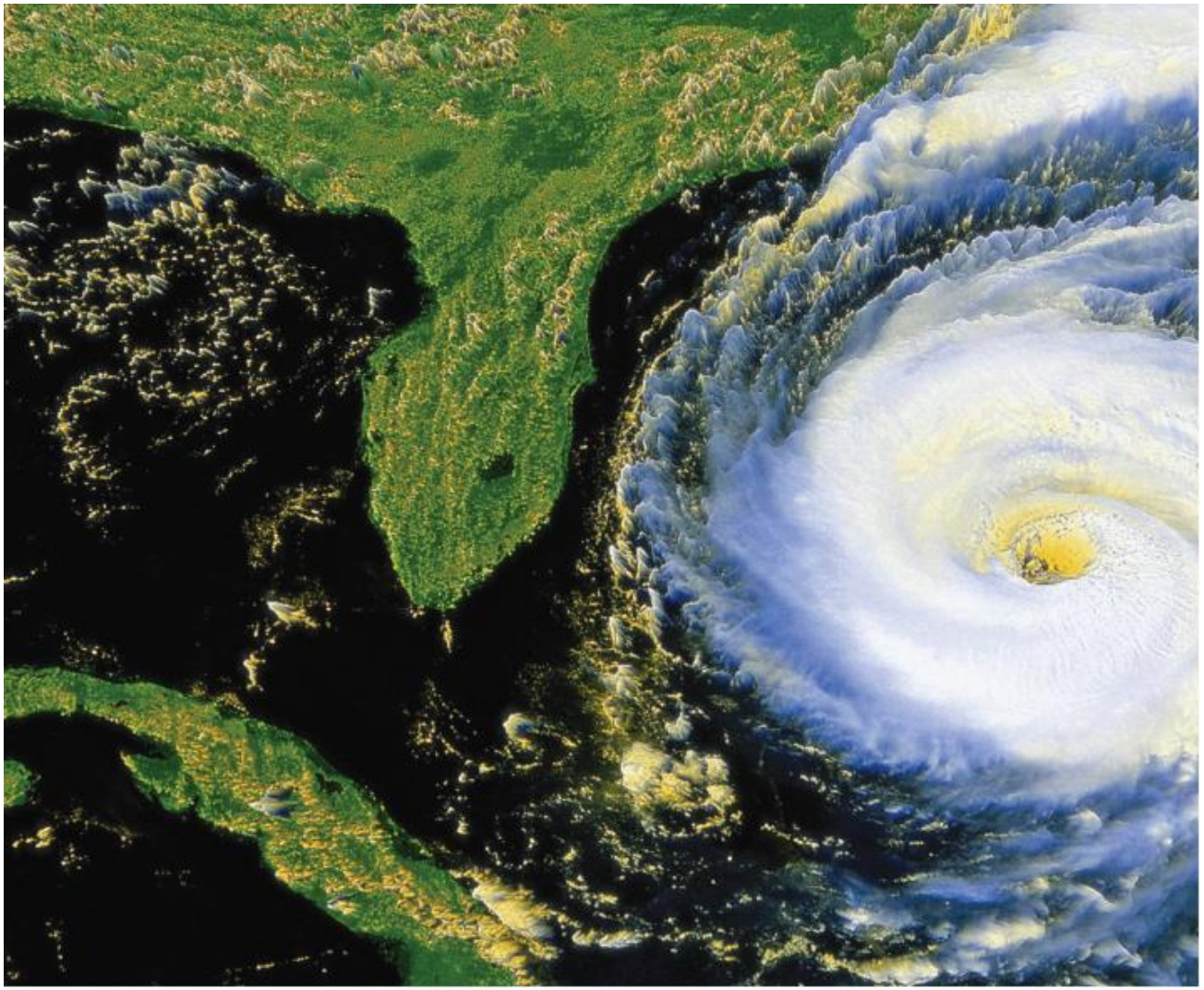
Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications
3rd Edition
Yunus A. Cengel, John M. Cimbala
McGraw-Hill, 2014

Bölüm 4
AKIŞKAN KİNEMATİĞİ

Yayın hakkı © The McGraw-Hill Companies, Inc. İzin alınmaksızın çoğaltılamaz ve kullanılamaz.



Florida sahili yakınlarındaki kasırganın uydu görüntüsü. Havayla birlikte hareket eden su damlacıkları, saatin tersi yönündeki girdap hareketinin gözlenmesine olanak vermiştir. Bununla birlikte kasırganın büyük bir bölümü aslında *dönümsüz* olup, sadece fırtınanın merkezi (fırtına gözü) *dönümlü*dür.

Öğrenim Amaçları

- Lagrange ve Euler yaklaşımları arasındaki dönüşümde maddesel türevin rolünü anlayabilmelidir
- Çeşitli akış görüntüleme tipleri ile bir akışa ait karakteristiklerin çizim yöntemlerini ayırt edebilmelidir
- Akışkanların birçok şekilde gerçekleşen hareket ve şekil değiştirme özelliklerini kavrayabilmelidir
- Akışın vortisite özelliğine göre dönümlü ve dönümsüz akış bölgelerini ayırt edebilmelidir
- Reynolds transport teoreminin faydasını anlayabilmelidir

4–1 ■ LAGRANGE VE EULER YAKLAŞIMLARI

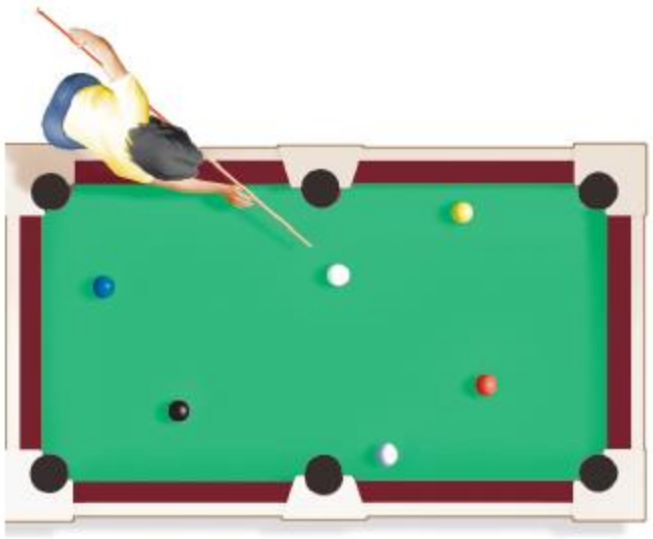
Kinematik: Hareketin incelenmesiyle ilgilenir.

Akışkan Kinematiği: Akışkanların nasıl aktığının ve akışkan hareketinin nasıl tanımlanacağının incelenmesidir.

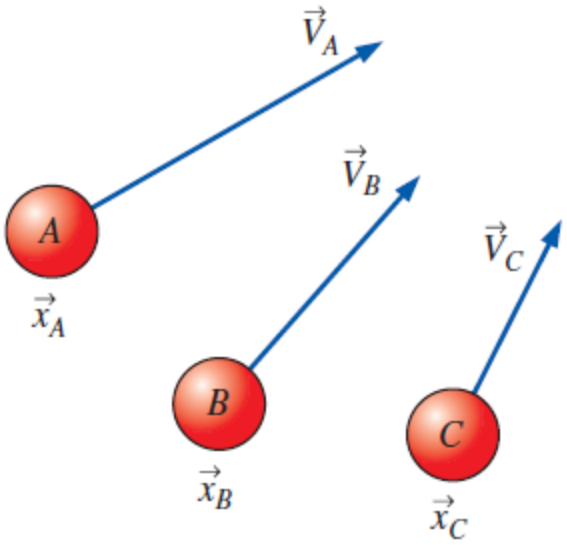
Temelde hareketi tanımlamanın iki farklı yolu vardır: Lagrange ve Euler yaklaşımları.

Lagrange Yaklaşımı: Cisimlerin tek tek yörüngeleri takip edilir.

Bu yaklaşım, akışkan parçacığı olarak bahsedeceğimiz ve sabit özellikli bir parça olarak kabul edeceğimiz, **her bir akışkan parçacığının hızını ve pozisyonunu izlememizi gerektirir.**



Bir bilardo masasındaki toplar gibi az sayıda cisim olduğunda bunların her biri ayrı ayrı izlenebilir.



Lagrange yaklaşımında tek tek parçacıkların konum ve hızlarının izlenmesi gerekir.

- Daha yaygın bir akış tanımlama yöntemi ise **Euler yaklaşımı**dır.
- Euler akış tanımlama yaklaşımında **akışkanın içerisinden girip çıktığı ve akış bölgesi veya kontrol hacmi adı verilen sonlu bir hacim tanımlanır.**
- Bu durumda akışkan parçacıklarının tek tek izlenmesi yerine, **kontrol hacminin içerisinde konumun ve zamanın fonksiyonu olan alan değişkenleri** tanımlanır.
- Belirli bir anda belirli bir konumdaki alan değişkeni, o anda o konumu işgal eden parçacığa ait değişkenin değerini alır.
- Örneğin **basınç alanı**, nitelik bakımından **skaler (büyüklük) alandır** ve **kartezyen koordinatlardaki** genel, **daimi olmayan, üç-boyutlu akış için** şöyle ifade edilir:

Basınç alanı: $$P = P(x, y, z, t)$$

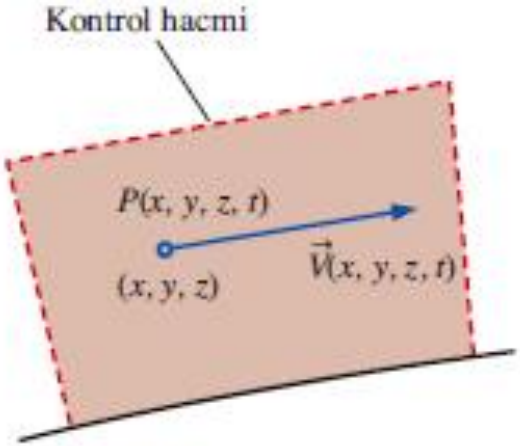
- Benzer şekilde **hız ve ivme alanları** ise ***vektör alanları*** olarak tanımlanır:

Hız alanı: $$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

İvme alanı: $$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t)$$

Bunlar (ve diğer) alan değişkenleri hep birlikte akış alanını tanımlar. Hız alanı **kartezyen koordinatlarda** aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\vec{V} = (u, v, w) = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k}$$



(a)

(b)

- Euler yaklaşımında her bir akışkan **parçacığına gerçekte ne olduğuyla değil**, göz önüne alınan **zamanda ve konumdaki bir parçacığın basıncının, hızının, ivmesinin vb. ne olduğu ile ilgilenilir.**
- Her ne kadar Lagrange yaklaşımının kullanışlı olduğu birçok durum varsa da, akışkanlar mekaniği uygulamalarında Euler yaklaşımı çoğunlukla daha uygun olmaktadır.
- **Deneysel ölçümler de genellikle Euler yaklaşımına daha uygundur**.

(a) Euler yaklaşımında **basınç alanı ve hız alanı gibi alan değişkenleri herhangi bir konumda ve herhangi bir anda** tanımlanır.

(b) **Örneğin bir uçağın kanadının altına monte edilmiş olan hava hız probu, bu konumdaki hava hızını ölçer.**

ÖRNEK 4–1 Daimi, İki-Boyutlu Hız Alanı

Daimi, sıkıştırılamaz, iki-boyutlu bir hız alanı

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\,\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\,\vec{j} \qquad (1)$$

şeklinde verilmektedir. Burada x- ve y-koordinatları metre, hız büyüklüğü ise m/s birimindedir. Durma noktası, akış alanı içerisinde hızın sıfır olduğu nokta olarak tanımlanmaktadır. (*a*) Akış alanı içerisinde herhangi bir durma noktası olup olmadığını belirleyiniz, eğer varsa nerededir? (*b*) $x = -2$ m ila 2 m ve $y = 0$ m ila 5 m arasında kalan bölgede birkaç farklı konumda hız vektörlerini çiziniz ve akış alanını nitelik bakımından tarif ediniz.

ÇÖZÜM Verilen hız alanı için durma noktasının (veya noktalarının) konumu (veya konumları) belirlenecektir. Birkaç hız vektörü çizilecek ve akış alanı tarif edilecektir.

Kabuller **1** Akış daimi ve sıkıştırılamazdır. **2** Akış iki-boyutludur, yani hızın z-bileşeni yoktur ve u veya v, z ile değişmemektedir.

Analiz (*a*) $\vec{V}$ bir vektör olduğundan sıfır olabilmesi için *tüm* bileşenlerinin sıfıra eşit olması gerekir. Denklem 4–4'ü kullanarak ve Denklem 1'i sıfıra eşitleyerek durma noktası bulunabilir:

Durma noktası:

$$u = 0.5 + 0.8x = 0 \quad \rightarrow \quad x = -0.625 \text{ m}$$
$$v = 1.5 - 0.8y = 0 \quad \rightarrow \quad y = 1.875 \text{ m}$$

Buna göre $x = -0.625$ m, $y = 1.875$ m noktası bir durma noktasıdır.

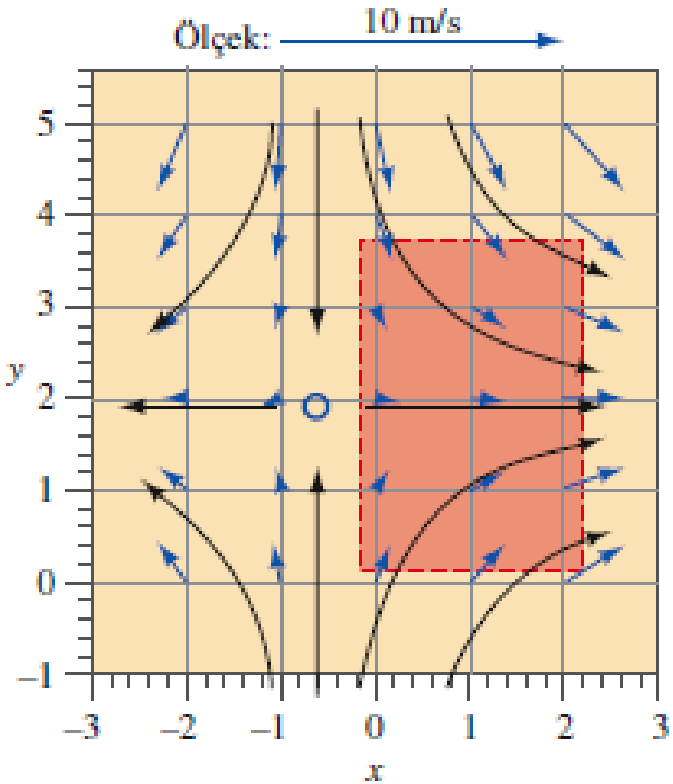
(*b*) Hızın x- ve y-bileşenleri, belirtilen bölgede birkaç farklı (x, y) konumu için Denklem 1'den hesaplanabilir. Örneğin, ($x = 2$ m, $y = 3$ m) noktasında $u = 2.10$ m/s ve $v = -0.900$ m/s olarak bulunur. Bu noktadaki hızın büyüklüğü 2.28 m/s'dir. Bu ve diğer bir bazı konumlardaki hız vektörleri bileşenlerine göre hesaplanmış ve sonuçlar Şekil 4–4'te çizilmiştir. Akış üst ve alttan girerek $y = 1.875$ m'deki yatay simetri çizgisi etrafından sağa ve sola yayıldığından, durma noktası akışı olarak tarif edilebilir. (*a*) kısmındaki durma noktası Şekil 4–4'te mavi daire ile gösterilmiştir.

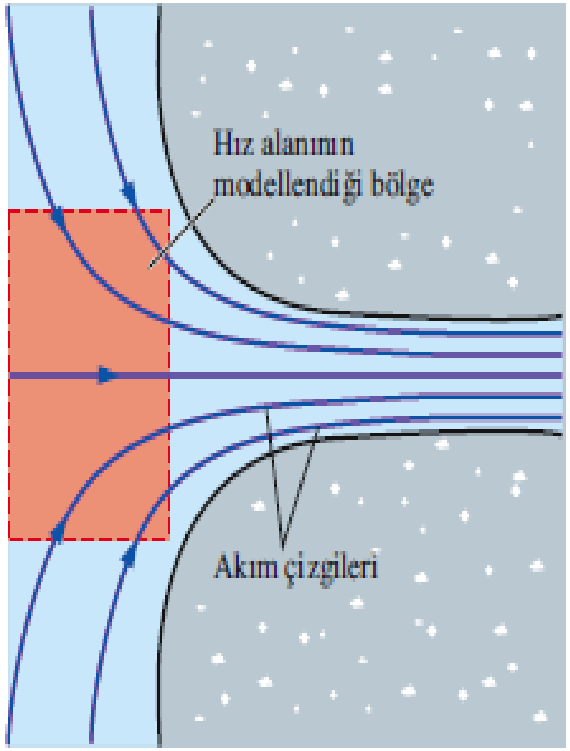
Sadece Şekil 4–4'teki gölgelendirilmiş kısmı göz önüne alalım. Bu akış alanı soldan sağa doğru daralan ve ivmelenen akışı temsil etmektedir. Böyle bir akışla, örnek olarak bir hidroelektrik barajının daldırılmış çan ağzı biçimindeki su alma ağzı yakınında karşılaşılabilir (Şekil 4–5). Verilen hız alanının bu kısmı, Şekil 4–5'teki fiziksel akış alanının gölgelendirilmiş kısmının birinci mertebeden yaklaştırımı olarak düşünülebilir.

İrdeleme Bölüm 9'da verilecek bilgilerden hareketle, kütlenin korunumuna ait diferansiyel denklemi sağladığından bu akış alanının fiziksel olarak mümkün olabileceği gösterilebilir.

Daimi, İki Boyutlu Hız Alanı (başlangıç konumu ve yön önemli u hızı , x yönü v, y yönündedir z yönü sıfır):

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\,\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\,\vec{j}$$





Bir hidroelektrik santral barajının çan biçimindeki su alma ağzı yakınında görülen akış alanı; Örnek 4–1'deki hız alanının bir kısmı, bu fiziksel akış alanının birinci mertebeden yaklaştırımı olarak kullanılabilir. Gölgelendirilmiş bölge Şekil 4–4'deki gölgelendirilmiş bölgeye karşılık gelmektedir.

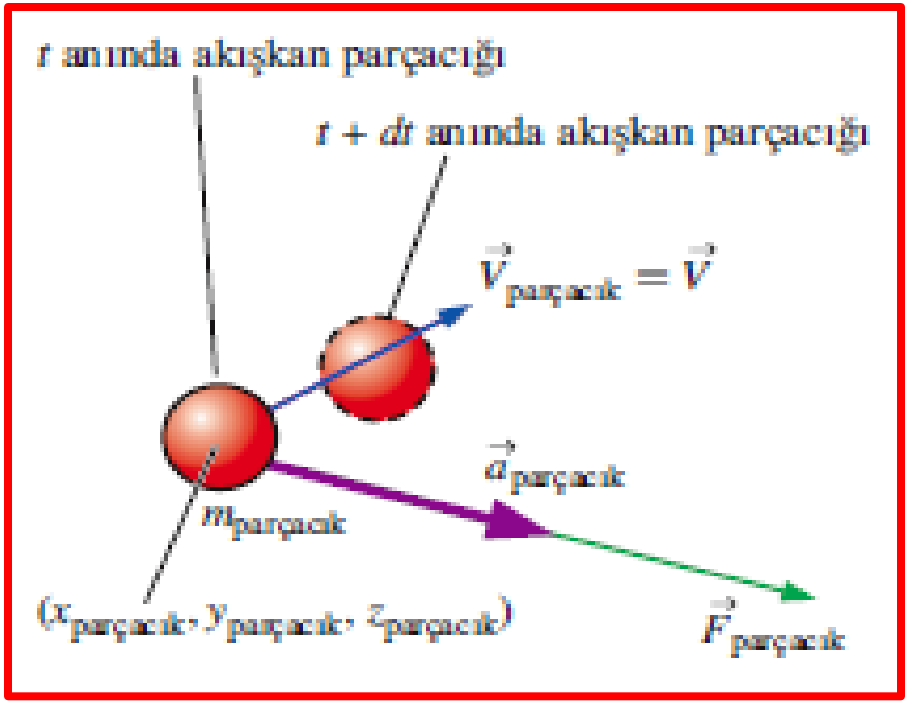
Örnek 4–1'deki **hız alanına ait hız vektörleri (mavi oklar).** Ölçek üstteki ok ile gösterilmiştir. **Siyah eğriler, bazı akım çizgilerinin hesaplanan hız vektörlerine göre yaklaşık şekillerini temsil etmektedir.** **Durma noktası mavi daire ile belirtilmiştir**. Gölgelendirilmiş bölge, **akış alanının bir giriş akışını temsil edebilecek** kısmını göstermektedir.

İvme Alanı

Sanki savrulma içeten çekme F dışa kayma var

Akışa ait hareket denklemleri (**Newton'un ikinci yasası gibi**) belirli bir cisim için yazılır, burada cisim olarak akışkan parçacığı veya maddesel parçacık dediğimiz küçük bir akışkan kütlesi alınır.

Eğer akış içerisinde hareket eden belirli bir **akışkan parçacığını** izleyecek olsaydık, **Lagrange yaklaşımını kullanıyor olurduk ve böylece hareket denklemleri doğrudan uygulanabilirdi. Örneğin bir parçacığın uzayda konumu, maddesel konum vektörü ($x_{parçacık}(t)$, $y_{parçacık}(t)$, $z_{parçacık}(t)$) ile tanımlanabilirdi.**



Newton'un ikinci yasasının bir akışkan parçacığına uygulanması. **İvme vektörü (mor ok), kuvvet vektörü (yeşil vektör)** ile aynı yöndedir, ancak **hız vektörü (mavi ok) farklı yönde olabilir ama bileşkesinin parcası. F ,a ya**

Newton'un ikinci yasası:

$$\vec{F}_{parçacık} = m_{parçacık}\,\vec{a}_{parçacık}$$

Bir akışkan parçacığının ivmesi:

$$\vec{a}_{parçacık} = \frac{d\vec{V}_{parçacık}}{dt}$$

$$\vec{V}_{\text{parçacık}}(t) \equiv \vec{V}\left(x_{\text{parçacık}}(t), y_{\text{parçacık}}(t), z_{\text{parçacık}}(t), t\right)$$

d/dx ile kısmı olanı aynı boyut olunca

$$\vec{a}_{\text{parçacık}} = \frac{d\vec{V}_{\text{parçacık}}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}(x_{\text{parçacık}}, y_{\text{parçacık}}, z_{\text{parçacık}}, t)}{dt}$$

$$= \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial x_{\text{parçacık}}}\frac{dx_{\text{parçacık}}}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y_{\text{parçacık}}}\frac{dy_{\text{parçacık}}}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z_{\text{parçacık}}}\frac{dz_{\text{parçacık}}}{dt}$$

$$\vec{a}_{\text{parçacık}}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$

Bir akışkan parçacığının alan değişkeni şeklinde ifade edilen ivmesi:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$$

Yerel İvme
konumdaki kuvvet
bir noktaki ivme:

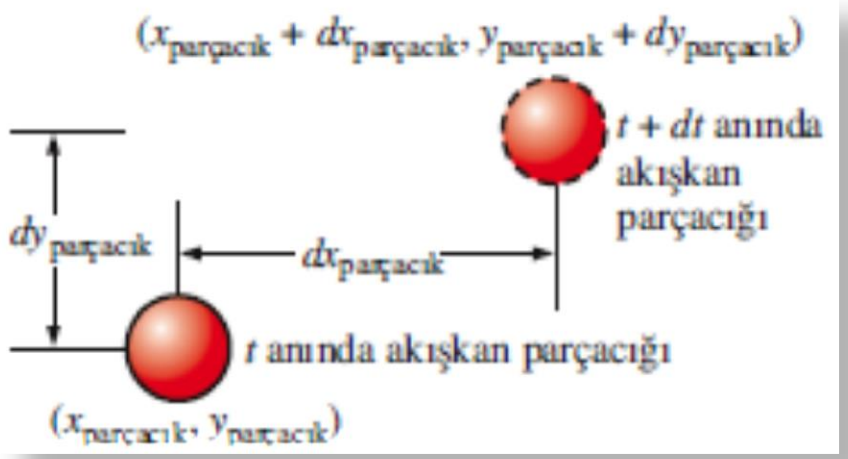
$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$$

Taşınım İvmesi
(yer değiştirme)
:

$$(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$$

Gradyen veya del operatörü:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$



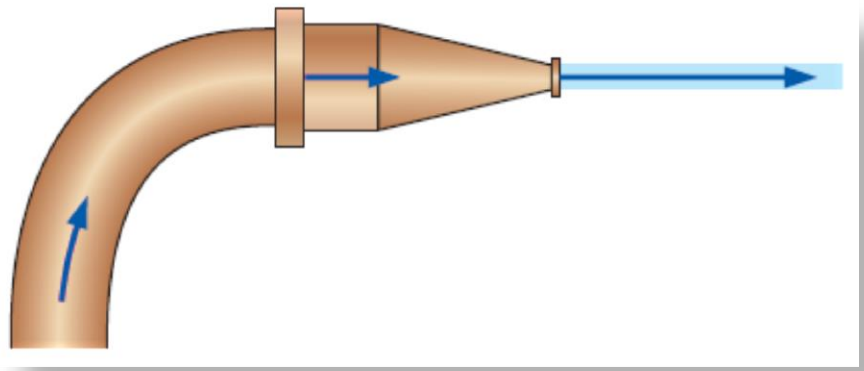
Bir akışkan parçacığını izlerken **hızın *x*-bileşeni *u*, $dx_{parçacık}/dt = u$ şeklinde** tanımlanır. Benzer **şekilde $v = dy_{parçacık}/dt$ ve $w = dz_{parçacık}/dt$ olur.** Buradaki hareket, basitlik açısından sadece **iki boyutta gösterilmiştir.**

İvme Vektörünün Kartezyen Koordinatlardaki Bileşenleri:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$



İVMEYİ ANLAMAK:Bir bahçe hortumu fıskiyesindeki su akışı, **akış daimi olsa bile akışkan parçacıklarının ivmelenebildiğini göstermektedir.** Bu örnekte **çıkıştaki su hızı hortum içerisindeki su hızından çok daha yüksektir, bu da akış daimi olma-sına rağmen akışkan parçacıklarının ivmelendikleri anlamına gelmektedir.**

ÖRNEK 4–2 Fıskiye İçerisinden Geçen Akışkan Parçacıklarının İvmelenmesi

Büşra Şekil 4–8'de gösterilene benzer bir fıskiye kullanarak arabasını yıkamaktadır. Fıskiyenin giriş çapı 10 mm, çıkış çapı 5 mm ve uzunluğu 100 mm'dir (Şekil 4–9'a bakınız). Bahçe hortumu (ve fıskiye) içerisinden geçen suyun hacimsel debisi 3.2 L/dakika olup akış daimidir. Fıskiyenin eksen çizgisi

ÇÖZÜM Fıskiyenin eksen çizgisi üzerindeki bir akışkan parçacığı izlenerek ivme hesaplanacaktır.

