e=0.001; I=0.03;
fi=0:0.01:100;
fid=100;
fii=fid:0.01:101;
for i=1:length(fi)
    w(i)=sqrt((1-(R*r/MK))*wS^2+(((2*e*wS^2)/(I^2*wS^4+4*MK^2))*...
        (2*MK*F-I*wS^2*R)-(1-(R*r/MK))*wS^2)*exp(-2*MK*fi(i)/(I*wS^2))+...
        (2*e*wS^2/(I^2*wS^4+4*MK^2))*((I*wS^2*R-2*MK*F)*cos(fi(i))-...
        (I*wS^2*F+2*MK*R)*sin(fi(i)))));
end
wd=w(length(fi));
for ii=1:length(fii)
    wi(ii)=sqrt(wd^2-((2*R*r)/I)*(fii(ii)-fid)-((2*e)/I)*...
        (F*(sin(fii(ii))-sin(fid))-R*(cos(fii(ii))-cos(fid)))));
end
plot(fi,w,fii,wi)
grid
title('Açısal Yerdeğiştirme - Açısal Hız Eğrisi')
xlabel('fi [rad]')
ylabel('w [rad/s]')
axis([0 110 0 35])
```



Şekil-8