Kabuller **1** Akış daimi ve sıkıştırılamazdır. **2** x-yönü fıskiyenin eksen çizgisi boyunca olacak şekilde alınmıştır. **3** Simetriden ötürü eksen çizgisi boyunca $v = w = 0$'dır, ancak u fıskiye boyunca artmaktadır.

Analiz Akış daimi olduğundan ivmenin sıfır olacağı düşünülebilir. Ancak bu daimi akış alanı için yerel ivme $\partial\vec{V}/\partial t$ sıfır olmasına rağmen, taşınım ivmesi $(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$ sıfır *değil*dir. İlk olarak, hacimsel debiyi en-kesit alanına bölmek suretiyle, fıskiyenin giriş ve çıkışlarında x-hız bileşeninin ortalama değerlerini hesaplayalım:

Giriş hızı:

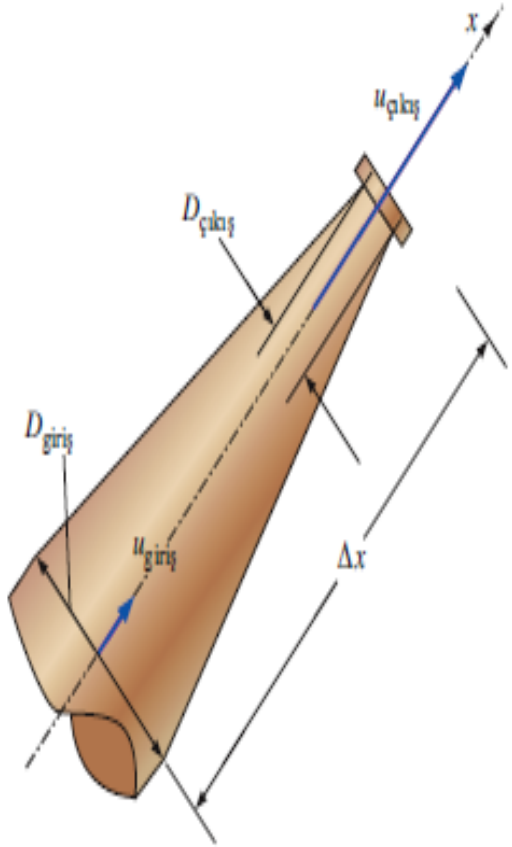
$$u_{\text{giriş}} \cong \frac{\dot{V}}{A_{\text{giriş}}} = \frac{4\dot{V}}{\pi D_{\text{giriş}}^2} = \frac{4(3.2\ \text{L/dakika})\left(\frac{1\ \text{m}^3}{1000\ \text{L}}\right)\left(\frac{1\ \text{dakika}}{60\ \text{s}}\right)}{\pi(10\times10^{-3}\ \text{m})^2} = 0.68\ \text{m/s}$$

Benzer şekilde ortalama çıkış hızı $u_{\text{çıkış}} = 2.72$ m/s olarak bulunur. Şimdi de ivmeyi aynı sonuçları veren iki farklı yöntem ile hesaplayalım. İvmenin x-yönündeki ortalama değeri için birinci yöntem; hızdaki değişimin, akışkan parçacığının fıskiye içerisindeki tahmini **kalış zamanı** olan $\Delta t = \Delta x/u_{\text{ort}}$'ya bölümüyle hesaplanmasıdır (Şekil 4–10). Tanım gereği ivme hızın birim zamandaki değişimi olduğundan aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Yöntem A:

$$a_x \cong \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_{\text{çıkış}} - u_{\text{giriş}}}{\Delta x/u_{\text{ort}}} = \frac{u_{\text{çıkış}} - u_{\text{giriş}}}{2\,\Delta x/(u_{\text{çıkış}} + u_{\text{giriş}})} = \frac{u_{\text{çıkış}}^2 - u_{\text{giriş}}^2}{2\,\Delta x}$$

İkinci yöntemde ise kartezyen koordinatlardaki ivme alanının bileşenleri kullanılır (Denklem 4–11):



(10x10-3)2 / (5x 10-3)2: 4

uçıkış: 4 x 0.68: 2.72

Yöntem B:

$$a_x = \underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}}_{0\ \text{Daimi}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}}_{0\ \text{v = 0 eksen boyunca}} + \underbrace{w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}}_{0\ \text{w = 0 eksen boyunca}} \cong u_{\text{ort}}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Buna göre taşınım terimlerinden sadece birinin sıfırdan farklı olduğu görülmektedir. Fıskiye içerisindeki ortalama akışkan hızı, fıskiye girişindeki ve çıkışındaki hızların ortalaması olarak alınabilir. Ayrıca $\partial u/\partial x$ türevinin ortalama değeri için **birinci-mertebeden sonlu fark yaklaştırımı** kullanılabilir (Şekil 4–11):

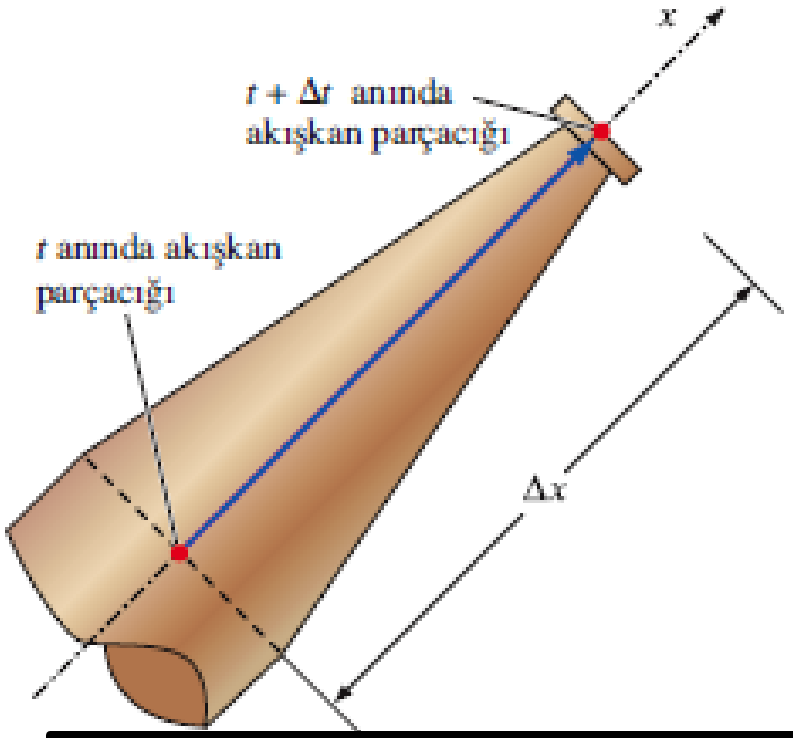
$$a_x \cong \frac{u_{\text{çıkış}} + u_{\text{giriş}}}{2}\,\frac{u_{\text{çıkış}} - u_{\text{giriş}}}{\Delta x} = \frac{u_{\text{çıkış}}^2 - u_{\text{giriş}}^2}{2\,\Delta x}$$

Yöntem B'nin sonucu yöntem A'nınki ile aynıdır. Soruda verilen değerlerin yerine konulmasıyla ivme şu şekilde elde edilir.

Eksenel ivme:

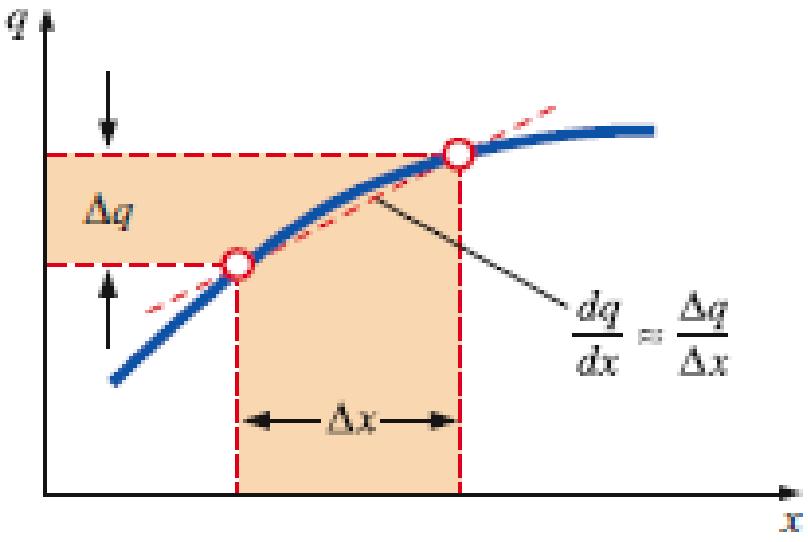
$$a_x \cong \frac{u_{\text{çıkış}}^2 - u_{\text{giriş}}^2}{2\,\Delta x} = \frac{(2.72\ \text{m/s})^2 - (0.68\ \text{m/s})^2}{2(0.1\ \text{m})} = 34.7\ \text{m/s}^2$$

İrdeleme Akışkan parçacıkları fıskiye içerisinden geçerken yerçekimi ivmesinin neredeyse 4 katı bir ivme ile hızlanmaktadır! Bu basit örnek açıkça göstermektedir ki, daimi akışta bile akışkan parçacığının ivmesi sıfıra eşit olmayabilir. İvme aslında **nokta fonksiyonu** olduğu halde, tüm fıskiye boyunca basit bir ortalama ivme değeri hesabı yapıldığı not edilmelidir.



ŞEKİL 4–10

Kalış zamanı Δt, bir akışkan parçacığının fıskiyenin girişinden çıkışına ulaşıncaya (Δx mesafesi) kadar geçen zaman olarak tanımlanır.



ŞEKİL 4–11

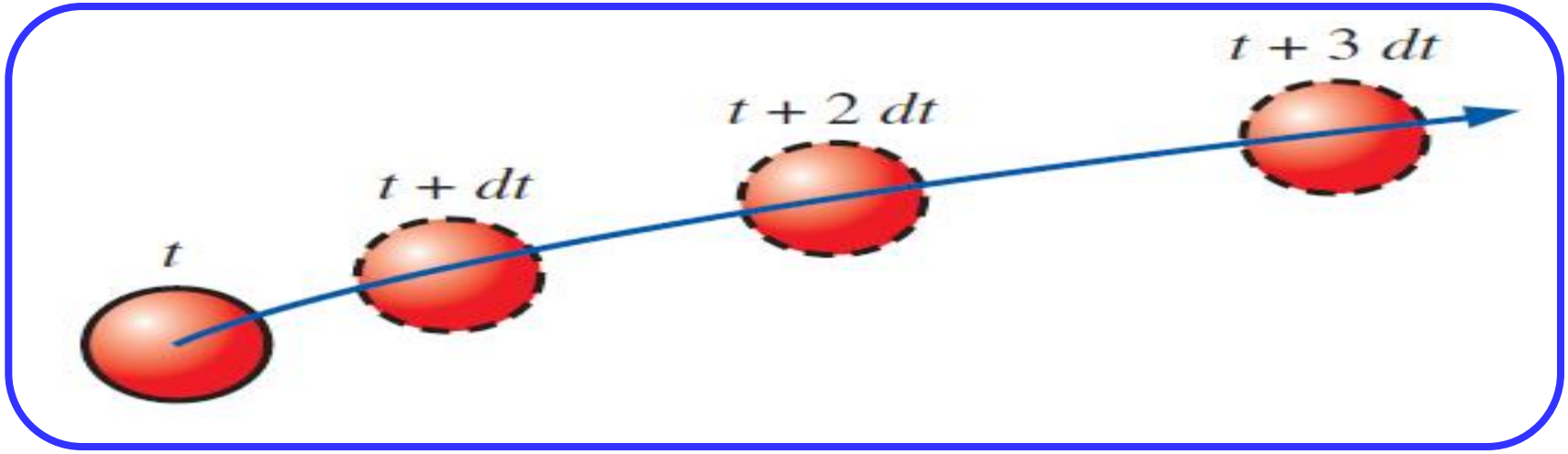
dq/dx için *birinci-mertebeden sonlu fark yaklaştırımı* basitçe, bağımlı değişkendeki (q'daki) değişimin bağımsız değişkendeki (x'teki) değişime oranıdır.

Maddesel Türev:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$$

Toplam türev operatörü d/dt'ye özel olarak **maddesel türev** adı verilir. Bu türev, *akış alanı içerisinde hareket eden bir akışkan parçacığının izlenmesi ile oluştuğunu* vurgulamak amacıyla özel olarak D/Dt biçiminde gösterilir.

Maddesel türevin diğer isimleri arasında **toplam türev, parçacık türevi, Lagrange türevi, Euler türevi** ve **esas türev** de vardır:



Maddesel türev D/Dt, akış alanı boyunca hareket eden bir akışkan parçacığının izlenmesi esasına göre tanımlanır. Şekilde akışkan parçacığı sağa ve yukarı doğru hareket etderek sağa doğru ivmelenmektedir.

Maddesel türev:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})$$

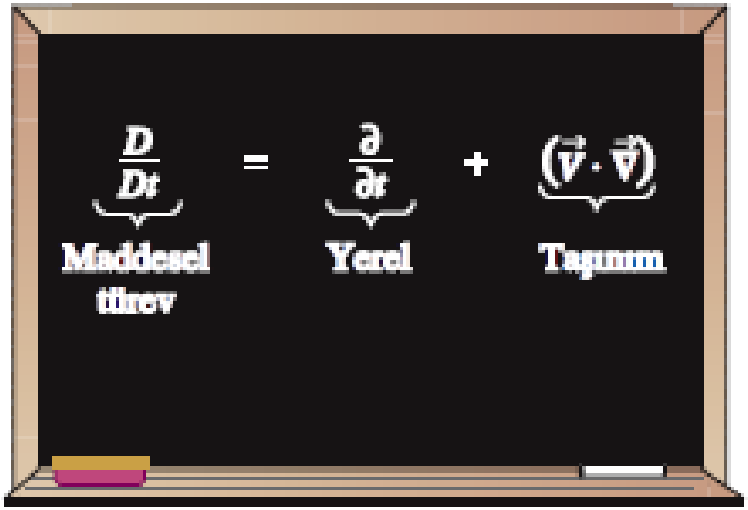
Maddesel ivme:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$$

Basıncın maddesel türevi:

$$\frac{DP}{Dt} = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})P$$

Taşınım İvmesi (yer değiştirme)



Maddesel türev D/Dt, yerel veya daimi olmayan kısım ile taşınım kısmından oluşur.

ÖRNEK 4–3 Daimi Bir Hız Alanının Maddesel İvmesi

Örnek 4–1'deki daimi, sıkıştırılamaz iki-boyutlu hız alanını göz önüne alınız. (a) ($x = 2$ m, $y = 3$ m) noktasındaki maddesel ivmeyi hesaplayınız. (b) Örnek 4–1'de kullanılan noktalardaki maddesel ivme vektörlerini çiziniz.

ÇÖZÜM Verilen hız alanı için belirli bir noktadaki maddesel ivme vektörü hesaplanacak ve akış alanı içerisindeki bir dizi konumda çizilecektir.

Kabuller **1** Akış daimi ve sıkıştırılamazdır. **2** Akış iki-boyutludur, yani hızın z-bileşeni yoktur ve u veya v, z ile değişmemektedir.

Analiz (*a*) Örnek 4–1'deki Denklem 1 ile verilen hız alanını ve maddesel ivmenin kartezyen koordinatlardaki bileşenlerini veren Denklem 4–11'i kullanarak ivme vektörünün sıfırdan farklı olan iki bileşenine ait ifadeleri yazalım:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= 0 + \overbrace{(0.5 + 0.8x)(0.8)} + \overbrace{(1.5 - 0.8y)(0)} + 0 = (0.4 + 0.64x)\ \text{m/s}^2$$

ve

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

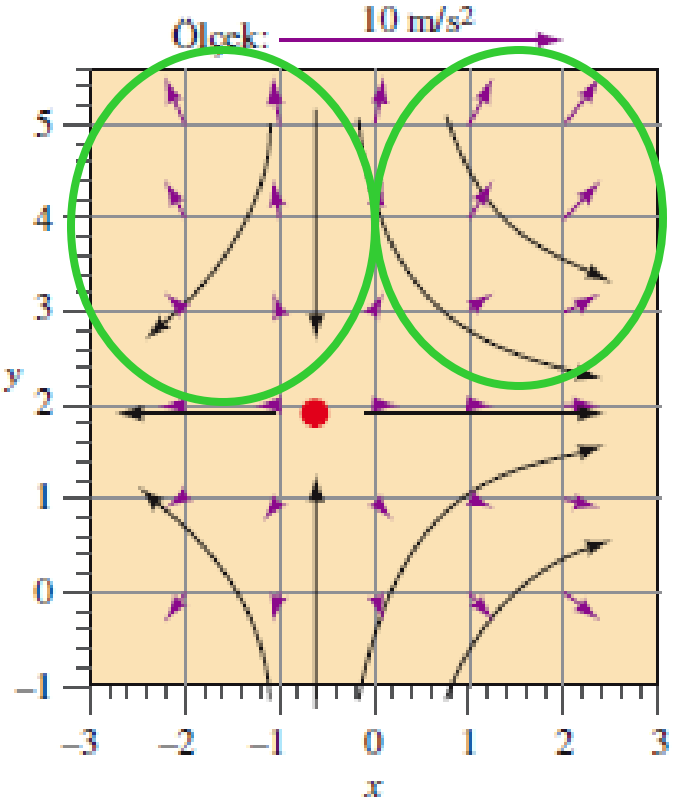
$$= 0 + \overbrace{(0.5 + 0.8x)(0)} + \overbrace{(1.5 - 0.8y)(-0.8)} + 0 = (-1.2 + 0.64y)\ \text{m/s}^2$$

Buna göre ($x = 2$ m, $y = 3$ m) noktasında $a_x = 1.68$ m/s^2 ve $a_y = 0.720$ m/s^2 olur.

(*b*) (*a*)'daki denklemler akış bölgesinde verilen sınırlar içerisindeki x- ve y-değerlerinden oluşan bir dizi noktaya uygulanarak elde edilen ivme vektörleri Şekil 4–14'te çizilmiştir.

Daimi Bir Hız Alanının Maddesel İvmesi

İrdeleme Akış *daimi* olmasına rağmen ivme alanı sıfır değildir. Şekil 4–14'te durma noktasının yukarısında (y = 1.875 m'nin yukarısı) ivme vektörleri, durma noktasından uzaklaştıkça büyüklükleri artan bir şekilde yukarı doğru yönlenmiş olarak çizilmiştir. İvme vektörleri, durma noktasının sağına doğru (x = – 0.625 m'nin sağına doğru) ve yine durma noktasından uzaklaştıkça büyüklükleri artan bir şekilde sağa doğru yönlenmiştir. Bu durum, Şekil 4–4'teki hız vektörleri ve Şekil 4–14'teki akım çizgileri ile nitelik bakımından uyuşmaktadır. Şöyle ki, akış alanının yukarı-sağ kısmında akışkan parçacıkları yukarı-sağ yönde ivmelenmektedir ve bu parçacıklar yukarı-sağa doğru olan **merkezcil ivme**den ötürü saatin tersi yönünde dönerek yön değiştirecektir. y = 1.875 m'nin aşağısındaki akış, bu simetri çizgisinin yukarısındaki akışın aynadaki görüntüsü şeklinde; benzer şekilde x = –0.625 m'nin solundaki akış da bu simetri çizgisinin sağındaki akışın aynadaki görüntüsü şeklindedir.



Örnek 4–1 ve Örnek 4–3'teki hız alanına ait ivme vektörleri (mor oklar). Ölçek üstteki ok ile gösterilmiştir . Siyah eğriler ise hesaplanan hız vektörlerine göre çizilmiş bazı akım çizgilerinin yaklaşık şekillerini temsil etmektedir. Durma noktası kırmızı daire ile gösterilmiştir.

PROBLEM ÇÖZÜMLERİ

4 -17 Sabit, sıkıştırılamaz akış düşünün. iki boyutlu, Altaki şekil boyunca akış (Şekil P4-17). Bu akış için basit bir yaklaşık hız alanı $\vec{V} = (u, v) = (U_0 + bx)\vec{i} - by\vec{j}$ (1)

Burada Uo, x = 0'da yatay hızdır. bu denklemin duvarlar boyunca viskoz etkileri görmezden geldiğini, ancak akış alanının çoğunluğu boyunca makul bir yaklaşım olduğunu unutmayın. bu ŞEKİL içinden geçen sıvı parçacıkları için malzeme hızlanmasını hesaplayınız. Cevabınızı iki şekilde veriniz: (1) hızlanma bileşenleri ax ve ay ve (2) hızlanma olarak vektör a

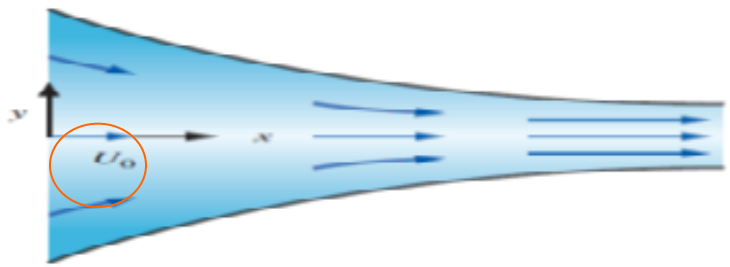


FIGURE P4—17

4-17

Solution We are to calculate the material acceleration for a given velocity field.

Assumptions 1 The flow is steady. 2 The flow is incompressible. 3 The flow is two-dimensional in the x-y plane.

Analysis The velocity field is

$$\vec{V} = (u, v) = (U_0 + bx)\vec{i} - by\vec{j} \qquad (1)$$

The acceleration field components are obtained from its definition (the material acceleration) in Cartesian coordinates,

Sayfa 16 denklemler

$$a_x = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}} = \cancel{0} + (U_0 + bx)b + (-by)0 + 0$$ **m/s ((m/ s) /m) : m/s²**

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = 0 + (U_0 + bx)0 + (-by)(-b) + 0 \qquad (2)$$

where the unsteady terms are zero since this is a steady flow, and the terms with w are zero since the flow is two-dimensional. Eq. 2 simplifies to

Material acceleration components: $\boxed{a_x = b(U_0 + bx) \qquad a_y = b^2 y}$ (3)

In terms of a vector,

Material acceleration vector: $\boxed{\vec{a} = b(U_0 + bx)\vec{i} + b^2 y\vec{j}}$ (4)

Discussion For positive x and b, fluid particles accelerate in the positive x direction. Even though this flow is steady,

4.18 **Yakınsak akışı sabit olarak modellenir. Problemin iki boyutlu hızı 4-17. basınç alanı** $P = P_0 - \frac{\rho}{2}\left[2U_0bx + b^2(x^2 + y^2)\right]$ **Po'nun x = 0'daki basınç olduğu yerdir. Akışkan partikülünü takiben basınç değişim hızı için bir ifade üretin.**

4-18

Solution For a given pressure and velocity field, we are to calculate the rate of change of pressure following a fluid particle.

Assumptions 1 The flow is steady. 2 The flow is incompressible. 3 The flow is two-dimensional in the x-y plane.

Analysis The pressure field is

Pressure field:

$$P = P_0 - \frac{\rho}{2}\left[2U_0bx + b^2\left(x^2 + y^2\right)\right] \qquad (1)$$

By definition, the material derivative, when applied to pressure, produces the rate of change of pressure following a fluid particle. Using Eq. 1 and the velocity components from the previous problem,

$$\frac{DP}{Dt} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial P}{\partial t}}}_{\text{Steady}} + u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y} + \underbrace{\cancel{w\frac{\partial P}{\partial z}}}_{\text{Two-dimensional}} \qquad (2)$$

Sayfa 16 denklemler

$$= \left(U_0 + bx\right)\left(-\rho U_0 b - \rho b^2 x\right) + \left(-by\right)\left(-\rho b^2 y\right)$$

where the unsteady term is zero since this is a steady flow, and the term with w is zero since the flow is two-dimensional. Eq. 2 simplifies to the following rate of change of pressure following a fluid particle:

$$\boxed{\frac{DP}{Dt} = \rho\left[-U_0^2 b - 2U_0 b^2 x + b^3\left(y^2 - x^2\right)\right]} \qquad (3)$$

x = 0'daki

Discussion The material derivative can be applied to any flow property, scalar or vector. Here we apply it to the pressure, a scalar quantity.

4.19 **X Y düzleminde aşağıdaki bileşenler tarafından sabit, sıkıştırılamaz, iki boyutlu bir hız alanı verilir:**

$$u = 1.85 + 2.33x + 0.656y$$
$$v = 0.754 - 2.18x - 2.33y$$

Hızlanma alanını hesaplayın (hızlanma bileşenleri ax ve ay için ifadeyi bulun) ve ivmeyi (x, y) = -1,2 noktasından hesaplayın).

4-19

Solution For a given velocity field we are to calculate the acceleration.

Assumptions 1 The flow is steady. 2 The flow is two-dimensional in the x-y plane.

Analysis The velocity components are

Velocity components: $u = 1.85 + 2.33x + 0.656y \qquad v = 0.754 - 2.18x - 2.33y$ (1)

The acceleration field components are obtained from its definition (the material acceleration) in Cartesian coordinates,

$$a_x = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}} = 0 + (1.85 + 2.33x + 0.656y)(2.33) + (0.754 - 2.18x - 2.33y)(0.656) + 0$$
$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = 0 + (1.85 + 2.33x + 0.656y)(-2.18) + (0.754 - 2.18x - 2.33y)(-2.33) + 0 \qquad (2)$$

where the unsteady terms are zero since this is a steady flow, and the terms with w are zero since the flow is two-dimensional. Eq. 2 simplifies to

Acceleration components: $\boxed{a_x = 4.8051 + 3.9988x \qquad a_y = -5.7898 + 3.9988y}$ (3)

At the point $(x,y) = (-1,2)$, the acceleration components of Eq. 3 are

Acceleration components at (-1,2): $a_x = 0.80628 \cong \mathbf{0.806} \qquad a_y = 2.2078 \cong \mathbf{2.21}$

Discussion The final answers are given to three significant digits. No units are given in either the problem statement or the answers. We assume that the coefficients have appropriate units.

4.20 **X Y düzleminde aşağıdaki bileşenler tarafından sabit, sıkıştırılamaz, iki boyutlu bir hız ala**

verilir:

$$u = 0.205 + 0.97x + 0.851y$$

$$v = -0.509 + 0.953x - 0.97y$$

Hızlanma alanını hesaplayın (hızlanma bileşenleri ax ve ay için ifadeyi bulun) ve ivmeyi (x, y) =

1.5 noktasından hesaplayın.

4-20

Solution For a given velocity field we are to calculate the acceleration.

Assumptions **1** The flow is steady. **2** The flow is two-dimensional in the x-y plane.

Analysis The velocity components are

Velocity components: $u = 0.205 + 0.97x + 0.851y \qquad v = -0.509 + 0.953x - 0.97y$ (1)

The acceleration field components are obtained from its definition (the material acceleration) in Cartesian coordinates,

$$a_x = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}} = 0 + (0.205 + 0.97x + 0.851y)(0.97) + (-0.509 + 0.953x - 0.97y)(0.851) + 0$$

$$a_y = \cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \cancel{w\frac{\partial v}{\partial z}} = 0 + (0.205 + 0.97x + 0.851y)(0.953) + (-0.509 + 0.953x - 0.97y)(-0.97) + 0 \qquad (2)$$

where the unsteady terms are zero since this is a steady flow, and the terms with w are zero since the flow is two-dimensional. Eq. 2 simplifies to

Acceleration components:

$$a_x = -0.234309 + 1.751903x$$
$$a_y = 0.689095 + 1.751903y \qquad (3)$$

At the point $(x,y) = (2, 1.5)$, the acceleration components of Eq. 3 are

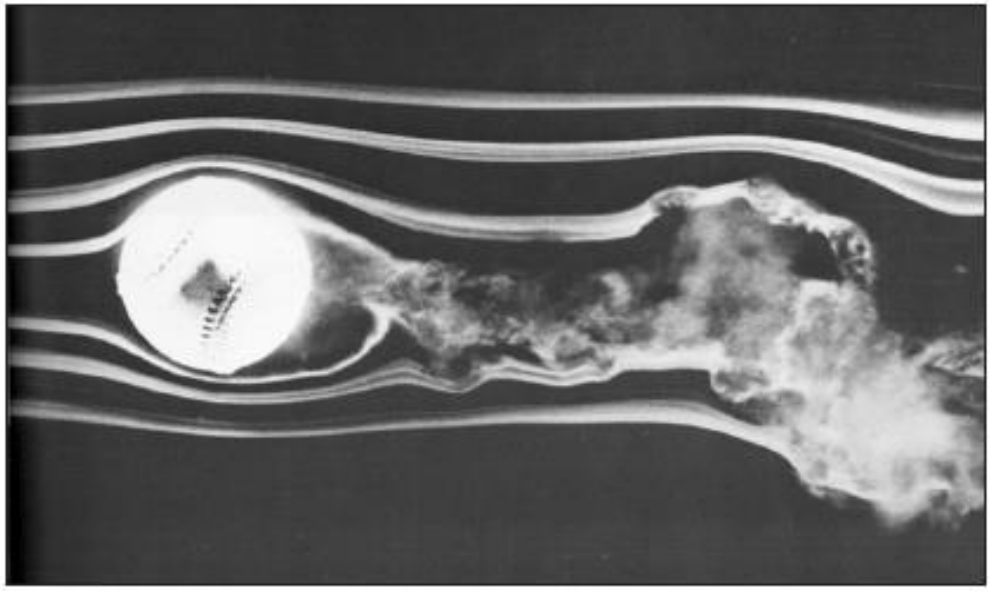
Acceleration components at (2, 1.5):

$$a_x = 3.269497 \cong \mathbf{3.27}$$
$$a_y = 3.31699 \cong \mathbf{3.32}$$

Discussion The final answers are given to three significant digits. No units are given in either the problem statement or

4–2 ■ AKIŞ DESENLERİ VE AKIŞIN GÖRSELLEŞTİRİLMESİ

- **Akışın Görselleştirilmesi:** Akış alanı özelliklerinin görsel olarak incelenmesidir.
- Her ne kadar akışkanlar dinamiğinin nicel analizi ileri matematik bilgisi gerektirse de, akışın görselleştirilmesi yoluyla akış alanı özelliklerinin görsel analizinden çok şey öğrenilebilir.
- Akışın görselleştirilmesi sadece yandaki şekildeki örnekteki gibi fiziksel deneylerde değil aynı zamanda *sayısal* çözümlerde de [**hesaplamalı akışkanlar dinamiği (HAD)**] faydalıdır.
- Gerçekten de HAD'ı kullanan bir mühendisin sayısal sonucu elde ettikten sonra yaptığı ilk şey akışı görselleştirmedir. Böylelikle sade-ce nicel verilerden ve sayılardan oluşan bir liste elde etmekten çok "olayın bütününü" göz önünde canlandırabilir.



Dönen beysbol topu. F. N. M. Brown son yıllarının çoğunu Notre Dame Üniversitesi'ndeki rüzgar tünellerinde dumanlı görselleştirmeye ve bunu kullanmaya adamıştır. Burada akış hızı 23.5 m/s civarındadır ve top 630 devir/dakika hızla ile dönmektedir.

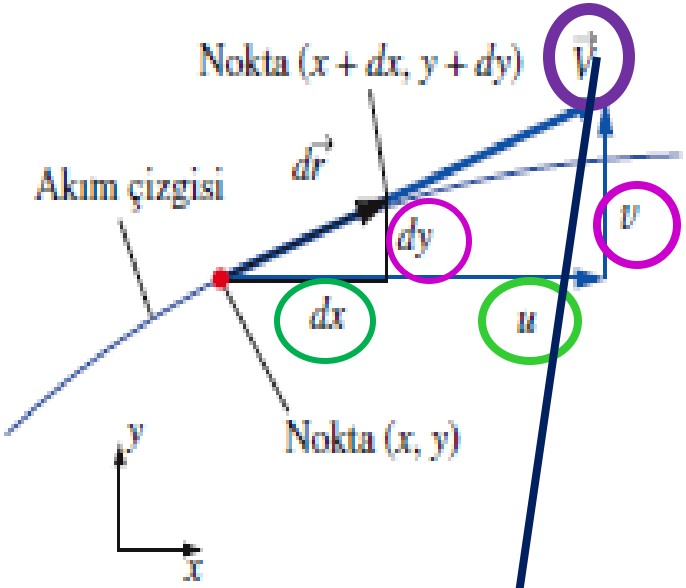
Akım Çizgileri ve Akım Tüpleri

Akım Çizgisi: Her noktada anlık yerel **hız vektörüne teğet olan bir eğridir**.

Akım çizgileri, akış alanı boyunca **akışkan hareketinin anlık yönlerini göstermeleri bakımından** oldukça faydalıdır.

Örneğin sürekli dolanımlı akış bölgeleri ve akışkanın **katı bir çeperden ayrılması akım çizgileri deseni yardımıyla kolaylıkla belirlenebilir**.

Daha sonra açıklanacağı gibi akım çizgilerinin, yörünge çizgileri ve çıkış çizgileri ile çakıştığı daimi akış alanları hariç, akım çizgileri deneysel yolla doğrudan gözlenemez.



ŞEKİL 4–16

İki-boyutlu bir akış için xy-düzlemindeki bir akım çizgisi boyunca $d\vec{r} = (dx, dy)$ yay uzunluğu, her noktada $\vec{V} = (u, v)$ anlık yerel hız vektörüne teğettir.

Bir akım çizgisi boyunca sonsuz küçük uzunluktaki bir yayı $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ olarak göz önüne alalım. Akım çizgisinin tanımı gereği $d\vec{r}$ yayı, yerel hız vektörü $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ ile paralel olmalıdır. Buna göre benzer üçgenlerden faydalanarak $d\vec{r}$ yayının bileşenlerinin, $\vec{V}$ hızının bileşenleri ile orantılı olması gerektiğini biliyoruz (Şekil 4–16):

Akım çizgisi denklemi:

$$\frac{dr}{V} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \tag{4–15}$$

Burada dr, $d\vec{r}$ vektörünün, V ise $\vec{V}$ vektörünün büyüklüğüdür. Denklem 4–15 basit olması için Şekil 4–16'da iki-boyutta gösterilmiştir. Bir hız alanı verildiğinde, Denklem 4–15 integre edilerek bu hız alanına ait akım çizgilerinin denklemleri bulunabilir. İki-boyutlu bir akış için aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir:

Yer değiştirme

xy-düzleminde akım çizgisi:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{bir akım çizgisi boyunca}} = \frac{v}{u} \tag{4–16}$$

Bazı basit hallerde Denklem 4–16 analitik olarak çözülebilse de genelde sayısal olarak çözülmesi gerekir. Her iki halde de keyfi bir integral sabiti ortaya çıkar. Integral sabiti için seçilen her değer farklı bir akım çizgisini temsil eder. Bu nedenle Denklem 4–16'yı sağlayan eğri *ailesi* akış alanının akım çizgilerini temsil eder.

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\,\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\,\vec{j}$$

ÖRNEK 4–4 **xy-düzleminde Akım Çizgileri—Analitik Çözüm**

Denklem 4–1'deki daimi, sıkıştırılamaz, iki-boyutlu hız alanı için akışın üst yarısının sağ tarafında ($x > 0$) birkaç akım çizgisi çiziniz ve Şekil 4–4'te çizilen hız vektörleri ile karşılaştırınız.

ÇÖZÜM Akım çizgileri için analitik bir ifade oluşturulacak ve bunlar akışın yukarı-sağ dördülünde çizilecektir.

Kabuller **1** Akış daimi ve sıkıştırılamazdır. **2** Akış iki-boyutludur, yani hızın z-bileşeni yoktur ve u veya v, z ile değişmemektedir.

Analiz Burada Denklem 4–6 uygulanabilir. Buna göre bir akım çizgisi boyunca aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{1.5 - 0.8y}{0.5 + 0.8x}$$

Bu diferansiyel denklem değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözülebilir:

$$\frac{dy}{1.5 - 0.8y} = \frac{dx}{0.5 + 0.8x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{1.5 - 0.8y} = \int \frac{dx}{0.5 + 0.8x}$$

Bazı cebirsel işlemlerden sonra bir akım çizgisi boyunca aşağıdaki bağıntı elde edilir:

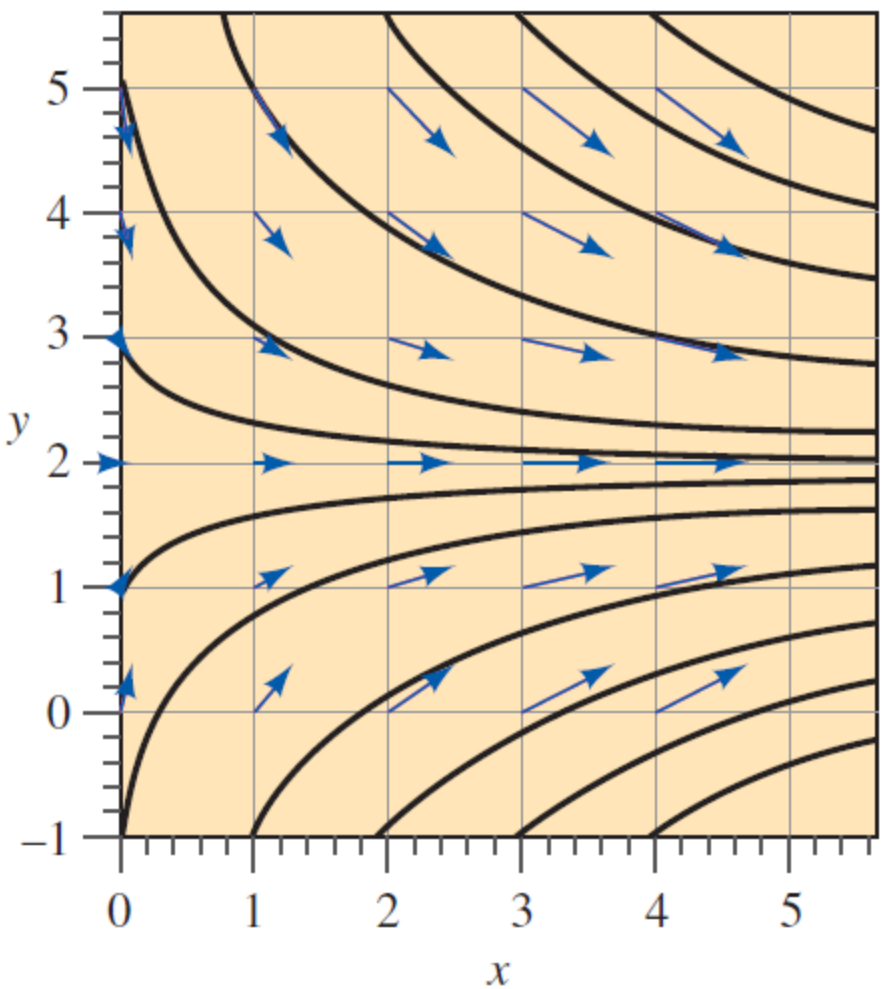
$$y = \frac{C}{0.8(0.5 + 0.8x)} + 1.875$$

Burada C keyfi integral sabitidir ve C'ye akım çizgilerini çizmek için çeşitli değerler verilebilir. Verilen akış alanına ait birkaç akım çizgisi Şekil 4–17'de gösterilmiştir.

İrdeleme Şekil 4–4'teki hız vektörleri Şekil 4–17'deki akım çizgilerinin üzerine eklenmiştir. Hız vektörlerinin her noktada akım çizgilerine teğet olması bakımından uyum mükemmeldir. Akış hızının büyüklüğünün tek başına akım çizgilerinden bulunamayacağı not edilmelidir.

Daimi, Sıkıştırılamaz ve İki Boyutlu Bir Hız Alanı İçin Akım Çizgileri:

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 - 0.8y)\vec{j}$$



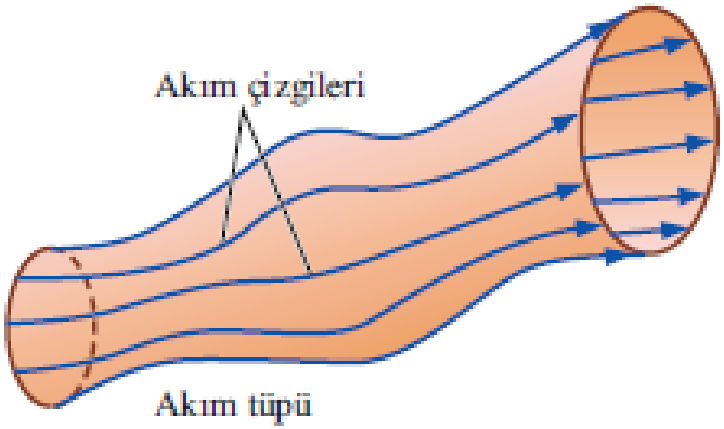
Örnek 4–4'teki **hız alanına ait akım çizgileri (siyah eğriler);** karşılaştırma için Şekil 4–4'teki **hız vektörleri de (mavi oklar) akım çizgilerinin üzerine** eklen-miştir.

Hız vektörlerinin her noktada akım çizgilerine teğet olması bakımından uyum mükemmeldir. Akış hızının büyüklüğünün tek başına akım çizgilerinden doğrudan bulunamayacağı not edilmelidir.

Fiber-optik kablo demetlerinden oluşan haberleşme kabloları gibi bir **akım tüpü** de bir akım çizgisi demetinden oluşur.

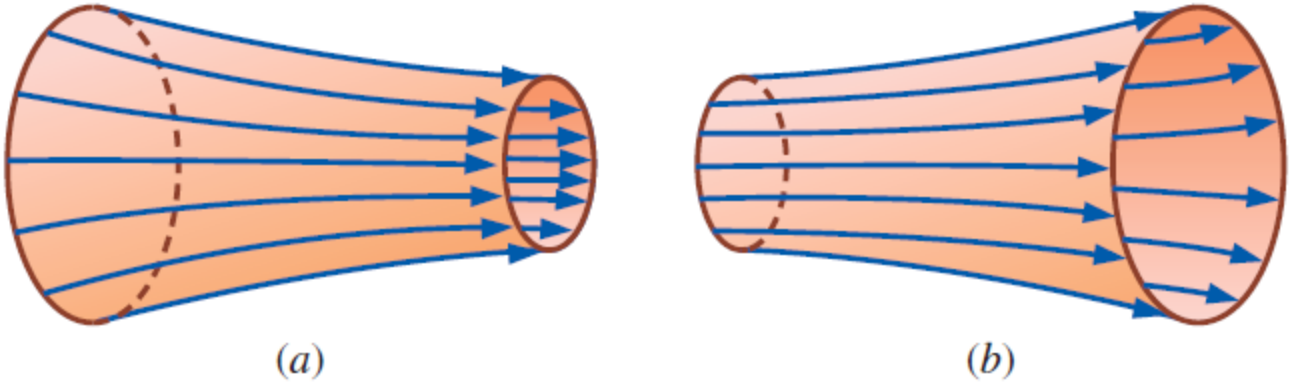
Akım çizgileri her noktada yerel hıza paralel olduğundan, tanım gereği akışkan bir akım çizgisinin bir tarafından diğer tarafına geçemez.

Bir akım tüpü içerisindeki akışkan içeride kalır ve akım tüpünün sınırını geçemez.



Akım tüpü ayrı ayrı akım çizgilerinden oluşmuş bir akım çizgileri demetidir.

Hem akım çizgilerinin hem de akım tüplerinin anlık büyüklükler olduğu ve belirli bir andaki hız alanına göre tanımlandıkları unutulmamalıdır.

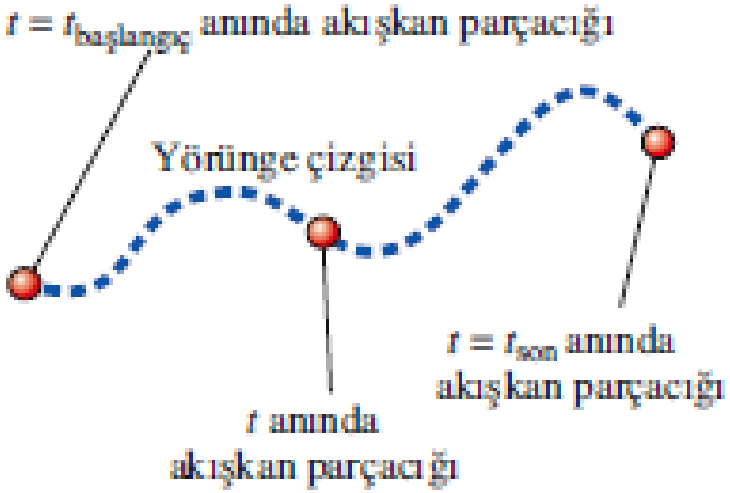


Sıkıştırılamaz bir akış alanında akım tüpünün çapı *(a)* akış hızlandıkça küçülür, *(b)* akış yavaşladıkça artar.

Yörünge Çizgileri

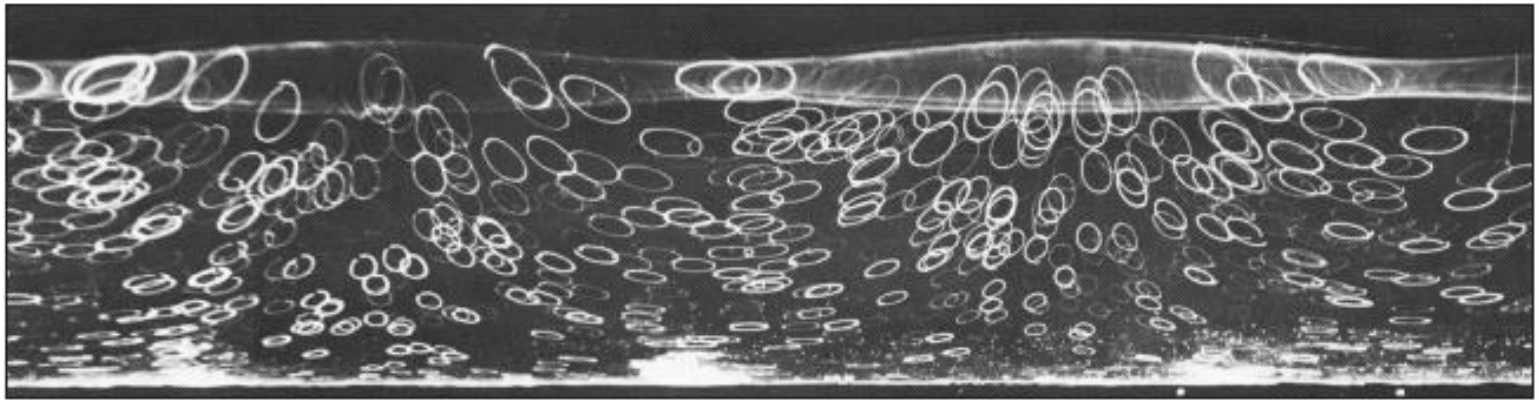
Yörünge Çizgisi: Yörünge çizgisi tek bir akışkan parçacığının belirli bir süre boyunca kat ettiği gerçek yoldur.

- Yörünge çizgisi tek bir akışkan parçacığının belirli bir süre boyunca kat ettiği gerçek yoldur.
- Yörünge çizgisi, bir akışkan parçacığının sonlu bir zaman aralığında izinin sürülmesi ile elde edilen ve daha önce açıklanan maddesel konum vektörü ($x_{\text{parçacık}}(t)$, $y_{\text{parçacık}}(t)$, $z_{\text{parçacık}}(t)$) ile aynıdır.



Yörünge çizgisi bir akışkan parçacığının izlediği gerçek yörünge izlenerek oluşturulur.

Su içerisinde askıda bulunan beyaz izli parçacıklar ile oluşturulan uzun süreli pozlama tekniği ile fotoğraflanan yörünge çizgileri. Dalgalar bir dalga periyodu boyunca yatay olarak geçtikçe, her bir parçacık eliptik bir yörünge üzerinde hareket etmektedir.

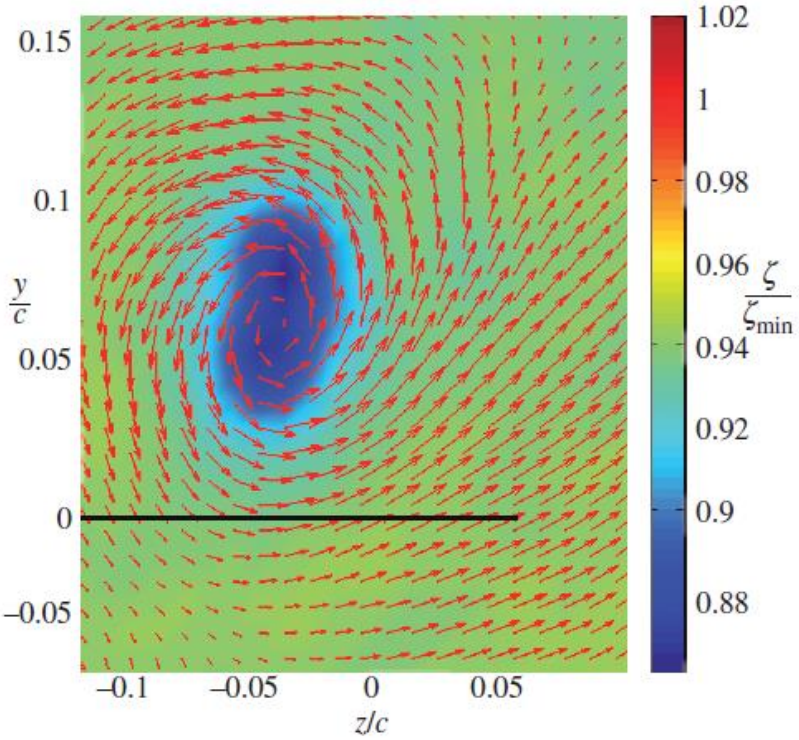


Parçacık Görüntülü Hız Ölçümü (PIV): Akış içerisindeki bir düzlem boyunca hız alanını ölçmek için parçacıkların yörünge çizgilerinin kısa bölümlerinden yararlanılan modern deneysel bir tekniktir.

Son gelişmeler ile teknik üç boyuta da genişletilmiştir.

PIV'de önceki slayttaki şekle çok benzer şekilde izli küçük parçacıklar akışkan içerisinde askıda kalmaktadır. Bununla birlikte burada, film ya da fotosensör üzerinde hareket eden her bir parçacığa ait iki parlak nokta (kamera ile kaydedilir) oluşturmak üzere akış iki ışık kaynağı ile (genellikle lazer ışık demetiyle) aydınlatılır.

Daha sonra izli parçacıkların akış ile birlikte hareket edecek kadar küçük oldukları varsayımıyla, parçacığın her bir konumundaki hız vektörlerinin yönü ve büyüklükleri elde edilebilir.



Hücum açısı konumundaki NACA-66 kanat profilinin art izi içindeki uç vorteksine ait stereo PIV ölçümleri. Renkli konturlar, renk haritasında gösterilen minimum değere oranlanarak elde edilen yerel vortisiteyi göstermektedir. Vektörler ölçüm düzlemindeki akışkan hareketini göstermektedir. Siyah çizgi ise kanat firar kenarının yukarıakımının konumunu göstermektedir. Tüm koordinatlar kanat kirişiyle oranlanarak normalize edilmiştir ve merkez olarak kanadın dibi alınmıştır.

Verilen bir hız alanı için yörünge çizgileri sayısal olarak da hesaplanabilir. Bunun için izli parçacığın konumu, bir $\vec{x}_{\text{başlangıç}}$ konumundan ve $t_{\text{başlangıç}}$ zamanından belirli bir t zamanına kadar integre edilir:

İzli parçacığın t zaman sonraki konumu: $$\vec{x} = \vec{x}_{\text{başlangıç}} + \int_{t_{\text{başlangıç}}}^{t} \vec{V}\,dt \qquad (4\text{–}17)$$

Denklem 4–17, $t_{\text{başlangıç}}$ ve t_{son} arasındaki bir t zamanı için hesaplandığında, Şekil 4–20'de gösterildiği gibi bu zaman aralığındaki $\vec{x}(t)$ eğrisi akışkan parçacığının izlediği yörünge çizgisi olur. Bazı basit akış alanları için Denklem 4–17 analitik olarak hesaplanabilir. Ancak daha karmaşık akışlar için sayısal integral alınmalıdır.

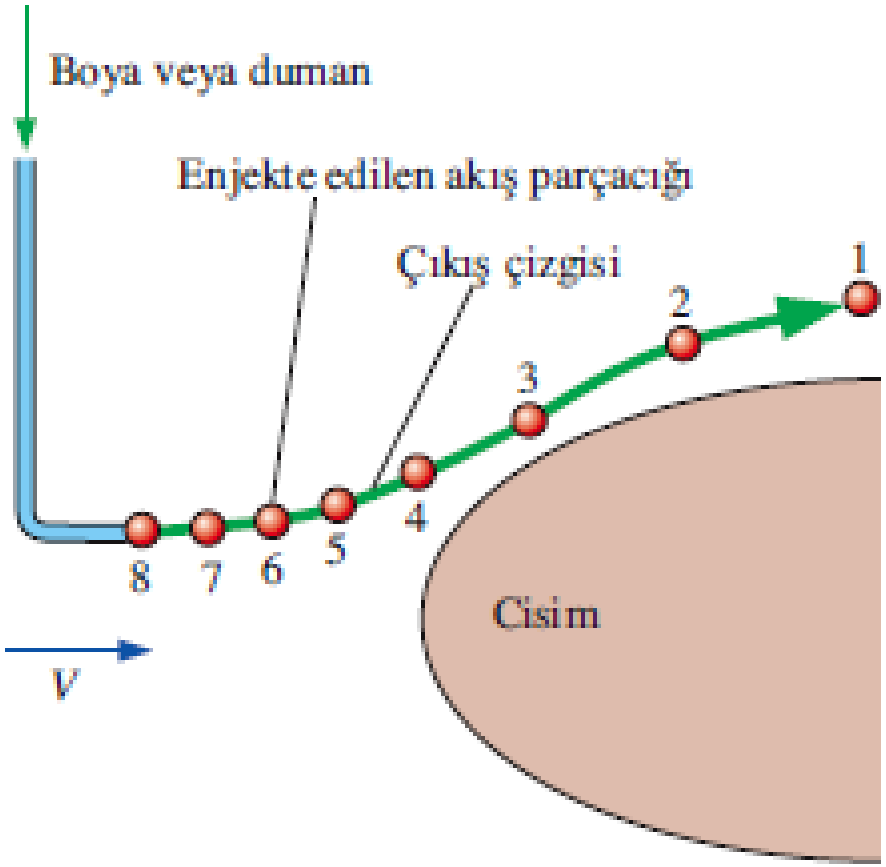
Akış daimi olduğunda her akışkan parçacığı akım çizgilerini izleyecektir. Bu nedenle *daimi akışlarda yörünge çizgileri akım çizgileri ile özdeş*tir.

Çıkış Çizgileri

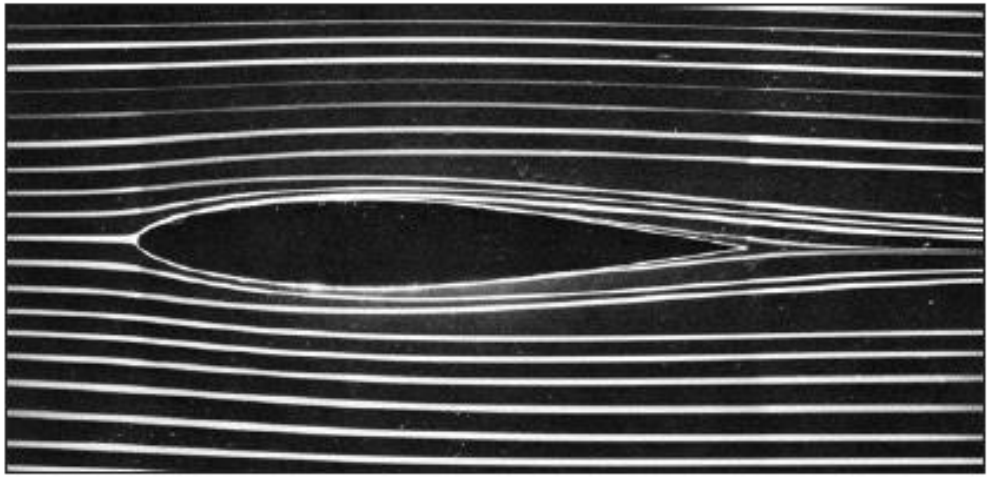
Çıkış Çizgisi: Akış içerisindeki belirli bir noktadan art arda geçmiş akışkan parçacıklarının geometrik yeridir.

Çıkış çizgileri, fiziksel bir deneyde oluşturulan en yaygın akış desenidir.

Bir akış içerisine küçük bir tüp yerleştirir ve sürekli bir şekilde izli akışkan (su akışında boya; hava akışında ise duman) akımı gönderirseniz, gözlemleyeceğiniz desen çıkış çizgisidir.



Çıkış çizgileri akış içerisindeki bir noktadan sürekli olarak boya ya da duman gönderilmesi ile oluşturulur. Numaralandırılmış izli parçacıklar (1'den 8'e kadar) arda arda gönderilmiştir.



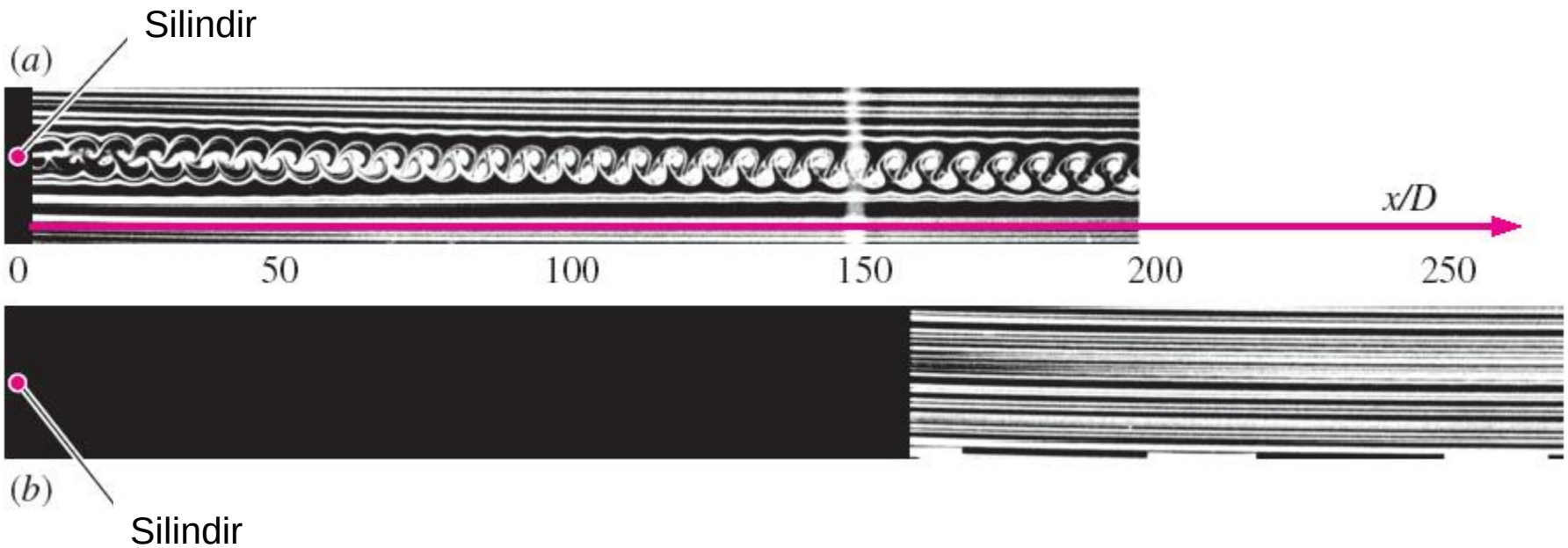
Yukarıakımdan renkli akışkan gönderilerek oluşturulmuş çıkış çizgileri. Akış daimi olduğundan bu çıkış çizgileri, akım çizgileri ve yörünge çizgileri ile aynı olur.

- Akış daimi olduğunda; akım çizgileri, yörünge çizgileri ve çıkış çizgileri birbirleriyle aynı olmasına karşın daimi olmayan akışta bu çizgiler birbirlerinden oldukça farklı olabilir.
- Temel farklılık, akım çizgilerinin verilen bir andaki *anlık* akış desenleri olmasına karşın, çıkış ve yörünge çizgilerinin bir *zaman geçmişi* ve dolayısıyla *yaşı* bulunan akış desenleri olmasından ileri gelmektedir.
- Çıkış çizgisi**,** *zaman-integralli* (belirli bir zaman süresinde oluşan) bir akış deseninin anlık görüntüsüdür.
- Diğer yandan yörünge çizgisi tek bir parçacığın belirli bir zaman periyodu boyunca *izlediği* akış yörüngesidir.

Şekildeki çıkış çizgileri, görüntü düzlemine dik yerleştirilen D çapındaki bir silindirin hemen aşağıakımına yerleştirilmiş bir duman telinden gönderilmektedir.

Şekildeki gibi bir çizgi boyunca birden fazla çıkış çizgisi gönderildiğinde oluşan görüntüye çıkış çizgileri **tarağı** denir.

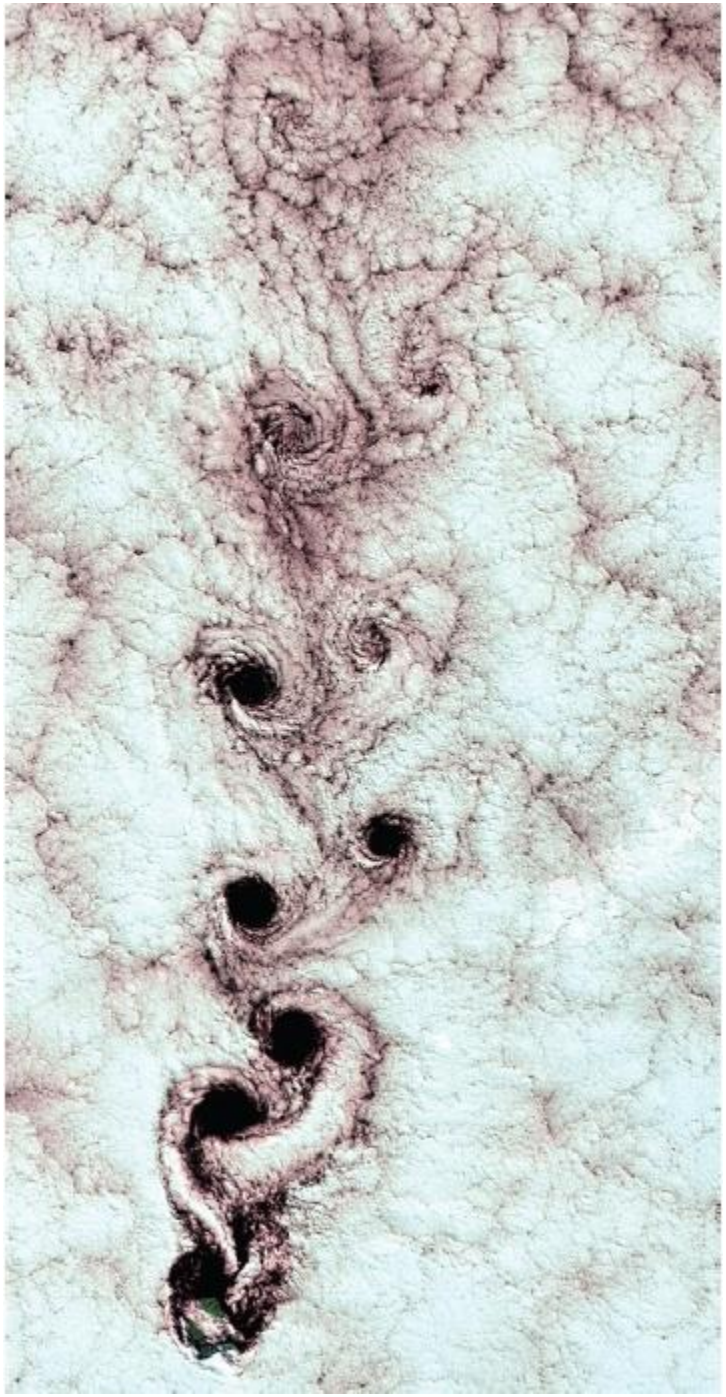
Akışın Reynolds sayısı, $\mathrm{Re} = \rho V D/\mu = 93$'tür.



Dairesel bir silindirin art izinde iki farklı noktaya yerleştirilmiş duman teli ile oluşturulan duman çıkış çizgileri: *(a)* Silindirin hemen aşağıakımındaki duman teli ve *(b)* x/D = 150'de yerleştirilmiş duman teli. İki fotoğraf karşılaştırılarak çıkış çizgilerinin zaman-integralli olma niteliği açıkça görülebilir.

Silindirden tekrarlı desen şeklinde dökülen daimi olmayan vortekslerden ötürü duman, **Karman vorteks caddesi** olarak tanımlanan belirgin bir desen oluşturmaktadır.

Benzer desen, daha büyük ölçekli olarak bir adanın art izindeki hava akışında görülebilir.



Güney Pasifik Okyanusu'ndaki Alexander Selkirk Adasının art izindeki bulutlarda görülen Kármán vorteksleri.

Bilinen bir hız alanı için çıkış çizgisi sayısal yöntemle elde edilebilir. Bunun için Denklem 4–17'yi kullanmak suretiyle, sürekli bir izli parçacık akımına ait yörüngelerin, akışa enjekte edildikleri ilk andan son ana kadar takip edilmesi gerekir. Matematiksel olarak izli parçacığın konumu, enjekte edildiği $t_{\text{enjeksiyon}}$ anından t_{son} anına kadar geçen zaman boyunca integre edilir. Bu durumda Denklem 4–17 aşağıdaki hale gelir:

İzli parçacığın integre edilmiş konumu:

$$\vec{x} = \vec{x}_{\text{enjeksiyon}} + \int_{t_{\text{enjeksiyon}}}^{t_{\text{son}}} \vec{V}\, dt \qquad (4\text{–}18)$$

Karmaşık bir daimi olmayan akışta hız alanı zamanla değiştiğinden integral işleminin sayısal yöntemle yapılması gerekir. İzli parçacıkların $t = t_{\text{son}}$ anındaki geometrik yerlerinin düzgün bir şekilde birleştirilmesiyle ortaya çıkan eğri, istenen çıkış çizgisi olur.

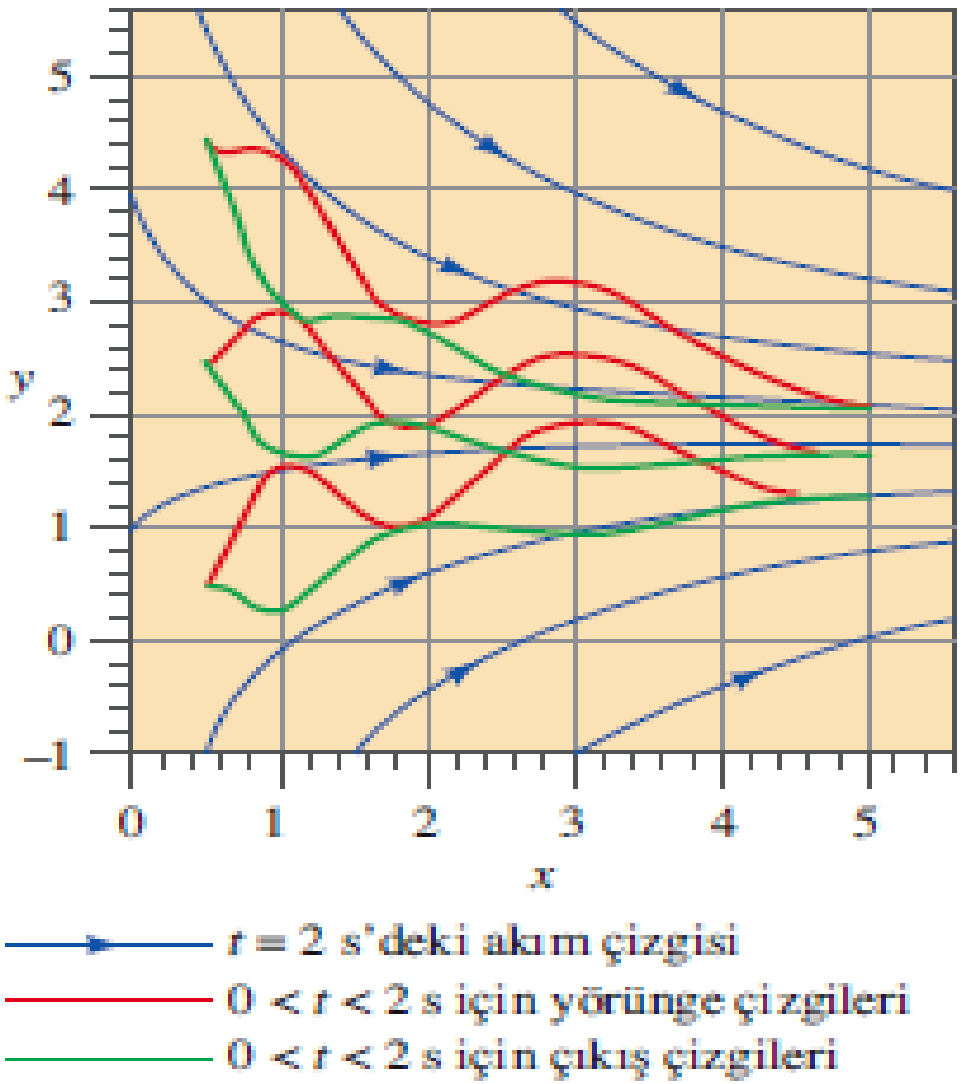
İzli parçacığın t zaman sonraki konumu:

$$\vec{x} = \vec{x}_{\text{başlangıç}} + \int_{t_{\text{başlangıç}}}^{t} \vec{V}\, dt \qquad (4\text{–}17)$$

Daimi Olmayan Bir Akışta Akış Desenlerinin Karşılaştırılması

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8x)\vec{i} + (1.5 + 2.5\sin(\omega t) - 0.8y)\vec{j}$$

Daimi olmayan, sıkıştırılamaz ve iki boyutlu bir hız alanı



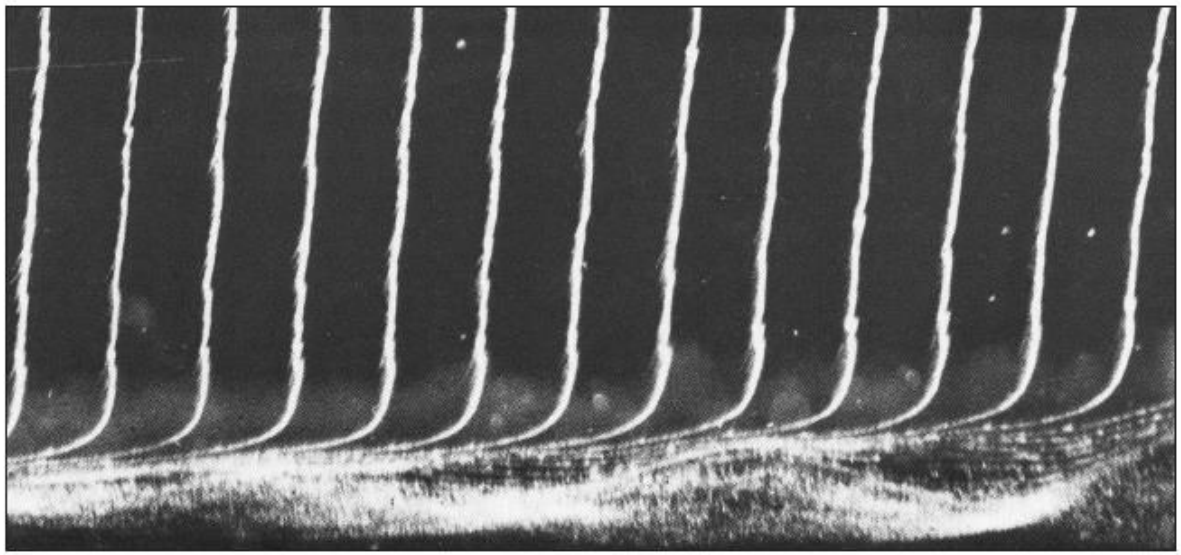
Örnek 4–5'teki salınımlı hız alanına ait akım çizgileri, yörünge çizgileri ve çıkış çizgileri. Çıkış çizgileri ve yörünge çizgileri zamana göre integre edilerek elde edildiğinden dalgalıdır. Buna karşın akım çizgileri hız alanının anlık bir görüntüsünü temsil ettiği için dalgalı değildir.

Zaman Çizgileri

Zaman Çizgisi: Daha önceden aynı anda işaretlenmiş ardışık akışkan parçacıklarının kümesidir.

Zaman çizgileri, özellikle akışın üniform olup olmadığının inceleneceği durumlarda faydalıdır.

Zaman çizgileri, düz bir çizgi şeklindeki akışkan parçacıkları işaretlenerek ve daha sonra bu çizginin akış alanındaki hareketi (ve şekil değiştirmesi) izlenerek oluşturulur; zaman çizgileri $t = 0$, t_1, t_2 ve t_3'te gösterilmiştir.



Hidrojen kabarcığı telinden gönderilen zaman çizgileri sınır tabaka hız profilinin yapısını görselleştirmek için kullanılmaktadır. Akış soldan sağa doğrudur ve hidrojen kabarcığı teli, görüntünün sol tarafına yerleştirilmiştir. Çepere yakın bölgelerdeki kabarcıklar, akıştaki türbülansı başlatan kararsızlığı göstermektedir.

Kırılım Esaslı Akış Görselleştirme Teknikleri

Akış görselleştirmenin bir başka sınıfı da ışık dalgalarının **kırılma özelliği**ne dayanır.

Fizikten hatırlayacağınız gibi ışığın hızı farklı maddeler içerisinden geçerken veya yoğunluğu değiştiği takdirde *aynı* madde içerisinden geçerken dahi belirli bir dereceye kadar farklılık gösterebilir. Bir akışkandan kırılma indisi farklı olan bir başka akışkana geçerken ışık ışınları eğilir (ortam tarafından **kırılır**).

Havanın (veya diğer gazların) kırılma indisinin yoğunluk ile değiştiği gerçeğinden yararlanan iki temel akış görselleştirme tekniği vardır: Bunlar **gölge grafiği tekniği** ve **Schlieren tekniği**dir.

Akış görselleştirmenin esasını teşkil eden **interferomete**, ışığın yoğunlukları değişen hava içerisinden geçerken uğradığı *faz değişimi*nden yararlanan bir görselleştirme tekniğidir.

Tüm bu teknikler sıcaklık farklarının yoğunluk değişimlerine neden olduğu doğal taşınım akışları, akışkan türlerinin yoğunluk değişimlerine neden olduğu karışan akışlar ve şok dalgaları ve genişleme dalgalarının yoğunluk değişimlerine neden olduğu sesüstü akışlar gibi yoğunluğun akış içerisinde bir konumdan diğer bir konuma değiştiği akış alanlarında akışı görselleştirme için kullanışlıdır.

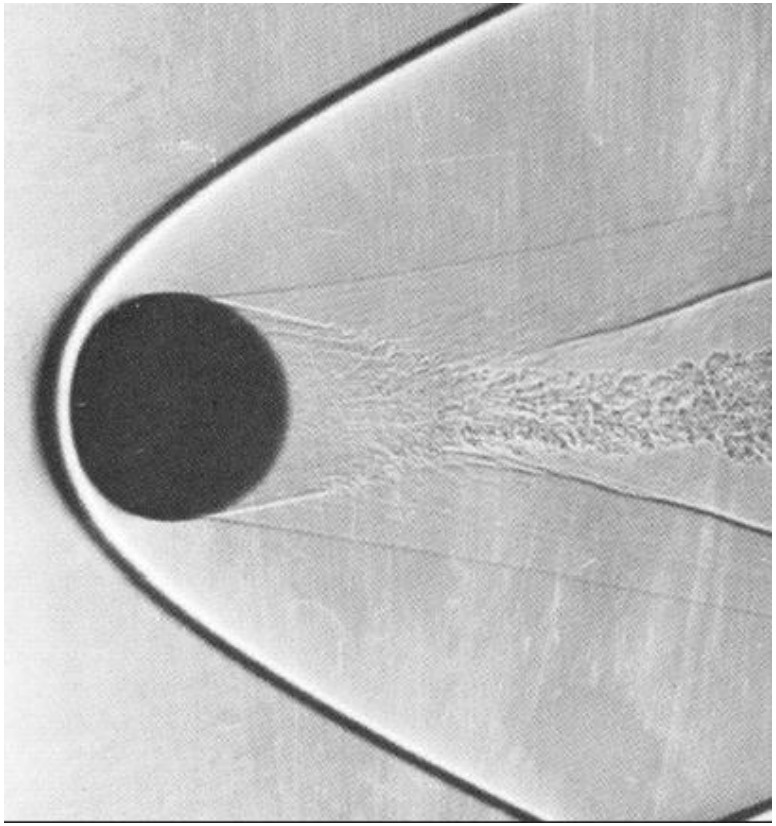
Çıkış çizgileri, yörünge çizgileri ve zaman çizgileri gibi görselleştirme tekniklerinden farklı olarak, gölge grafiği ve schlieren yöntemlerinde (duman ya da boya gibi) görülebilir bir izin enjekte edilmesine gerek yoktur.

Bunun yerine yoğunluk farkları ve ışığın kırılma özelliği akış alanındaki hareket bölgelerini görselleştirmek için gerekli araçları sağlar ve "görülmeyeni görmemize" imkan tanır.

Gölge grafiği yönteminde görüntü, kırılan ışık ışınlarının gölgedeki koyu ve açık desenleri görünür hale getirmek için, gölgenin bir ekrana veya kameranın odak düzlemine düşürülerek tekrar düzenlemesi ile oluşturulur.

Koyu desenler kırılan ışınların *başladığı* noktaları gösterirken, açık desenler bu ışınların *sonlandığı* noktaları gösterir, ancak bu yanıltıcı olabilir.

Sonuç olarak koyu bölgeler açık bölgelere oranla daha az bozulur ve gölge grafiğinin yorumlanmasında daha kullanışlıdır.



14.3 mm çapındaki bir kürenin Ma = 3.0'de havadaki serbest uçuşuna ait gölge grafiği. Şok dalgası, küre etrafında kavis çizen koyu bir bant biçimindeki gölgede açık bir biçimde görülmektedir. Buna yay dalgası adı verilir (Bölüm 12'ye bakınız).

Gölge grafiği gerçek bir optik görüntü değildir; neticede sadece bir gölgedir.

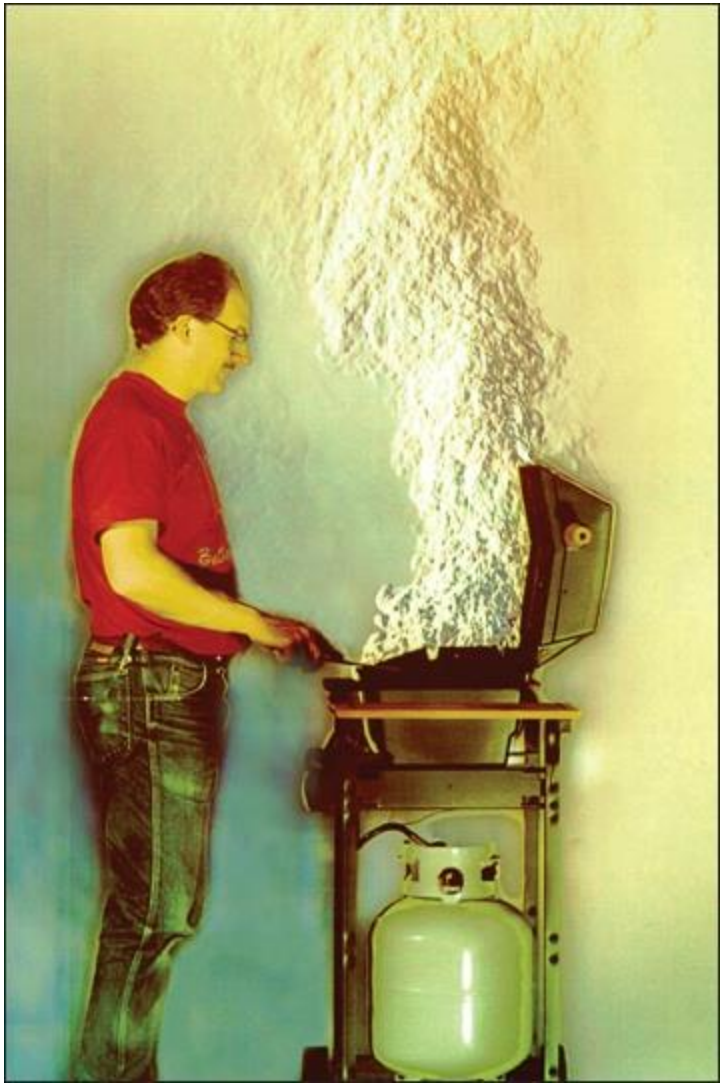
Schlieren görüntüde ise mercekler (veya aynalar) ve kırılan ışığı engellemeye yarayan bıçak ağzı veya bunun gibi başka bir kesici düzenek mevcut olup bu görüntü odaklanmış bir optik görüntüdür.

Schlieren görüntülemenin kurulumu gölge grafiğine göre daha karmaşıktır, ancak buna karşın çok sayıda üstünlükleri vardır.

Örneğin Schlieren görüntülerde kırılan ışık ışınlarının neden olduğu optik şekil bozukluğu sıkıntısı yaşanmaz.

Schlieren görüntüleme, doğal taşınım (yandaki şekil) veya sesüstü akışlardaki genişleme yelpazeleri gibi yavaş gelişen olaylardan kaynaklanan düşük yoğunluk gradyenlerine karşı da daha duyarlıdır. Renkli schlieren görüntüleme teknikleri de geliştirilmiştir.

Son olarak schlieren düzeneğinde ele alınan problem için en kullanışlı olan görüntüyü oluşturmak üzere konum, konumlandırma biçimi ve kesici düzeneğin tipi gibi daha fazla bileşenin ayarı yapılabilir.



Barbekü ızgarasındaki doğal taşınımın Schlieren görüntüsü.

Yüzey Akışı Görselleştirme Teknikleri

- Katı bir yüzeyin hemen üzerindeki akışın yönü **püsküller** ile görüntülenebilir. Bunlar, bir ucu yüzeye yapıştırılmış, akış yönünü gösteren kısa ve esnek sicimlerdir.
- Püsküller özellikle akış yönünün aniden tersine döndüğü ayrılan akış bölgelerinin belirlenmesinde kullanışlıdır.
- **Yüzey yağı ile akış görselleştirme** olarak adlandırılan bir teknik de aynı amaç için kullanılabilir. Burada yüzey üzerine bırakılan yağ, **sürtünme çizgileri** olarak adlandırılan akış yönünü gösteren çizgiler oluşturur.
- Aracınız kirliyken (özellikle kışın yollara tuz dökülmüşken) hafif şiddette yağmur yağdığında, arabanızın ön ve yan kaportalarında veya ön camında çizgiler oluştuğunu fark etmişsinizdir.
- Bu durum, yüzey yağı ile akış görselleştirmedeki gözlemle benzerlik gösterir.
- Son olarak, araştırmacıların katı yüzeyler boyunca olan basınç veya sıcaklık dağılımlarını gözlemlemesine imkan tanıyan basınca ve sıcaklığa duyarlı boyaların olduğu da bir gerçektir.

4–3 ■ AKIŞ VERİLERİNİN ÇİZİMİ

Nasıl elde edildiklerine bakılmaksızın (analitik, deneysel ya da sayısal olarak) akış verilerini, okura akış özelliklerinin zaman ve/veya konumla nasıl değiştiğine dair bir izlenim verecek şekilde *çizmek* gerekir.

Özellikle türbülanslı akışlarda (örneğin zamanın fonksiyonu olarak çizilmiş bir hız bileşeni) *xy-çizimlerinde* (örneğin, basıncın yarıçapın fonksiyonu olarak çizilmesi) kullanışlı olan *zamana göre çizimlere* daha önceden aşinasınız.

Bu kısımda bunlara ek olarak akışkanlar mekaniğinde kullanışlı olan üç çizim türünü ele alacağız;

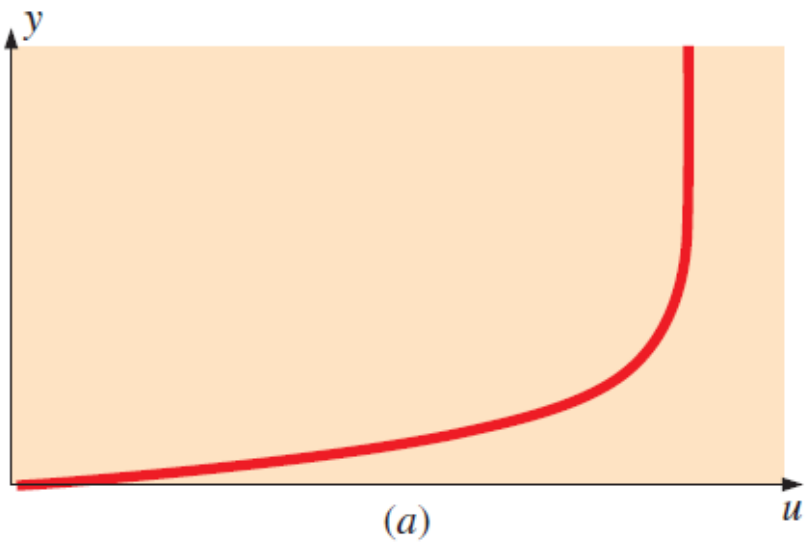
profil, vektör ve kontur çizimleri.

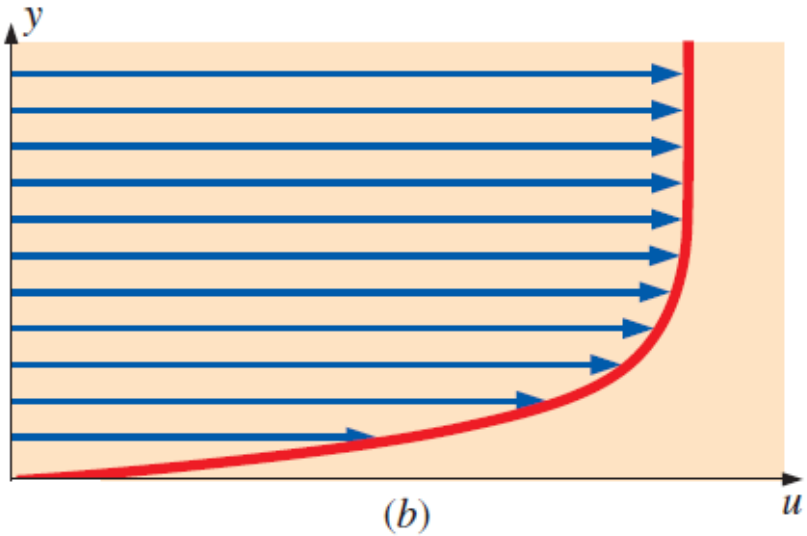
Profil Çizimleri

Profil çizimi: Bir skaler özelliğin değerinin akış alanı içerisinde istenen bir yön boyunca nasıl değiştiğini gösterir.

Akışkanlar mekaniğinde *herhangi bir* skaler değişkenin (basınç, sıcaklık, yoğunluk vs.) profil çizimi oluşturulabilir, ancak bu kitapta en çok ***hız profili çizim***leri kullanılmıştır.

Hız vektörel bir büyüklük olduğundan, genellikle ya hızın büyüklüğünün ya da arzu edilen bir yönde mesafenin fonksiyonu olarak hız vektörü bileşenlerinden herhangi biri çizimi yapılır.

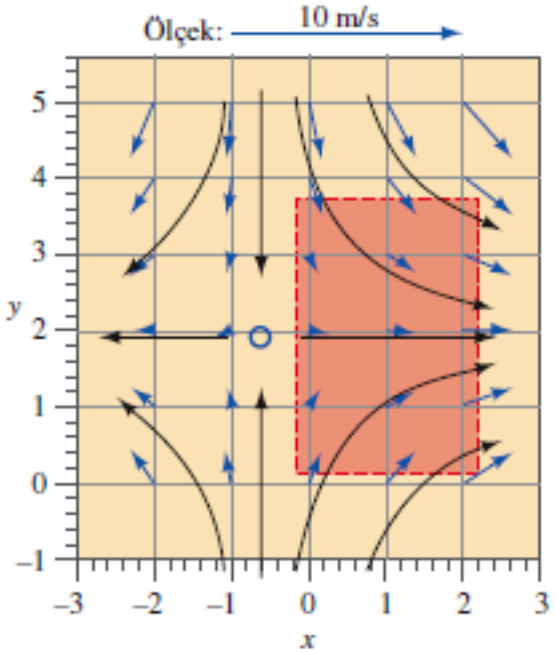




Yatay düz bir levha boyunca gelişen sınır tabaka akışında yatay hız bileşeni profilinin düşey mesafenin fonksiyonu olarak çizimi: *(a)* Standart profil çizimi ve *(b)* oklar ile birlikte profil çizimi.

Vektör Çizimleri

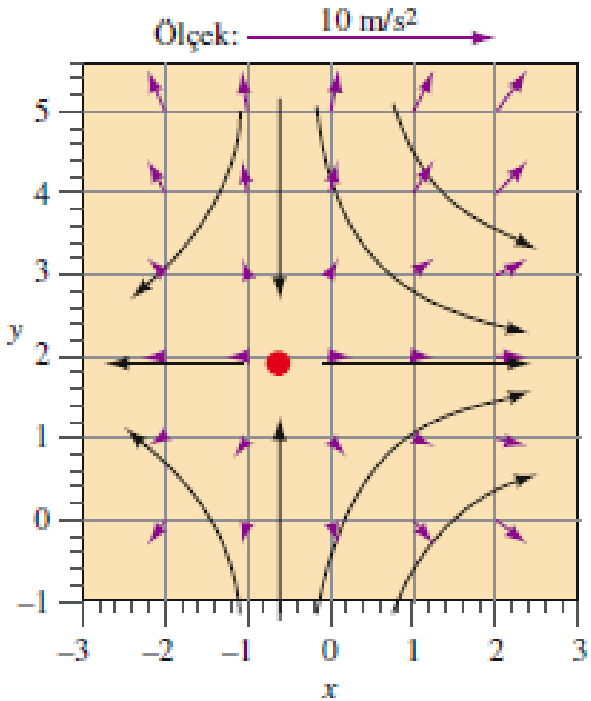
Vektör Çizimi: Belirli bir anda vektörel özelliğin yönünü ve şiddetini gösteren oklar dizisidir.



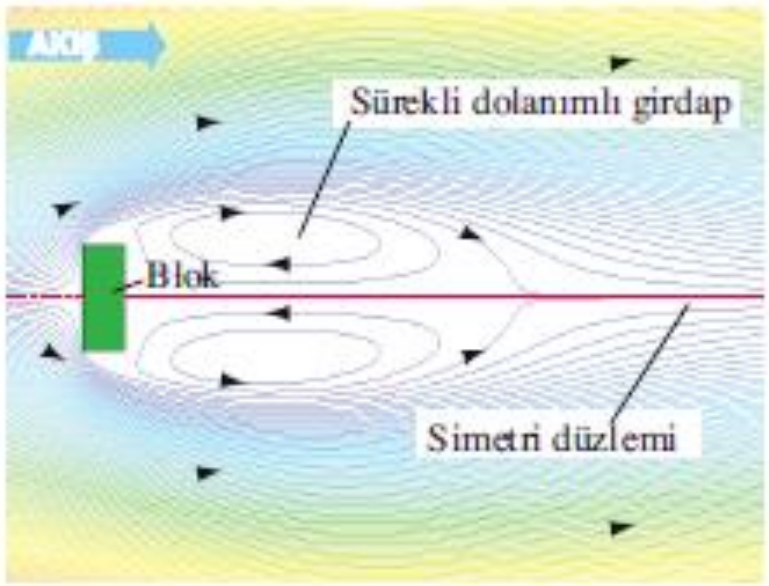
Akım çizgileri anlık hız alanının *yönü*nü gösterirken hızın *büyüklüğü*nü doğrudan göstermez.

Bundan dolayı hem deneysel hem de hesaplamalı akışlar için anlık vektörel bir özelliğin *hem* yönünü *hem de* büyüklüğünü gösteren oklar dizisinden oluşan vektör çizimleri kullanışlı bir akış desenidir.

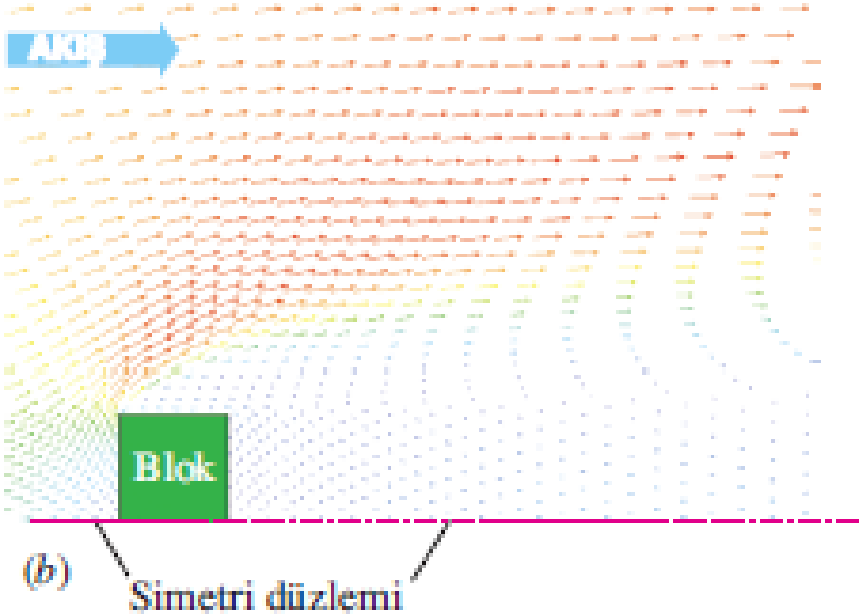
Vektör çizimleri, deneysel olarak elde edilmiş verilerden (örneğin; PIV ölçümlerinden) ya da HAD hesaplamalarından sayısal olarak da elde edilebilir.



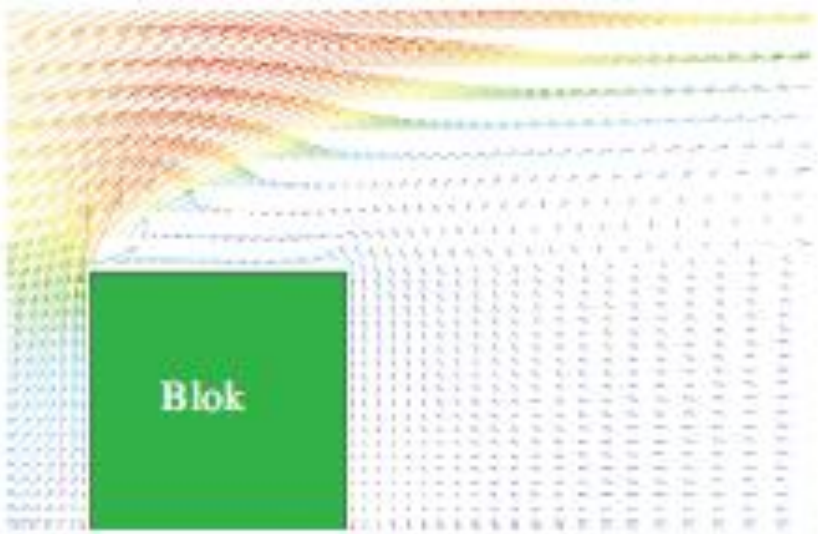
Analitik olarak hesaplanarak çizilen; hız vektörleri (mavi oklar) ve ivme vektörleri (mor oklar).



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Bir bloğa çarpan akışın HAD hesaplamalarının sonuçları:
(*a*) akım çizgileri,
(*b*) akışın üst yarısına ait hız vektörü çizimi,
(*c*) yakından görünümü ile daha fazla ayrıntı veren hız vektörü çizimi.

Kontur Çizimleri

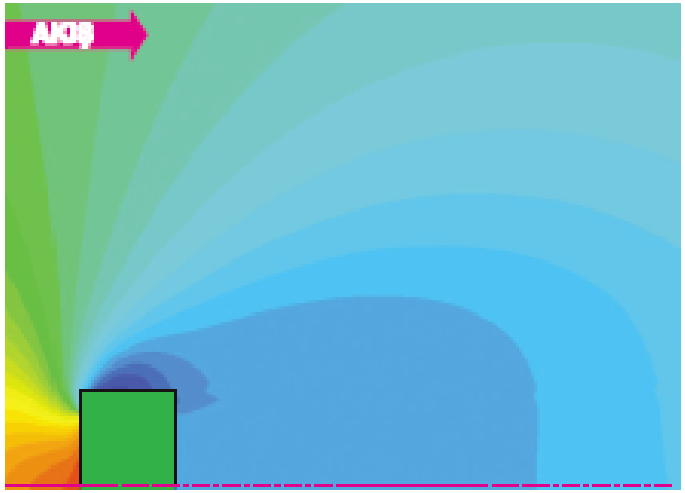
Kontur Çizimi: Belirli bir andaki sabit skaler özellik (veya vektör özelliğinin büyüklüğünü) eğrilerini gösterir.

Basınç, sıcaklık, hız büyüklüğü, bileşen konsantrasyonu, türbülans özelliklerinin kontur çizimleri (diğer adıyla **izokontur çizimleri**) oluşturulur.

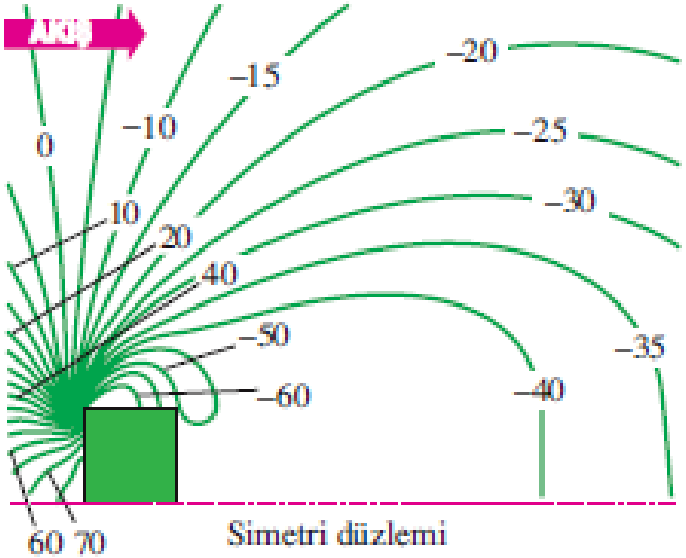
Kontur çizimi, incelenen akış özelliğinin yüksek (veya düşük) değerli bölgelerini hızlı bir biçimde gösterebilir.

Bir kontur çizimi basitçe özelliğin çeşitli seviyelerini gösteren eğrilerden oluşabilir; buna **kontur çizgisi çizimi** denir.

İkinci bir seçenek olarak kontur çizimleri, renkler ya da gri tonlu gölgeler ile doldurulabilir; buna **dolu kontur çizimi** denir.



(*a*)



(*b*)

Bir bloğa çarpan akıştan kaynaklanan basınç alanının HAD hesaplamaları ile oluşturulmuş kontur çizimleri; *(a)* dolu renkli kontur çizimi *(b)* basınç ölçek değerlerinin Pa (pascal) biriminde gösterildiği kontur çizgisi çizimi.

4–4 ■ DİĞER KİNEMATİK TANIMLAMALAR

Akışkan Elemanlarının Hareket veya Deformasyon Şekilleri

Akışkanlar mekaniğinde katı mekaniğinde olduğu gibi bir eleman dört temel tip harekete veya deformasyona uğrayabilir. Bunlar yandaki şekilde gösterildiği gibi:

(*a*) **ötelenme**, (*b*) **dönme**, (*c*) **lineer şekil değiştirme**

(bazen **uzama şekil değiştirmesi** denir) ve

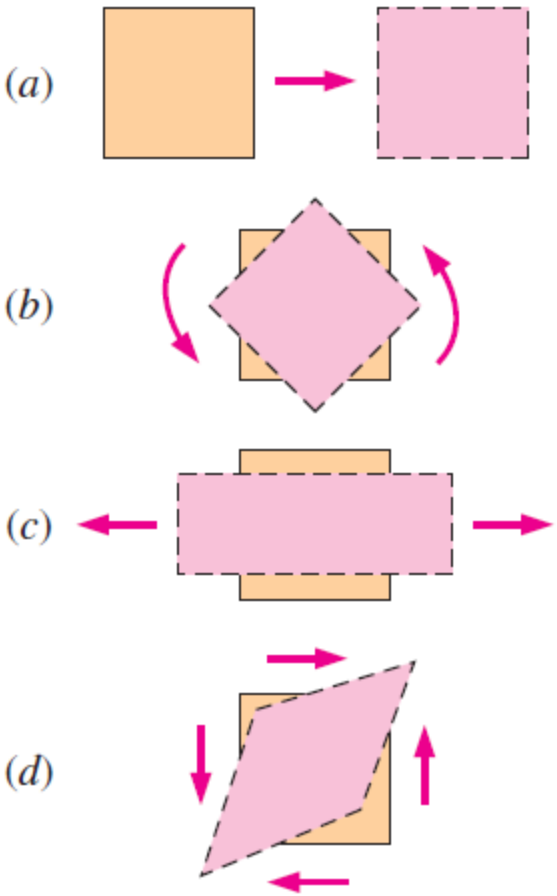
(*d*) **kayma şekil değiştirmesi** olarak sıralanır.

Tüm bu dört tip hareketin veya deformasyonun çoğunlukla aynı anda meydana gelmesinden dolayı akışkanlar dinamiği alanında çalışmak oldukça zordur.

Akışkan elemanları sürekli hareket halinde olduklarından, akışkanlar dinamiğinde akışkan elemanlarının hareketlerinin veya deformasyonlarının *birim zamana* göre tarif edilmesi daha uygundur. Bu bağlamda;

hız (birim zamandaki ötelenme), açısal hız (birim zamandaki dönme), lineer şekil değiştirme hızı (birim zamandaki lineer şekil değiştirme), ve kayma şekil değiştirmesi hızı (birim zamandaki kayma şekil değiştirmesi hızı) şeklinde de tanımlanabilir.

Akış hesaplamalarında kullanışlı olabilmeleri için bu **deformasyon (şekil değiştirme) hızlarını**, hız ve hızın türevleri cinsinden ifade etmemiz gerekir.



Akışkan elemanının temel hareket veya deformasyon şekilleri: *(a)* ötelenme, *(b)* dönme, *(c)* lineer şekil değiştirme ve *(d)* kayma şekil değiştirmesi.

Üç-boyutta birim zamandaki ötelenmeyi tam olarak tarif edebilmek için bir vektöre ihtiyacımız vardır. Bu **birim zamandaki ötelenme vektörü**, **matematiksel olarak hız vektörü** şeklinde tanımlanır.

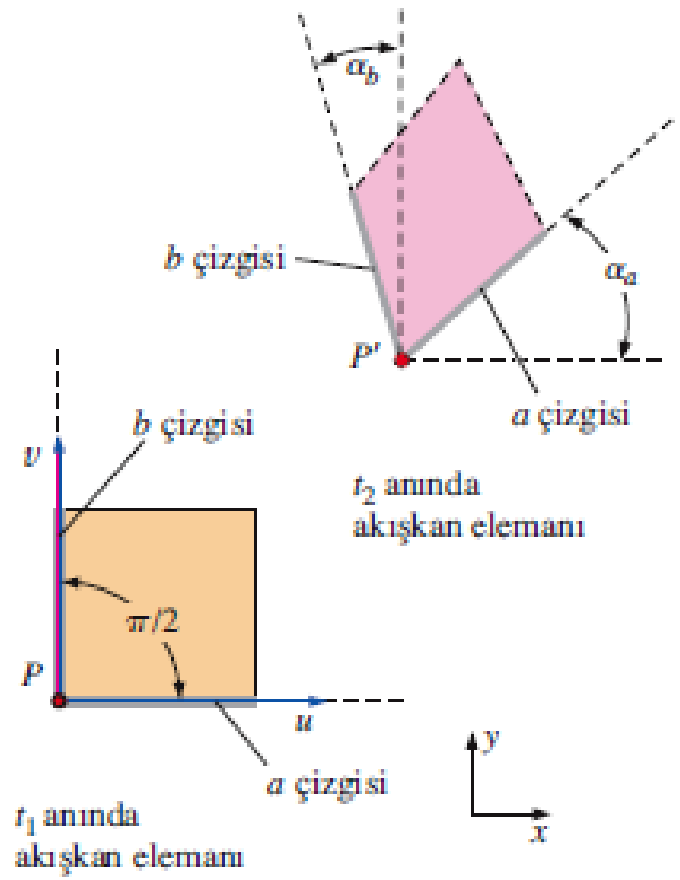
Kartezyen koordinatlarda birim zamandaki ötelenme vektörü:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

Birim Zamandaki Dönme (Açısal Hız): Bir noktada birim zamandaki dönme (açısal hız), *başlangıçta bir noktada kesişen iki dik çizginin birim zamandaki ortalama dönmesi* olarak tanımlanır.

Akışkan elemanının *P* noktası etrafında birim zamandaki dönmesi:

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha_a + \alpha_b}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$



Şekilde çizildiği gibi ötelenen ve deforme olan bir akışkan elemanı için *P* noktası etrafındaki birim zamandaki dönme, başlangıçta birbirlerine dik olan iki çizginin (*a* çizgisi ve *b* çizgisi) ortalama dönmesi olarak tanımlanır.

Birim zamandaki dönme vektörü, **açısal hız vektörü**ne eşittir.

Kartezyen koordinatlarda birim zamandaki dönme vektörü:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

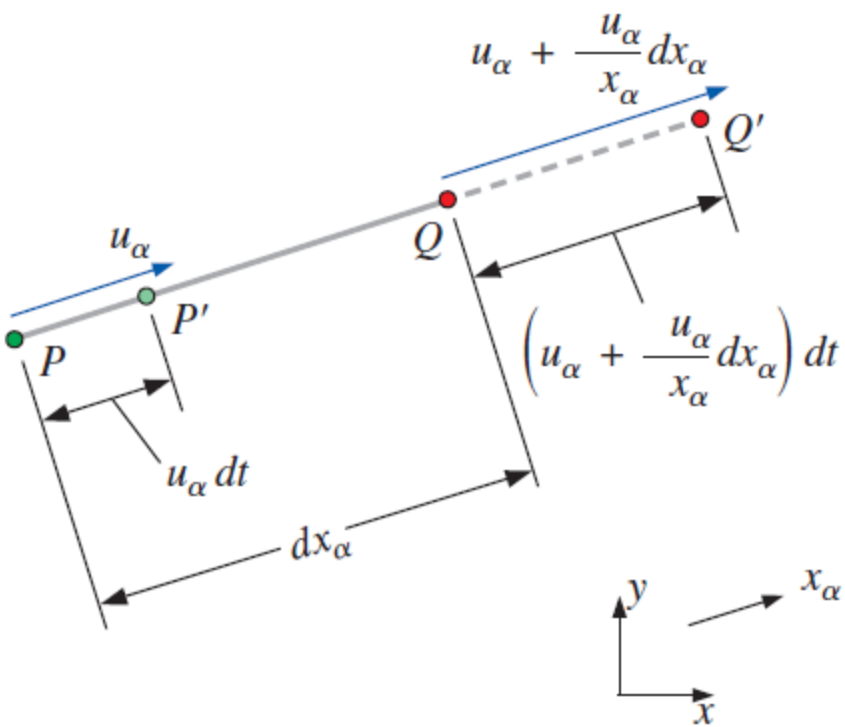
Lineer Şekil Değiştirme Hızı: *Birim uzunluk başına birim zamanda meydana gelen uzunluk artışı* şeklinde tanımlanır.

Matematiksel olarak bir akışkan elemanının lineer şekil değiştirme hızı, üzerinde lineer şekil değiştirmeyi ölçtüğümüz doğru parçasının başlangıç yönüne bağlıdır.

Kartezyen koordinatlarda lineer şekil değiştirme hızı:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

x_α gibi keyfi bir yöndeki *lineer şekil değiştirme hızı*, bu yönde birim uzunluk başına birim zamanda meydana gelen uzunluk artışı olarak tanımlanır. Eğer doğru parçası *kısalıyor* olsaydı, bu durumda lineer şekil değiştirme hızı *negatif* olurdu. Burada PQ doğru parçasının $P'Q'$ doğru parçasına uzaması, dolayısıyla pozitif bir şekil değiştirme hızı göz önüne alınmıştır. Gerek dx_α gerekse dt sonsuz küçük olduğundan, hız bileşenleri ve mesafeler birinci-mertebede kesilmiştir.



Verilen tanımdan hareket ederek ve şekildeki uzunlukları kullanarak x_α -yönündeki lineer şekil değiştirme hızı:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{P'Q' - PQ}{PQ}\right)$$

$$\cong \frac{d}{dt}\left(\frac{\overbrace{\left(u_\alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} dx_\alpha\right) dt + dx_\alpha - u_\alpha\, dt}^{x_\alpha\text{-yönünde } P'Q'\text{nun uzunluğu}} \quad - \quad \overbrace{dx_\alpha}^{x_\alpha\text{-yönünde } PQ'\text{nun uzunluğu}}}{\underbrace{dx_\alpha}_{x_\alpha\text{-yönünde } PQ'\text{nun uzunluğu}}}\right) = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \qquad (4\text{–}22)$$

Hacimsel Şekil Değiştirme Hızı veya **Genleşme (Bulk) Şekil Değiştirme Hızı :** Bir akışkan elemanının birim hacim başına birim zamanda hacminde meydana gelen artışı ifade eder.

Bu kinematik özellik hacmin *arttığı* durumlar için *pozitif* olarak tanımlanır.

Hacimsel şekil değiştirme hızının bir eş anlamlısı da **hacimsel genişleme hızı (dilatasyon)**'dır. Loş bir ışığa maruz kaldığında gözünüzdeki iris tabakanın nasıl büyüdüğünü (genişlediğini) düşünerek bunu kolaylıkla hatırlayabilirsiniz.

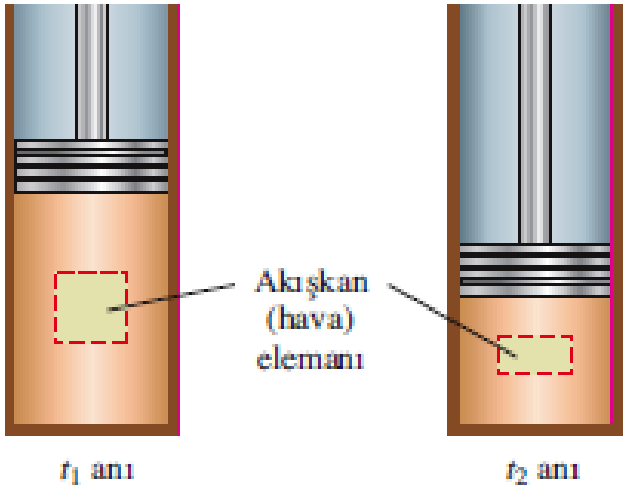
Hacimsel şekil değiştirme hızı, birbirine karşılıklı olarak dik olan üç yöndeki şekil değiştirme hızlarının toplamı olacaktır.

Kartezyen koordinatlarda hacimsel şekil değiştirme hızı:

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Sıkıştırılamaz bir akışta hacimsel şekil değiştirme hızı sıfırdır.

Bir piston silindir düzeneğinde sıkıştırılmakta olan hava. Silindirdeki akışkan elemanının hacmi azaldığı için hacimsel şekil değiştirme hızı negatiftir.



Kayma Şekil Değiştirmesi Hızı: *Başlangıçta bu noktada kesişen iki dik çizgi arasındaki açıda birim zamanda meydana gelen azalmanın yarısı* olarak tanımlanır.

Başlangıçta x- ve y-yönlerinde birbirlerine dik olan çizgiler için kayma şekil değiştirmesi hızı:

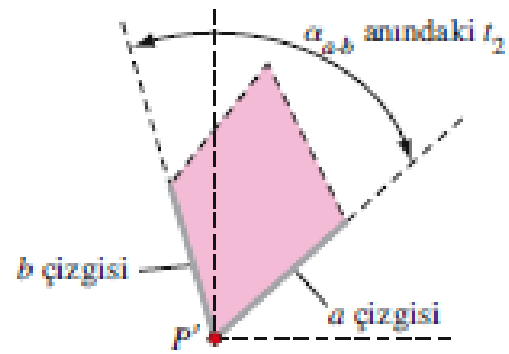
$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\alpha_{a\text{-}b} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

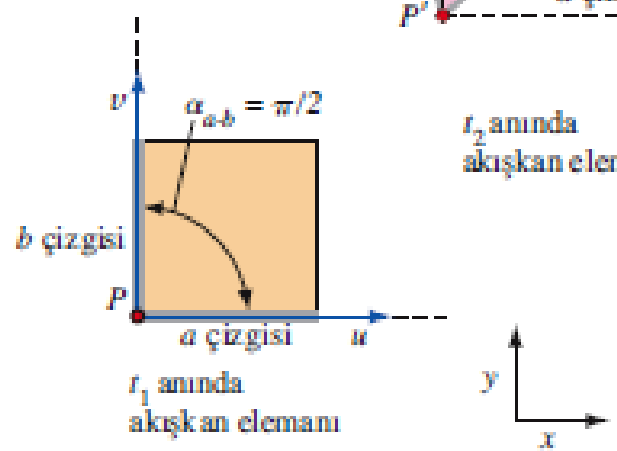
Kartezyen Koordinatlarda Kayma Şekil Değiştirmesi Hızı:

$$\boxed{\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)}$$

Kartezyen koordinatlarda şekil değiştirme hızı tensörü:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$





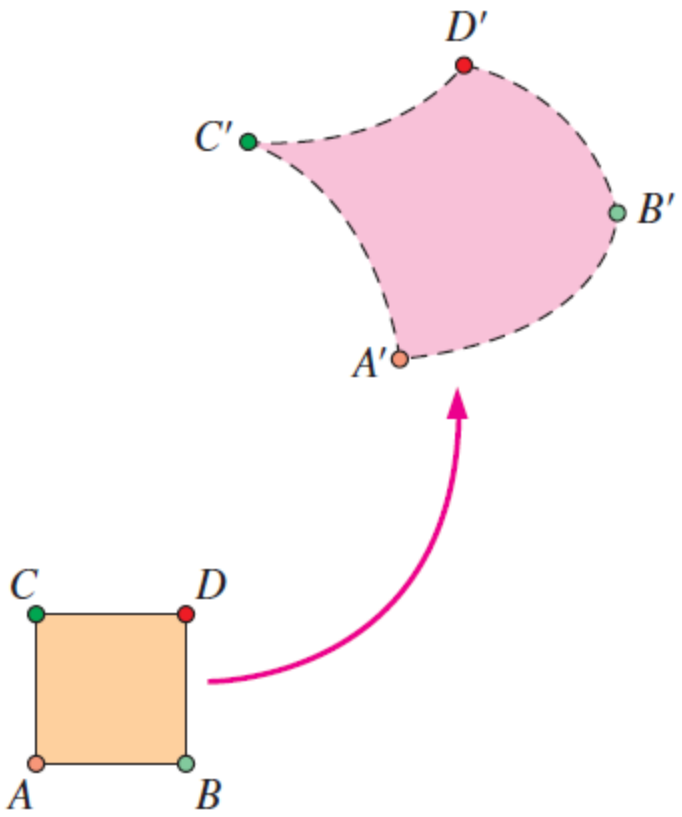
Şekilde çizildiği gibi ötelenen ve şekil değiştiren bir akışkan elemanı için *P* noktasındaki kayma şekil değiştirmesi hızı, dik iki çizgi (*a* çizgisi ve *b* çizgisi) arasındaki açıda birim zamanda meydana gelen azalmanın yarısı olarak tanımlanır.

Yandaki şekil, sıkıştırılabilir bir akıştaki tüm olası hareketlerin ve şekil değiştirmelerin bir arada olduğu genel bir durumu (iki-boyutlu olmasına rağmen) göstermektedir.

Burada ötelenme, dönme, lineer şekil değiştirme ve kayma şekil değiştirmesi toplu bir şekilde gösterilmiştir.

Bunun yanında akışının sıkıştırılabilir olma niteliğinden ötürü hacimsel şekil değiştirme hızı (dilatasyon) da söz konudur.

Artık akışkanlar dinamiğinin kendine özgü karmaşıklığını ve akışı tam olarak tanımlayabilmek için gerekli matematik-sel derinliği daha iyi anlamış olmalısınız.



Ötelenme, dönme, lineer şekil değiştirme, kayma şekil değiştirmesi ve hacimsel şekil değiştirmeyi gösteren bir akışkan elemanı.

ÖRNEK 4–6 İki-boyutlu Bir Akışta Kinematik Özelliklerin Hesaplanması

Örnek 4–1'deki daimi, iki-boyutlu hız alanını göz önüne alınız:

$$\vec{V} = (u, v) = (0.5 + 0.8\,x)\vec{i} + (1.5 - 0.8\,y)\vec{j} \qquad (1)$$

Burada uzunluklar m, zaman s ve hızlar m/s birimindedir. Şekil 4–41'de gösterildiği gibi (–0.625, 1.875) noktası bir durma noktasıdır. Ayrıca akışın akım çizgileri de Şekil 4–41'de çizilmiştir. Birim zamandaki ötelenme, birim zamandaki dönme, lineer şekil değiştirme hızı, kayma şekil değiştirmesi hızı ve hacimsel şekil değiştirme hızı gibi çeşitli kinematik özellikleri hesaplayınız. Akışın sıkıştırılamaz olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM Verilen bir hız alanının bazı kinematik özelliklerini hesaplayacağız ve akış alanının sıkıştırılamaz olduğunu göstereceğiz.

Kabuller **1** Akış daimidir. **2** Akış iki-boyutludur, yani hızın *z*-bileşeni yoktur ve *u* veya *v*, *z* ile değişmemektedir.

Analiz Denklem 4–19 ile verilen birim zamandaki ötelenme hızın kendisine eşittir (Denklem 1):

$$\textit{Birim zamandaki ötelenme:} \quad u = 0.5 + 0.8x \quad v = 1.5 - 0.8y \quad w = 0 \qquad (2)$$

Birim zamandaki dönme ise Denklem 4–21'den hesaplanır. Bu durumda her yerde $w = 0$ olduğundan ve ne *u* ne de *v* hız bileşeni *z* ile değiştiğinden, birim zamandaki dönmenin sıfırdan farklı tek bileşeni z-yönündedir. Böylece;

$$\textit{Birim zamandaki dönme:} \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} = \frac{1}{2}(0 - 0)\vec{k} = 0 \qquad (3)$$

Buna göre akışkan parçacıklarının hareket ederken net bir dönme hareketi yapmadığı anlaşılmaktadır. (Bu önemli bir bilgidir ve bu bölümde ileride, ayrıca Bölüm 10'da daha detaylı olarak açıklanacaktır).

Lineer şekil değiştirme hızları Denklem 4–23 kullanılarak herhangi bir keyfi yönde hesaplanabilir. *x*-, *y*- ve *z*-yönlerindeki lineer şekil değiştirme hızları aşağıdaki gibi elde edilir:

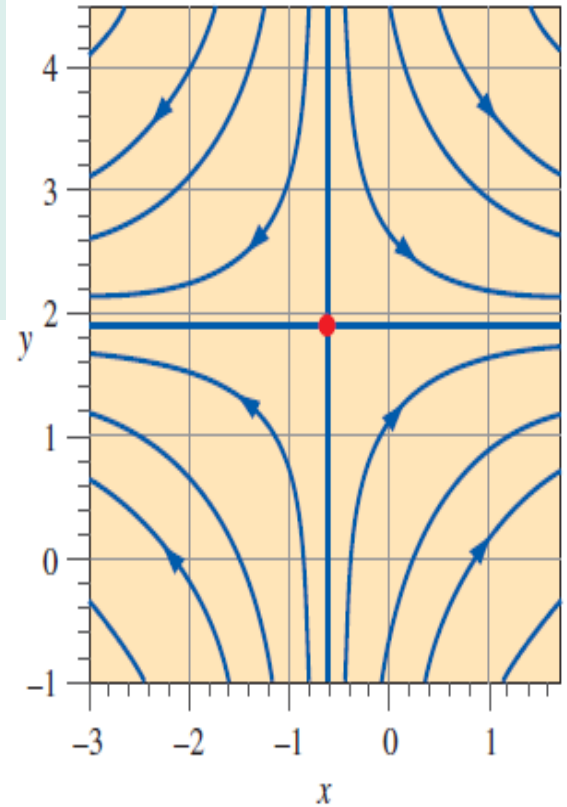


FIGURE 4–41

Streamlines for the velocity field of Example 4–6. The stagnation point is indicated by the red circle at $x = -0.625$ m and $y = 1.875$ m.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0.8\ \mathrm{s}^{-1} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -0.8\ \mathrm{s}^{-1} \qquad \varepsilon_{zz} = 0 \tag{4}$$

Buna göre akışkan parçacıklarının x-yönünde *uzadığı* (pozitif lineer şekil değiştirme hızı) ve y-yönünde *kısaldığı* (negatif lineer şekil değiştirme hızı) anlaşılmaktadır. Bu durum başlangıçta (0.25, 4.25) noktasında bulunan kare şeklindeki bir akışkan parçasının işaretlendiği Şekil 4–42'de gösterilmiştir. Denklem 2'yi zamana göre integre etmek suretiyle, geçen 1.5 s sonunda işaretli akışkanın parçasının dört köşesinin konumu hesaplanmıştır. Gerçekten de öngörüldüğü gibi bu akışkan parçası x-yönünde uzamış ve y-yönünde kısalmıştır.

Kayma şekil değiştirmesi Denklem 4–26'dan bulunur. Akış iki-boyutlu olduğundan, sıfırdan farklı olan kayma şekil değiştirmesi hızı sadece xy-düzleminde olur. Başlangıçta birbirlerine dik iki çizgi olarak x- ve y-eksenleri kullanılırsa, ε_{xy} aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0 \tag{5}$$

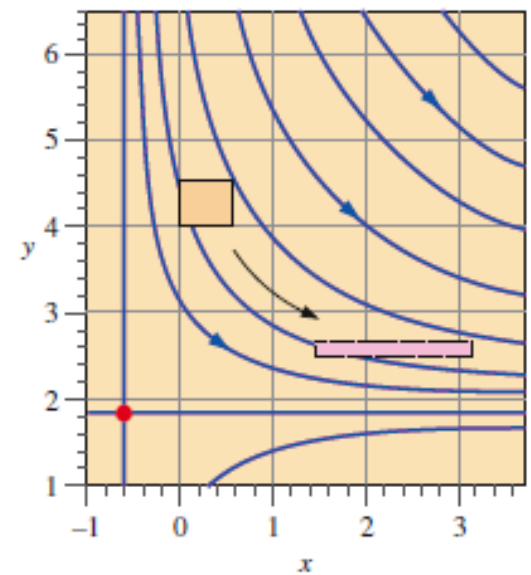
Bu sonuca göre Şekil 4–42 ile de gösterildiği gibi bu akışta kayma şekil değiştirmesi yoktur. Göz önüne alınan akışkan parçacığı şekil değiştirse de, başlangıçta 90° olan köşe açıları hesaplamanın yapıldığı zaman periyodu boyunca 90°'de sabit kalmaktadır.

Son olarak hacimsel şekil değiştirme hızı Denklem 4–24'ten hesaplanır:

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = (0.8 - 0.8 + 0)\ \mathrm{s}^{-1} = 0 \tag{6}$$

Hacimsel şekil değiştirme hızı her yerde sıfır olduğundan, akışkan parçacıklarının hacmi ne büyüyor (genişliyor) ne de küçülüyor (sıkışıyor) diyebiliriz. Bu sonuç **akışın gerçekten de sıkıştırılamaz olduğunu göstermektedir**. Şekil 4–42'de gölgelendirilmiş akışkan parçacığı akış alanında hareket ederken ve şekil değiştirirken yüzey alanı sabit kalmaktadır (iki boyutlu bir akış olduğu için hacmi de sabit kalmaktadır).

İrdeleme Bu örnekte kayma şekil değiştirmesi hızlarının (ε_{xy} ve simetriği olan ε_{yx}) sıfır olmasına karşın, lineer şekil değiştirme hızlarının (ε_{xx} ve ε_{yy})



ŞEKİL 4–42

Örnek 4–6'daki hız alanına göre 1.5 s'lik zaman dilimi boyunca hareket ettirilmiş olan başlangıçta kare şeklindeki akışkan parçasının şekil değiştirmesi. Durma noktası $x = -0.625$ m ve $y = 1.875$ m'deki kırmızı daire ile gösterilmiş ve birkaç akım çizgisi çizilmiştir.

sıfırdan farklı olduğu görülmektedir. Bu durum *x- ve y-eksenlerinin bu akışın asal eksenleri olduğu anlamına gelmektedir*. Bu konumlandırmada iki-boyutlu şekil değiştirme hızı tensörü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{pmatrix} \mathrm{s}^{-1} \tag{7}$$

Eğer eksenleri keyfi bir açı ile döndürmüş olsaydık, yeni eksenler asal eksen *olmaz*dı ve şekil değiştirme hızı tensöründeki dört elemanın tümü de sıfırdan farklı olurdu. Mohr dairelerini kullanarak asal eksenleri, maksimum kayma şekil değiştirmesini vb. belirlediğiniz mukavemet derslerinizden dönen eksenleri hatırlıyor olmalısınız. Benzer çözümlemeler akışkanlar mekaniğinde de yapılabilir.

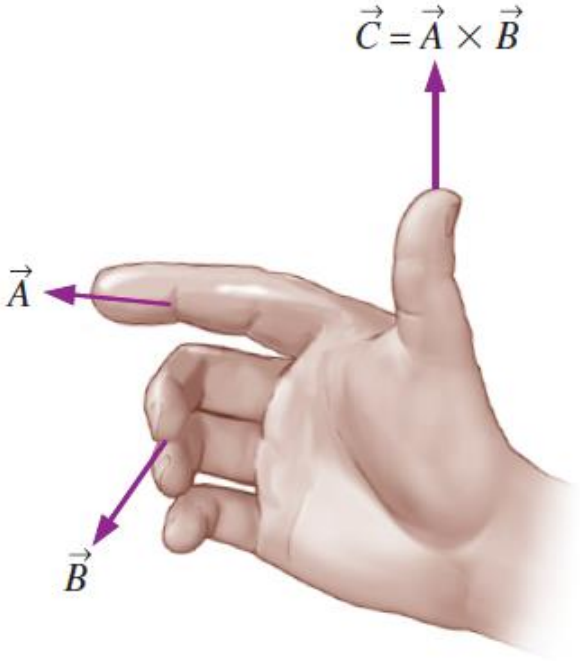
4–5 ■ VORTİSİTE VE DÖNÜMLÜLÜK

Daha önce tanımlanan bir akışkan elemanının birim zamandaki dönme vektörüyle yakından ilişkili kinematik bir özellik olan **vortisite vektörü** matematiksel olarak hız vektörü $\vec{V}$'nin curl'ü veya rotasyoneli şeklinde tanımlanır ve akış analizinde büyük önem taşır:

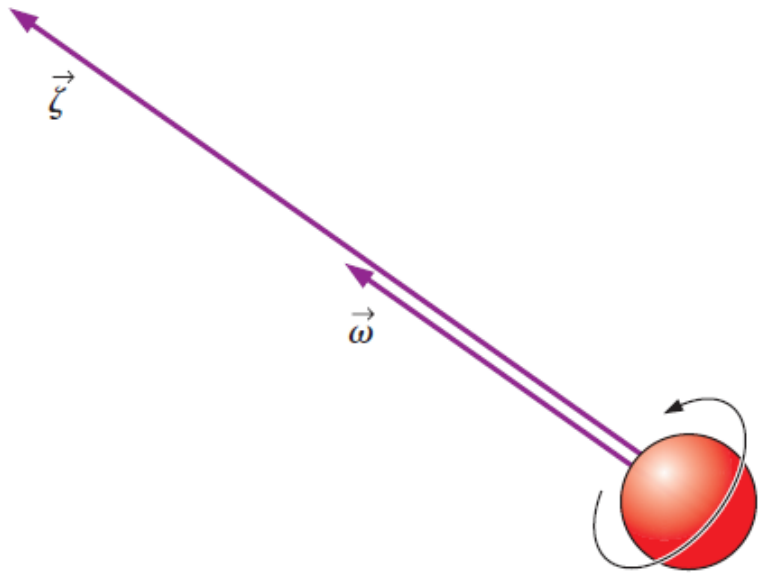
Vortisite vektörü: $$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{curl}(\vec{V})$$

Birim zamandaki dönme vektörü: $$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{2}\text{curl}(\vec{V}) = \frac{\vec{\zeta}}{2}$$

Vortisite **bir akışkan parçacığının açısal hızının iki katına eşittir**

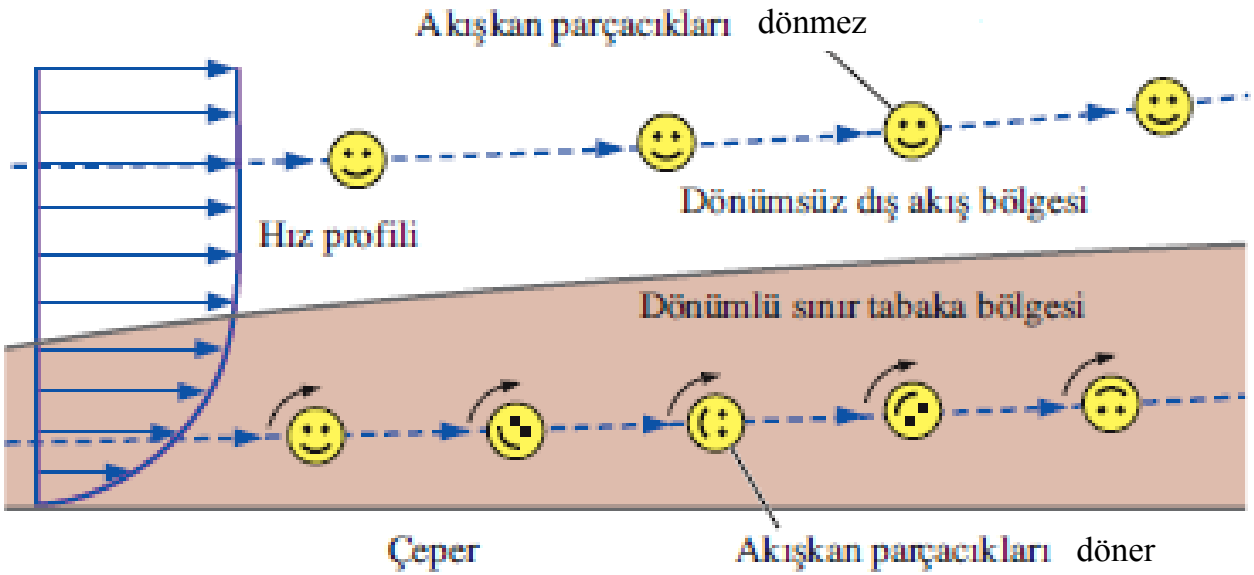


Vektörel bir çarpımın yönü sağ-el kuralı ile belirlenir.



Vortisite vektörü **dönen** bir akışkan parçacığının açısal hız vektörünün iki katına eşittir.

- **Akış alanındaki bir noktada vortisite sıfır değilse**, uzayda o noktayı işgal eden akışkan parçacığı dönüyor demektir ve bu bölgedeki akış dönümlü olarak nitelendirilir.
- Aynı şekilde **akış alanının bir bölgesinde vortisite sıfır** ise (veya yok denecek kadar küçük ise), bu bölgedeki akışkan parçacıkları dönmez ve bu bölgedeki **akışın dönümsüz** olduğu söylenir.
- Fiziksel olarak dönümlü bir akış bölgesindeki akışkan parçacıkları, bu akış bölgesi boyunca devamlı dönerek hareket eder. Örneğin **katı bir çeper yakınındaki viskoz sınır tabaka içerisindeki akışkan parçacıkları dönümlü iken (bu nedenle vortisiteleri sıfırdan farklı), sınır tabakanın dışarısındaki akışkan parçacıkları dönümsüzdür (bu nedenle vortisiteleri sıfırdır).**



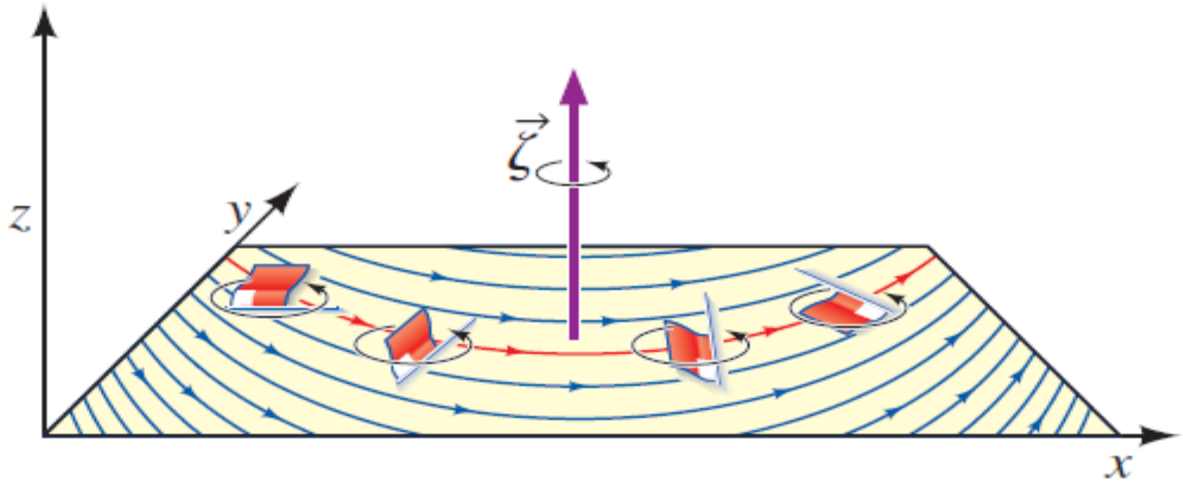
Dönümlü ve dönümsüz akış arasındaki fark: Dönümlü bir akış bölgesindeki akışkan elemanları döner, dönüm süz bir akış bölgesindeki akışkan parçacıkları ise dönmez.

Kartezyen koordinatlarda vortisite vektörü:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Kartezyen koordinatlarda iki-boyutlu akış:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$



xy-düzlemindeki iki-boyutlu akış için vortisite vektörü daima *z*- (ya da –*z*)-yönündedir. Bu resimde bayrak şekilli akışkan parçacıkları *xy*-düzleminde hareket ederken saatin tersi yönünde dönmektedir; vortisite ise gösterildiği gibi pozitif *z*-yönündedir.

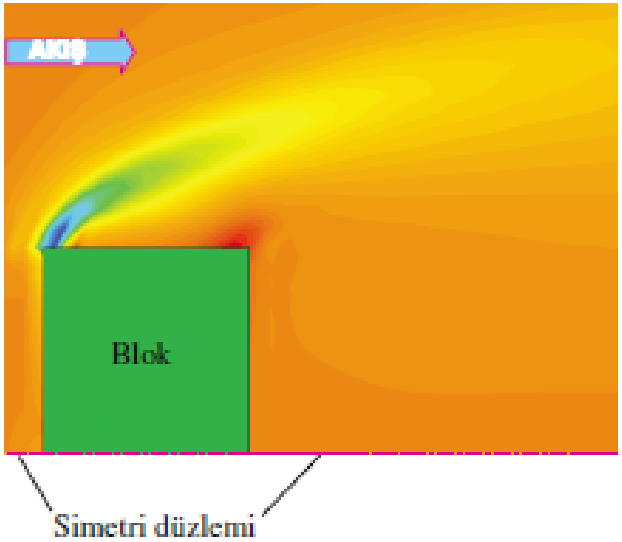
ÖRNEK 4–7 İki-boyutlu Bir Akışta Vortisite Konturları

Şekil 4–33 ve Şekil 4–34'te gösterilen dikdörtgen kesitli bir bloğa çarpan iki-boyutlu serbest-akım akışının HAD hesaplamasını göz önüne alınız. Vortisite vektörlerini çiziniz ve sonucu irdeleyiniz.

ÇÖZÜM HAD ile oluşturularak verilen bir hız alanı için vortisite alanını hesaplayacağız ve ardından vortisitenin kontur çizimini oluşturacağız.

Analiz Akış iki-boyutlu olduğundan vortisitenin sıfırdan farklı tek bileşeni Şekil 4–33 ve Şekil 4–34'te sayfa düzlemine dik olan *z*-yönündedir.Bu akış alanına ait vortisitenin *z*-bileşeninin kontur çizimi Şekil 4–47'de gösterilmiştir. Bloğun sol-üst köşesindeki mavi bölge yüksek negatif değerli vortisiteye işaret etmektedir. Yani bu bölgedeki akışkan parçacıkları *saat yönünde* dönmektedir. Bu durum akışın bu kısmında karşılaşılan yüksek hız gradyenlerinden kaynaklanmaktadır. Bu kısımda sınır tabaka cismin köşesinde çeperden ayrılmakta ve ince bir **kayma tabaka**sı oluşturmaktadır. Bu tabakanın enlemesine yönde hız çok ani değişmektedir. Kayma tabakasındaki vortisite yoğunluğu, vortisite aşağıakıma doğru yayıldıkça azalmaktadır. Bloğun sağ-üst köşesi dolaylarındaki küçük kırmızı bölge *pozitif* vortisiteyi (saatin tersi yönünde dönmeyi) göstermektedir –akış ayrılmasından dolayı oluşan ikincil bir akış deseni.

İrdeleme Hızın türevlerinin yüksek olduğu bölgelerde vortisitenin büyüklüğünün en yüksek seviyede olması beklenir (Denklem 4–30'a bakınız). Yakından incelenirse Şekil 4–47'deki mavi bölgenin gerçekten de Şekil 4–33'deki yüksek hız gradyenlerine karşılık geldiği görülür. Şekil 4–47'daki vortisite alanının zaman-ortalamalı olduğu unutulmamalıdır. Gerçekte anlık akış alanı türbülanslıdır ve daimi değildir. Vortisiteler ise küt gövdeden yayılmaktadır.



ŞEKİL 4–47
Bir bloğa çarpan akış nedeniyle oluşan vortisite alanı ζ_z'in kontur çizimi (HAD hesaplamalarından elde edilmiştir). Simetriden ötürü sadece cismin üst yarısı gösterilmiştir. Mavi bölgeler yüksek negatif vortisiteyi; kırmızı bölgeler ise yüksek pozitif vortisiteyi göstermektedir.

ÖRNEK 4–8 İki-boyutlu Akışta Dönümlülüğün Belirlenmesi

Aşağıda verilen daimi, sıkıştırılamaz, iki-boyutlu hız alanını dikkate alınız:

$$\vec{V} = (u, v) = x^2\vec{i} + (-2xy - 1)\vec{j} \qquad (1)$$

Bu akış dönümlü mü yoksa dönümsüz müdür? Birinci dördülde birkaç akım çizgisi çiziniz ve bunları irdeleyiniz.

ÇÖZÜM Verilen hız alanına sahip akışın dönümlü mü yoksa dönümsüz mü olduğunu belirleyeceğiz ve birinci dördülde birkaç akım çizgisi çizeceğiz.

Analiz Akış iki-boyutlu olduğundan Denklem 4–31 geçerlidir:

Vortisite:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} = (-2y - 0)\vec{k} = -2y\vec{k} \qquad (2)$$

Vortisite sıfırdan farklı olduğundan bu akış **dönümlü**dür. Şekil 4–48'de birinci dördülde akışa ait birkaç akım çizgisi çizilmiştir. Buradan akışkanın aşağı ve sağa doğru hareket ettiği anlaşılmaktadır. Akışkan parçasının ötelenmesi ve şekil değiştirmesi de aynı şekil üzerinde gösterilmiştir: $\Delta t = 0$'da akışkan parçası kare şeklindedir, $\Delta t = 0.25$ s'de hareket etmiş ve şekil değiştirmiştir ve $\Delta t = 0.50$ s'de ise daha da ileri hareket etmiş ve daha fazla şekil değiştirmiştir. Bunun sonucunda akışkan parçasının sağ kenarı sol kenarına nazaran sağa doğru ve aşağı doğru daha hızlı hareket etmekte ve akışkan parçasının x-yönünde uzamasına ve düşey doğrultuda ezilmesine neden olmaktadır. Ayrıca açıkça görülüyor ki, akışkan parçası *saat yönü*nde net bir dönme yapmaktadır ve bu da Denklem 2'nin sonucu ile uyumludur.

İrdeleme Denklem 4–29'dan biliyoruz ki, her bir akışkan parçacığı vortisite vektörünün yarısına eşit olan bir açısal hızda $\vec{\omega} = -y\vec{k}$ dönmektedir. $\vec{\omega}$ sabit olmadığından bu akış bir katı cisim dönmesi *değildir*. Burada $\vec{\omega}$ vektörü y ile lineer olarak değişmektedir. Daha detaylı bir analiz ile bu akış alanının sıkıştırılamaz olduğu gösterilebilir. Şekil 4–48'de akışkan parçasını gösteren gölgelendirilmiş alanlar her üç durumda da aynı kalmaktadır.

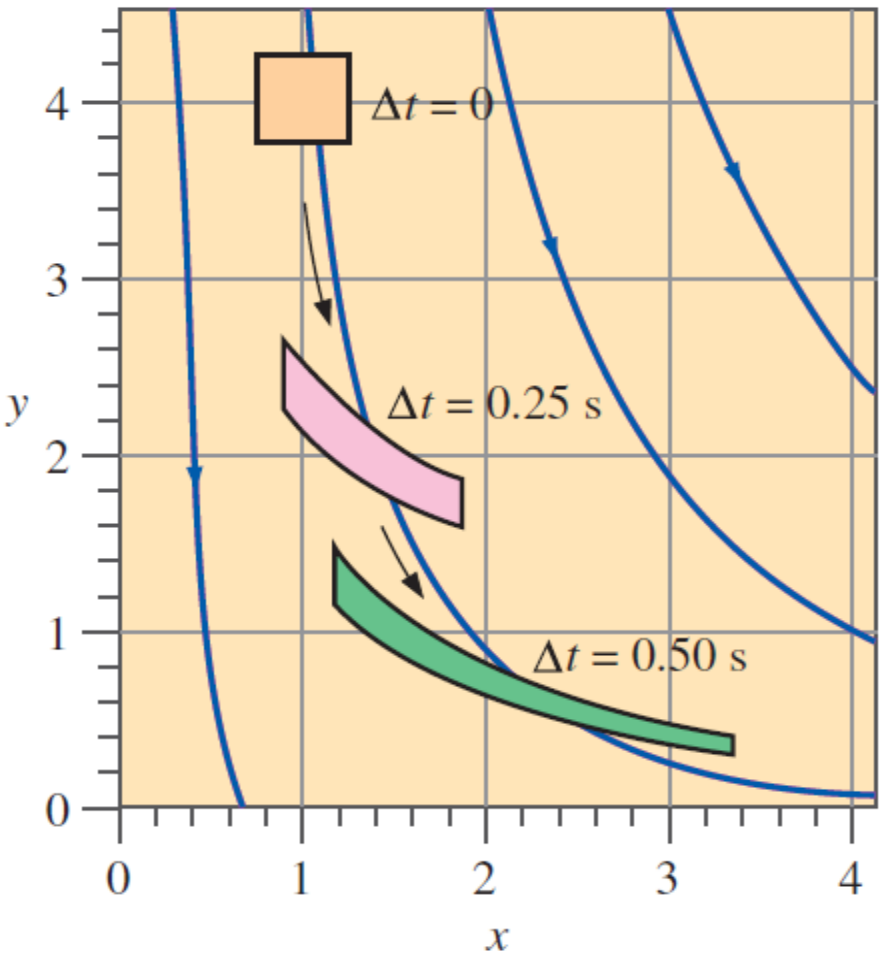
İki Boyutlu Akışta Dönümlülüğün Belirlenmesi

Daimi, sıkıştırılamaz ve iki boyutlu hız alanı:

$$\vec{V} = (u, v) = x^2\vec{i} + (-2xy - 1)\vec{j}$$

Vortisite:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} = (-2y - 0)\vec{k} = -2y\vec{k}$$



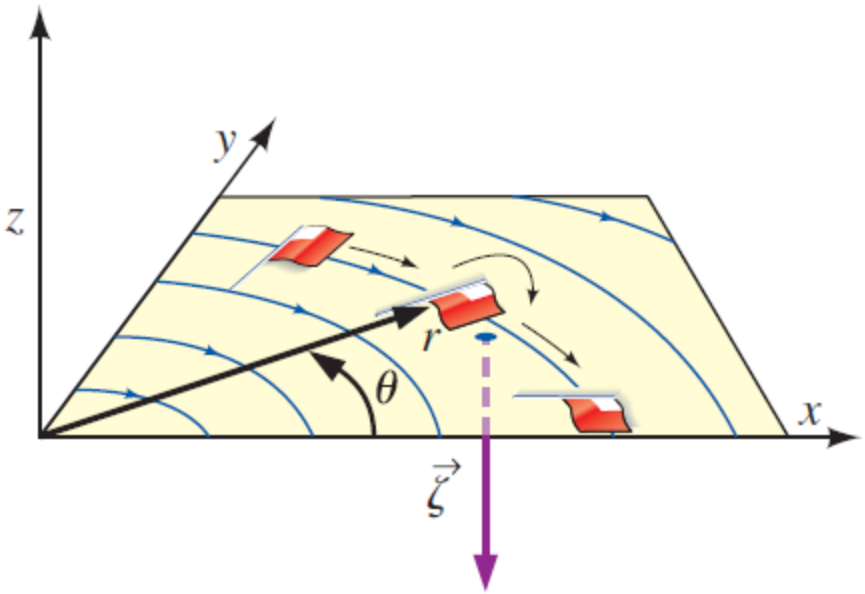
Örnek 4–8'deki hız alanına göre 0.25 s ve 0.5 s'lik zaman dilimleri boyunca hareket ettirilmiş, başlangıçta kare şeklinde olan akışkan parçasının şekil değiştirmesi. Ayrıca birinci dördülde birkaç akım çizgisi de çizilmiştir. Şekilden, akışın dönümlü olduğu açıkça görülmektedir.

Silindirik koordinatlarda vortisite vektörü:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

Silindirik koordinatlarda iki-boyutlu akış:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\vec{k}$$



rθ-düzlemindeki iki-boyutlu akış için vortisite vektörü daima *z*- (ya da –*z*)-yönündedir. Bu resimde bayrak şekilli akışkan parçacıkları *rθ*-düzleminde hareket ederken saat yönünde dönmektedir; vortisite gösterildiği gibi –*z*-yönündedir.

İki Dairesel Akışın Karşılaştırılması

A akışı—katı-cisim dönmesi: $u_r = 0$ ve $u_\theta = \omega r$

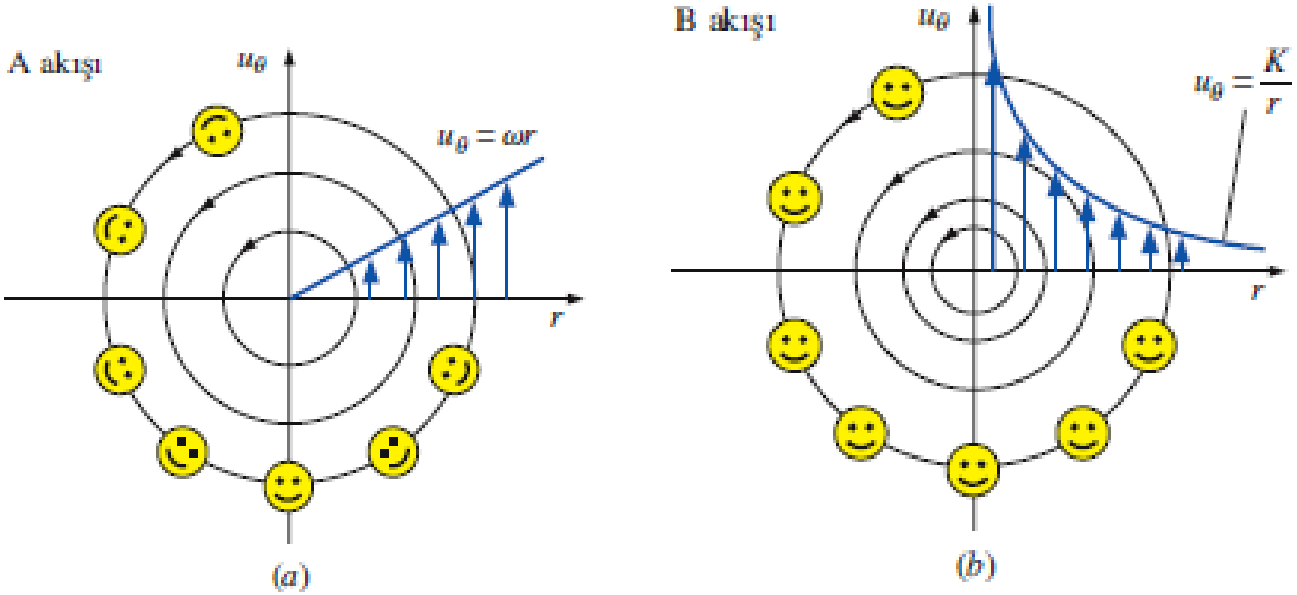
B akışı—çizgisel vorteks: $u_r = 0$ ve $u_\theta = \dfrac{K}{r}$

A akışı—katı-cisim dönmesi:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} - 0\right)\vec{k} = 2\omega\vec{k}$$

B akışı—çizgisel vorteks:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(K)}{\partial r} - 0\right)\vec{k} = 0$$



(a) Katı cisim dönmesi şeklindeki A akışına ve *(b)* çizgisel vorteks şeklindeki B akışına ait akım çizgileri ve hız profilleri. A akışı dönüm-lüdür, buna karşın B akışı orijin hariç her yerde dönümsüzdür.

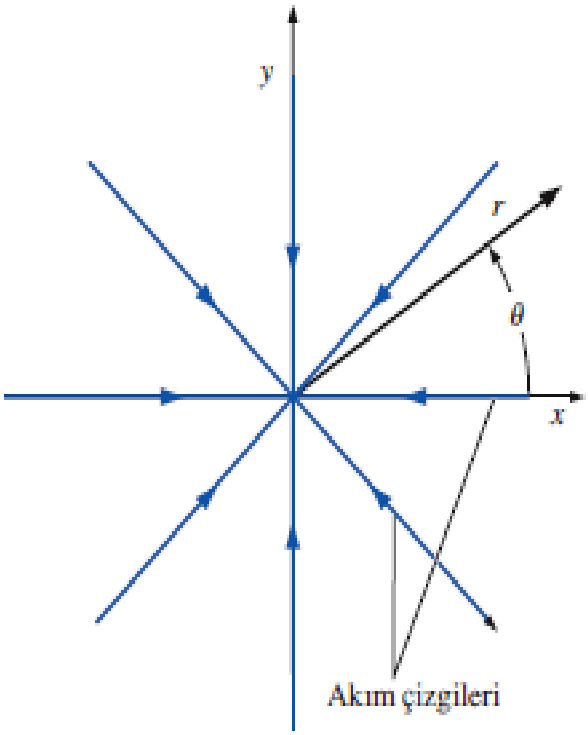
Çocuklar atlıkarınca üzerinde dönerlerken, aynı zamanda atlıkarıncayla aynı açısal hızda kendi etraflarında da dönerler. Bu dönümlü akış ile benzerdir.

Bunun aksine bir dönme dolap üzerindeki çocuklar ise dairesel yörüngelerini izlerken daima yukarı doğru yönlenmiş bir vaziyette kalırlar. Bu da dönümsüz akışa benzerdir.

(b)

(a)

Basit bir benzeşim (analoji): *(a)* Dönümlü dairesel akış atlıkarıncaya benzerken *(b)* dönümsüz dairesel akış dönme dolaba benzer.



ŞEKİL 4–52
Çizgisel kuyu için $r\theta$-düzlemindeki akım çizgileri.

ÖRNEK 4–9 Çizgisel Kuyuda Dönümlülüğün Belirlenmesi

Çizgisel kuyu denilen basit iki-boyutlu bir hız alanı, z-ekseni boyunca bir çizgi içerisine doğru emilmekte olan akışkanın benzetimini yapmak için sıklıkla kullanılır. z-ekseni boyunca birim uzunluk başına hacimsel debi $\dot{V}/L$ değerinin bilindiğini varsayalım. Burada $\dot{V}$ negatif bir büyüklüktür. $r\theta$-düzleminde iki boyutta hız bileşenleri şöyledir:

$$\textit{Çizgisel kuyu:} \qquad u_r = \frac{\dot{V}}{2\pi L}\frac{1}{r} \quad \text{ve} \quad u_\theta = 0 \tag{1}$$

Akışa ait birkaç akım çizgisi çiziniz ve vortisiteyi hesaplayınız. Bu akış dönümlü mü yoksa dönümsüz müdür?

ÇÖZÜM Verilen akış alanının akım çizgileri çizilecek ve akışın dönümlülüğü belirlenecektir.

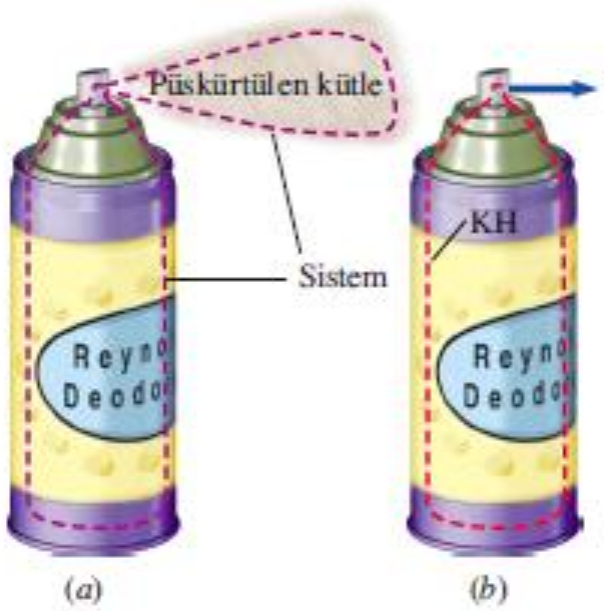
Analiz Sadece radyal akış olduğundan ve hiç teğetsel akış bulunmadığından, tüm akım çizgilerinin orijine doğru yönlenmiş ışınlar şeklinde olacağı anlaşılmaktadır. Şekil 4–52'de birkaç akım çizgisi çizilmiştir. Vortisite ise Denklem 4–33'ten hesaplanır:

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial\theta}u_r\right)\vec{k} = \frac{1}{r}\left(0 - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\dot{V}}{2\pi L}\frac{1}{r}\right)\right)\vec{k} = 0 \tag{2}$$

Vortisite vektörü her yerde sıfır olduğundan bu akış alanı **dönümsüz**dür.

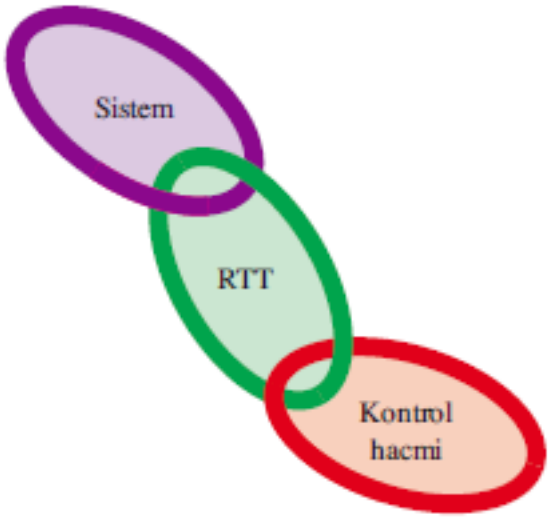
İrdeleme Girişlerin ve davlumbazların içine doğru olan akışlarda olduğu gibi, içerisinde emişin bulunduğu birçok akış, dönümsüz akış kabulü ile oldukça hassas bir biçimde ele alınabilir (Heinsohn and Cimbala, 2003).

4–6 ■ REYNOLDS TRANSPORT TEOREMİ

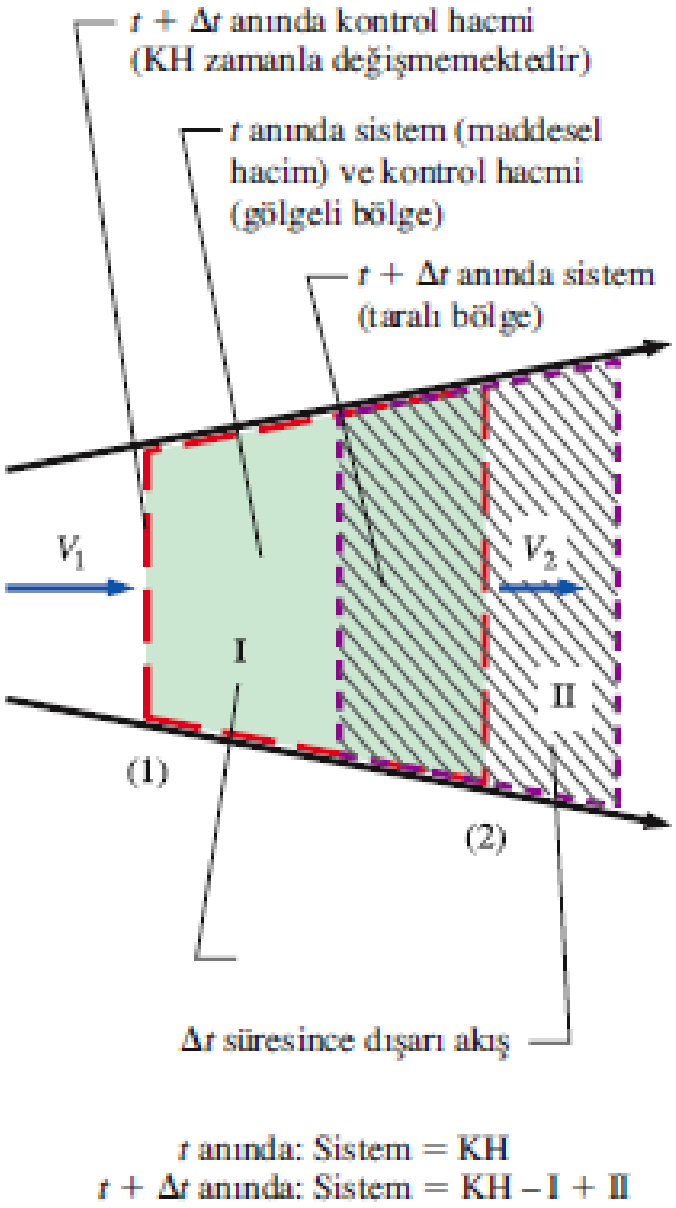


Kutusundan püskürtülen deodorantın analizi için iki yöntem:
(a) Hareket ederken ve şekil değiştiren akışkan takip edilir. Bu *sistem yaklaşımı*dır — sistem sınırında kütle geçişi olmaz ve toplam kütle sabit kalır.
(b) Kutunun sabit iç hacmi dikkate alınır. Bu *kontrol hacmi yaklaşımı*dır — kütle sınırdan geçer.

Bir sistem ve bir kontrol hacmi için herhangi bir <u>yaygın özelliğin birim zamandaki değişimleri arasındaki</u> ilişki Reynolds Transport Teoremi (RTT) ile ifade edilir.



Reynolds Transport Teoremi (RTT) sistem yaklaşımı ile kontrol hacmi yaklaşımı arasında bir bağ oluşturur.



t anında: Sistem = KH
$t + \Delta t$ anında: Sistem = KH – I + II

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{dB_{KH}}{dt} - \dot{B}_{giren} + \dot{B}_{çıkan}$$

Bu denklem; sistemin *B* özelliğinin değişim hızının; *B*'nin kontrol hacmi içerisindeki değişim hızı ile *B*'nin kontrol yüzeyinden dışarı çıkan kütle ile oluşan net akısının toplamına eşit olduğunu ifade etmektedir.

Göz önüne alınan bir anda sistem ve kontrol hacminin aynı uzayı işgal etmesi kaydıyla bu denklem herhangi bir t anı için uygulanabilir.

t ve $t + \Delta t$ anlarında bir akış alanının ıraksak kısmındaki hareketli sistem (taralı bölge) ve sabit kontrol hacmi (gölgeli bölge). Üst ve alt sınırlar akışa ait akım çizgileridir.

B (kütle, enerji ya da momentum gibi) herhangi bir **yaygın özellik**, $b = B/m$ ise buna karşılık gelen **yoğun özellik** olsun. Yaygın özelliklerin toplanabilir olmasından yola çıkarak t ve $t + \Delta t$ anlarındaki yaygın özellik B aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$B_{\text{sis},\,t} = B_{\text{KH},t} \qquad (t \text{ anında sistem ve kontrol hacmi üst üstedir})$$

$$B_{\text{sis},\,t+\Delta t} = B_{\text{KH},t+\Delta t} - B_{\text{I},t+\Delta t} + B_{\text{II},t+\Delta t}$$

Birinci eşitliği ikinci eşitlikten çıkarıp Δt ile bölelim:

$$\frac{B_{\text{sis},\,t+\Delta t} - B_{\text{sis},\,t}}{\Delta t} = \frac{B_{\text{KH},t+\Delta t} - B_{\text{KH},t}}{\Delta t} - \frac{B_{\text{I},t+\Delta t}}{\Delta t} + \frac{B_{\text{II},t+\Delta t}}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$ için limitini alıp türevin tanımından faydalanırsak;

$$\frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \frac{dB_{\text{KH}}}{dt} - \dot{B}_{\text{giren}} + \dot{B}_{\text{çıkan}} \tag{4–38}$$

veya

$$\frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \frac{dB_{\text{KH}}}{dt} - b_1\rho_1 V_1 A_1 + b_2\rho_2 V_2 A_2$$

elde edilir. Çünkü,

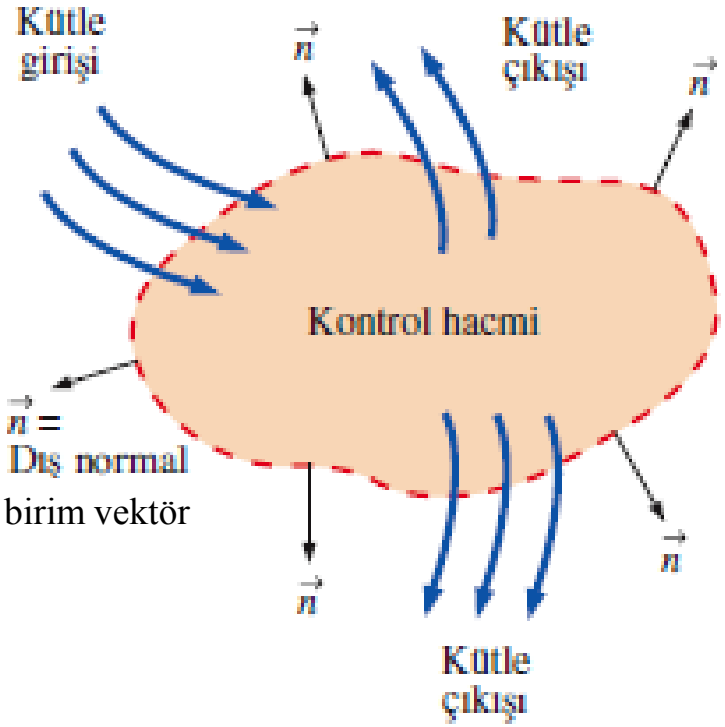
$$B_{\text{I},t+\Delta t} = b_1 m_{\text{I},t+\Delta t} = b_1\rho_1 V_{\text{I},t+\Delta t} = b_1\rho_1 V_1\,\Delta t\,A_1$$

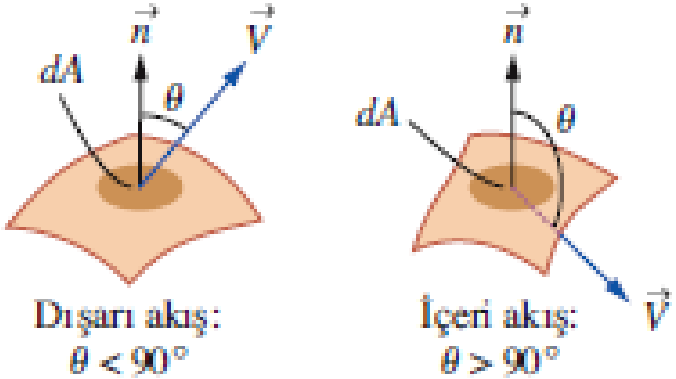
$$B_{\text{II},t+\Delta t} = b_2 m_{\text{II},t+\Delta t} = b_2\rho_2 V_{\text{II},t+\Delta t} = b_2\rho_2 V_2\,\Delta t\,A_2$$

ve

$$\dot{B}_{\text{giren}} = \dot{B}_{\text{I}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{\text{I},\,t+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{b_1\rho_1 V_1\,\Delta t\,A_1}{\Delta t} = b_1\rho_1 V_1\,A_1$$

$$\dot{B}_{\text{çıkan}} = \dot{B}_{\text{II}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B_{\text{II},\,t+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{b_2\rho_2 V_2\,\Delta t\,A_2}{\Delta t} = b_2\rho_2 V_2\,A_2$$





$\vec{V}\cdot\vec{n} = |\vec{V}||\vec{n}|\cos\theta = V\cos\theta$
$\theta < 90°$ ise $\cos\theta > 0$ (dışarı akış).
$\theta > 90°$ ise $\cos\theta < 0$ (içeri akış).
$\theta = 90°$ ise $\cos\theta = 0$ (akış yoktur).

Diferansiyel bir kontrol yüzeyinden dışarı ve içeri doğru olan kütle akışı.

$$\dot{B}_{net} = \dot{B}_{çıkan} - \dot{B}_{giren} = \int_{KY} \rho b \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA$$

$b\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\, dA$ çarpımının kontrol yüzeyi boyunca integrali, B özelliğinin birim zamanda kontrol hacminden dışarı çıkan (negatif olduğunda kontrol hacminin içine giren) net miktarını verir.

$$B_{KH} = \int_{KH} \rho b\, dV$$

Sabit KH için RTT:

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{KH} \rho b\, dV + \int_{KY} \rho b \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA$$

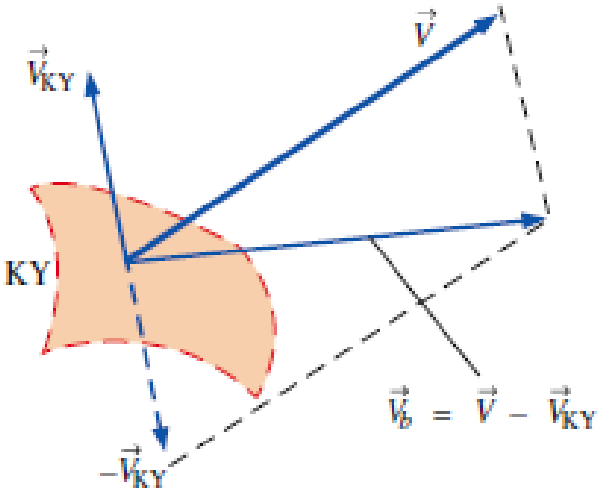
Sabit KH için alternatif RTT:

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \int_{KH} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{KY} \rho b \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA$$

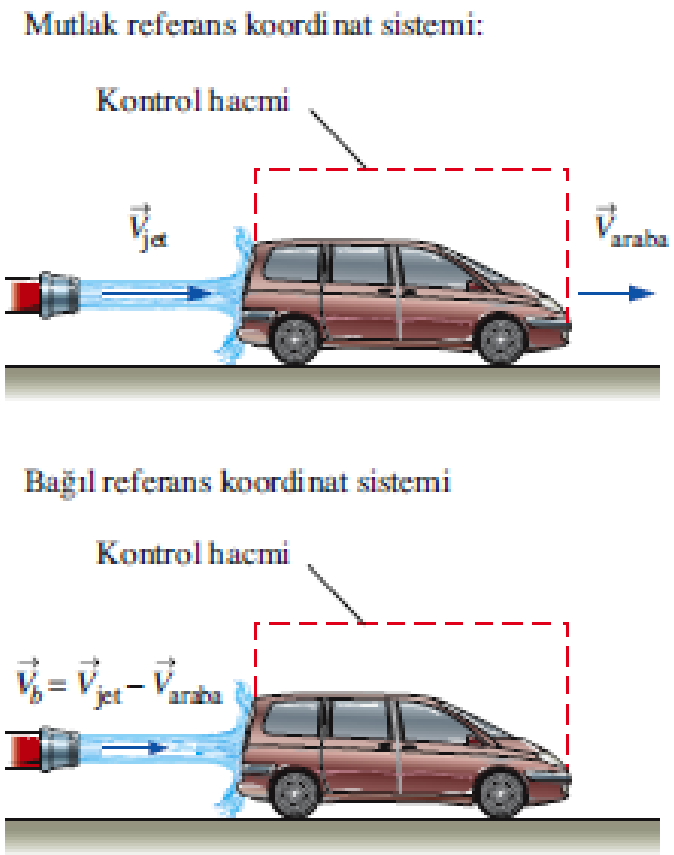
Bağıl hız: $\vec{V}_b = \vec{V} - \vec{V}_{KY}$

Hareketli KH için alternatif RTT: $$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{KH} \rho b \, dV + \int_{KY} \rho b \vec{V}_b \cdot \vec{n} \, dA$$

Daimi akış için RTT: $$\frac{dB_{sis}}{dt} = \int_{KY} \rho b \vec{V}_b \cdot \vec{n} \, dA$$



Kontrol yüzeyinden geçen akışkanın *bağıl hızı*, akışkanın mutlak hızı ile yerel kontrol yüzeyi hızının negatifinin vektörel toplamından bulunur.



Reynolds Transport Teoremi (RTT)'nin sabit hızla hareket eden bir kontrol hacmine uygulanması.

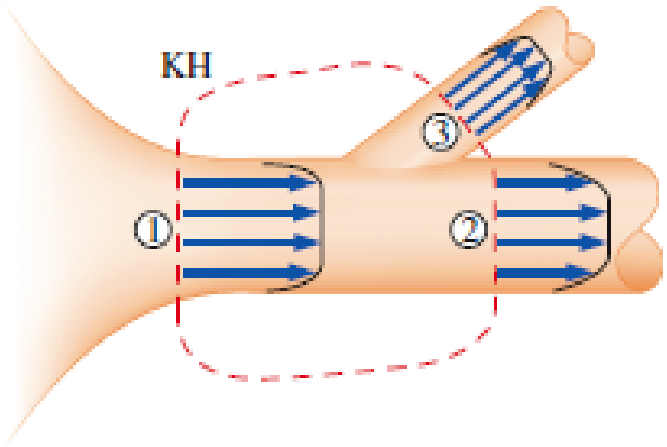
$$\int_A \rho b \vec{V}_b \cdot \vec{n}\, dA \cong b_{ort} \int_A \rho \vec{V}_b \cdot \vec{n}\, dA = b_{ort}\, \dot{m}_b$$

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{KH} \rho b\, dV + \sum_{\text{çıkan}} \underbrace{\dot{m}_b b_{ort}}_{\text{her çıkış için}} - \sum_{\text{giren}} \underbrace{\dot{m}_b b_{ort}}_{\text{her giriş için}}$$

$$\dot{m}_b \approx \rho_{ort}\, \dot{V}_b = \rho_{ort}\, V_{b,\,ort}\, A$$

İyi tanımlanmış giriş ve çıkışlar için yaklaşık RTT:

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{KH} \rho b\, dV + \sum_{\text{çıkan}} \underbrace{\rho_{ort}\, b_{ort}\, V_{b,\,ort}\, A}_{\text{her çıkış için}} - \sum_{\text{giren}} \underbrace{\rho_{ort}\, b_{ort}\, V_{b,ort}\, A}_{\text{her giriş için}}$$



İyi tanımlanmış bir giriş (1) ve iki çıkışın (2 ve 3) bulunduğu kontrol hacmine bir örnek. Böyle durumlarda RTT'deki kontrol yüzeyi integralleri her bir giriş ve çıkıştan geçen akışkan özelliklerinin ortalaması cinsinden daha uygun bir biçimde yazılabilir.

Reynolds Transport Teoreminin Alternatif Türetimi

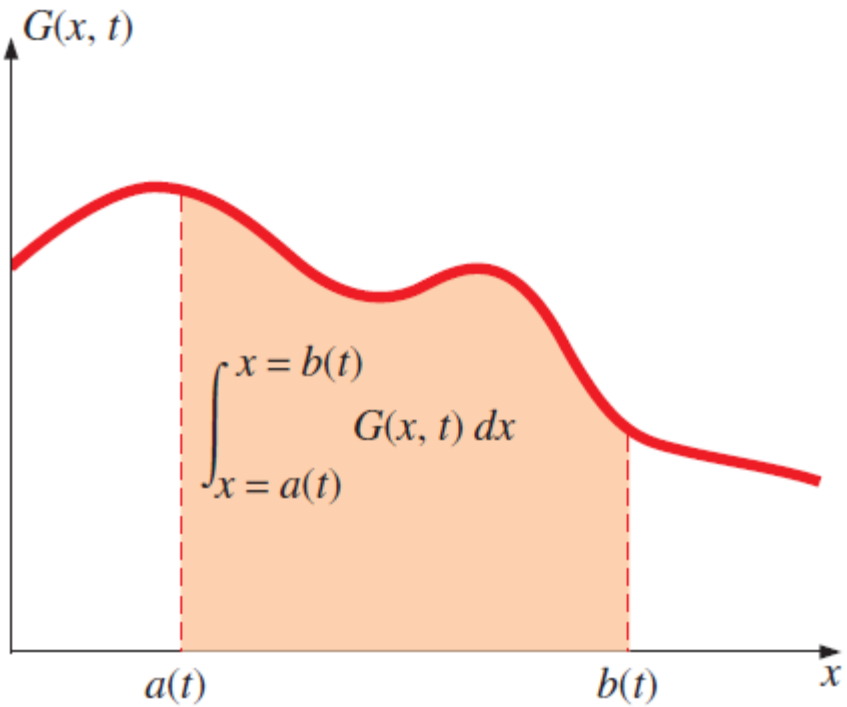
Bir-boyutlu Leibniz teoremi:

$$\frac{d}{dt}\int_{x=a(t)}^{x=b(t)} G(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}\,dx + \frac{db}{dt}G(b,t) - \frac{da}{dt}G(a,t)$$

Leibniz Teoremini kullanarak Reynolds Transport Teoremini daha zarif bir yolla türetmek mümkündür.

Leibniz teoremi sadece integral sınırları $a(t)$ ve $b(t)$'nin zamana göre değişimlerini hesaba katmakla kalmaz, aynı zamanda integrali alınan $G(x,t)$ ifadesinin zamanla daimi olmayan değişimlerini de dikkate alır.

Bir-boyutlu Leibniz Teoremi, integral sınırları zamanın fonksiyonu olan bir integralin zamana göre türevini hesaplamada gereklidir (integral işlemi x'e göre).



ÖRNEK 4–10 Bir-Boyutlu Leibniz İntegrali

Aşağıdaki ifadeyi mümkün olduğunca sadeleştiriniz:

$$F(t) = \frac{d}{dt}\int_{x=0}^{x=Ct} e^{-x^2}\,dx \qquad (1)$$

ÇÖZÜM Verilen ifadeden $F(t)$ en sade şekliyle elde edilecektir.

Analiz Çözüm için önce integrali sonra da türevi almaya çalışabiliriz. Ancak verilen Denklem 1, Denklem 4–49 biçiminde olduğundan bir-boyutlu Leibniz teoremini kullanabiliriz. Burada $G(x, t) = e^{-x^2}$ olarak verilmiştir (Bu basit örnekte G zamanın fonksiyonu değildir). İntegralin sınırları ise $a(t) = 0$ ve $b(t) = Ct$ olarak verilmiştir. Buna göre sonuç aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F(t) = \int_a^b \underbrace{\frac{\partial G}{\partial t}}_{0}\,dx + \underbrace{\frac{db}{dt}}_{C}\underbrace{G(b,t)}_{e^{-b^2}} - \underbrace{\frac{da}{dt}}_{0}G(a,t) \quad \rightarrow \quad F(t) = Ce^{2\,C^2t^2} \qquad (2)$$

İrdeleme Aynı sonuca Leibniz teoremini kullanmadan gitmeye çalışınız.

Üç boyutlu (*hacim*) Leibniz teoremi aşağıdaki gibi ifade edilir:

Üç-boyutlu Leibniz teoremi:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} G(x, y, z, t)\, dV = \int_{V(t)} \frac{\partial G}{\partial t}\, dV + \int_{A(t)} G\vec{V}_A \cdot \vec{n}\, dA \qquad \textbf{(4–50)}$$

Burada $V(t)$, hareket eden ve/veya şekil değiştiren bir hacmi (zamana bağlı), $A(t)$ bu hacmin yüzeyini (sınır) ve $\vec{V}_A$ bu hareketli yüzeyin mutlak hızını (Şekil 4–62) ifade etmektedir. Denklem 4–50 uzayda ve zamanda gelişigüzel hareket eden ve/veya şekli değişen *herhangi bir* hacme uygulanabilir. Önceki analizle uyum sağlamak açısından integrali alınacak G fonksiyonunu, akış uygulaması için ρb olarak alalım:

Akışa uygulanan üç-boyutlu Leibniz teoremi:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho b\, dV = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{A(t)} \rho b\vec{V}_A \cdot \vec{n}\, dA \qquad \textbf{(4–51)}$$

Eğer Leibniz teoremi bir **maddesel hacmin** (akışla hareket eden miktarı sabit bir sistem) söz konusu olduğu özel bir duruma uygulanırsa, maddesel yüzey üzerinde her noktada $\vec{V}_A = \vec{V}$ olur, zira maddesel hacim akışkan *ile beraber* hareket etmektedir. Bu halde $\vec{V}$ yerel akış hızı olur ve Denklem 4–51 aşağıdaki hale gelir:

Maddesel bir hacme uygulanan Leibniz teoremi:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho b\, dV = \frac{dB_{\text{sis}}}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{A(t)} \rho b\vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \qquad \textbf{(4–52)}$$

Denklem 4–52 herhangi bir t anında geçerlidir. Kontrol hacmini, bu t anında kontrol hacmi ile sistem aynı boşluğu işgal edecek şekilde, yani *çakışık* olarak tanımlayalım. Daha sonraki bir $t + \Delta t$ anında sistem akış ile hareket etmiş ve şekli değişmiştir. Öte yandan kontrol hacmi farklı bir

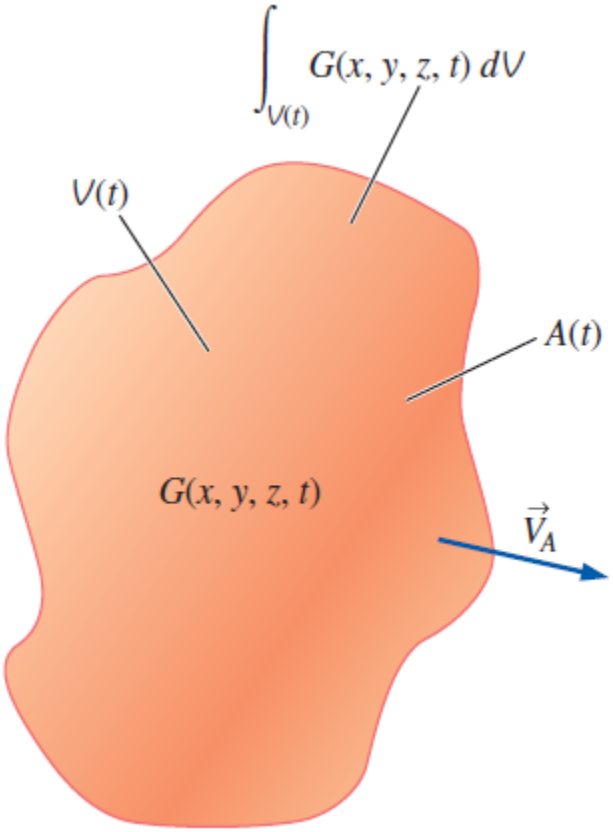
biçimde hareket etmiş ve şekil değiştirmiş olabilir (Şekil 4–63). Ancak burada önemli olan, *t anında sistem (maddesel hacim) ve kontrol hacminin tek ve aynı olmasıdır*. Dolayısıyla Denklem 4–52'nin sağ tarafındaki hacim integrali; *t* anındaki *kontrol hacmi* üzerinde, yüzey integrali ise *t* anındaki *kontrol yüzeyi* üzerinden alınabilir. Böylece aşağıdaki ifade yazılabilir:

Genel RTT, hareketli KH:

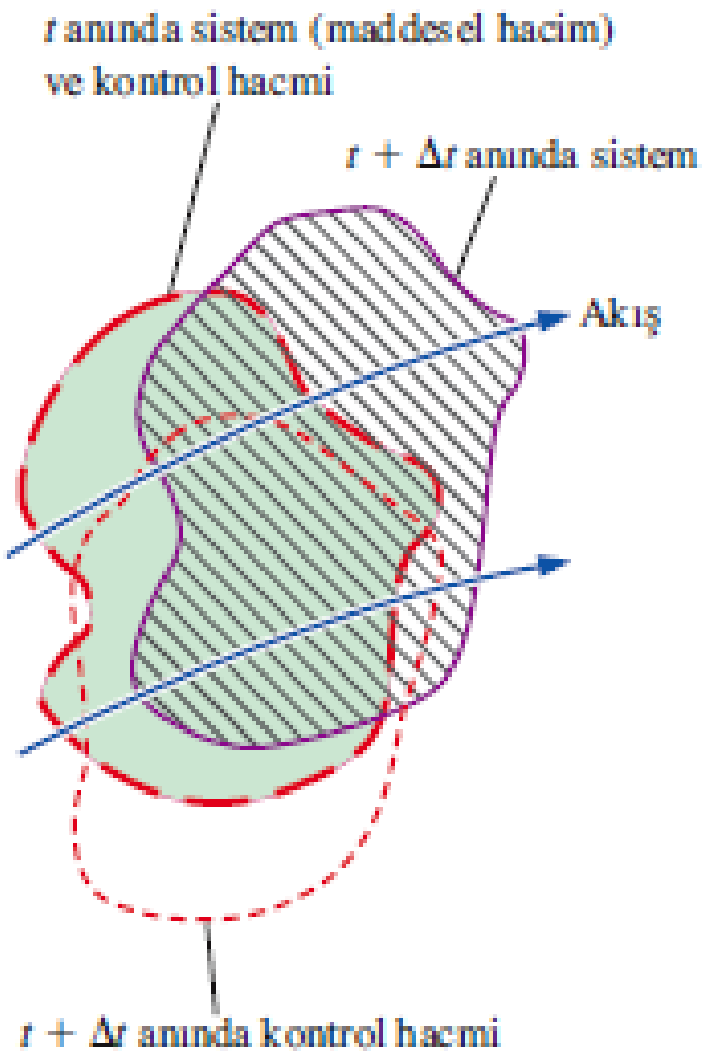
$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \int_{KH} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{KY} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA \qquad (4\text{–}53)$$

Bu ifade Denklem 4–42 ile özdeştir ve *t* anında hareket etmekte ve/veya şekli değişmekte olan gelişigüzel şekilli bir kontrol hacmi için geçerlidir. Denklem 4–53'teki $\vec{V}$ hızının, akışkanın *mutlak* hızı olduğu unutulmamalıdır.

Üç-boyutlu Leibniz Teoremi, hacmin kendisinin zamanla hareket ettiği ve/veya şekil değiştirdiği durumda bir hacim integralinin zamana göre türevini hesaplamada gereklidir. Buna göre Leibniz teoreminin üç-boyutlu biçimi, Reynolds transport teoremini alternatif bir yolla türetmek için kullanılabilir.



Maddesel hacim (sistem) ve kontrol hacmi t anında aynı boşluğu işgal etmekte (yeşil gölgeli alan), ancak farklı biçimde hareket edip şekil değiştirmektedir. Bir süre geçtikten sonra bunlar artık üst üste *çakışmaz*.



ÖRNEK 4–11 Bağıl Hız Cinsinden Reynolds Transport Teoremi

Leibniz teoremi ve genel Reynolds transport teoreminden (Denklem 4–53) yola çıkarak gelişigüzel şekilde hareket eden ve şekil değiştiren bir kontrol hacmi için Denklem 4–44'ün geçerli olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM Denklem 4–44'ün ispatı yapılacaktır.

Analiz Leibniz teoreminin genel üç-boyutlu uyarlaması olan Denklem 4–50 *herhangi bir* kontrol hacmine uygulanabilir. Biz bu denklemi, maddesel hacimden (sistemden) farklı olarak hareket edebilen ve/veya şekil değiştirebilen bir kontrol hacmine uygulayalım (Şekil 4–62). G yerine ρb alınırsa Denklem 4–50 aşağıdaki hale gelir:

$$\frac{d}{dt}\int_{KH} \rho b\, dV = \int_{KH} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV + \int_{KY} \rho b \vec{V}_{KY}\cdot\vec{n}\, dA \qquad (1)$$

Denklem 4–53'ten kontrol hacmi integrali çekilirse,

$$\int_{KH} \frac{\partial}{\partial t}(\rho b)\, dV = \frac{dB_{sis}}{dt} - \int_{KY} \rho b \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA \qquad (2)$$

elde edilir. Denklem 2 Denklem 1'de yerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\int_{KH} \rho b\, dV = \frac{dB_{sis}}{dt} - \int_{KY} \rho b \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA + \int_{KY} \rho b \vec{V}_{KY}\cdot\vec{n}\, dA \qquad (3)$$

bulunur. Bu ifadedeki son iki terim tek bir terim altında toplanır ve denklem yeniden düzenlenirse aşağıdaki sonuca ulaşılır:

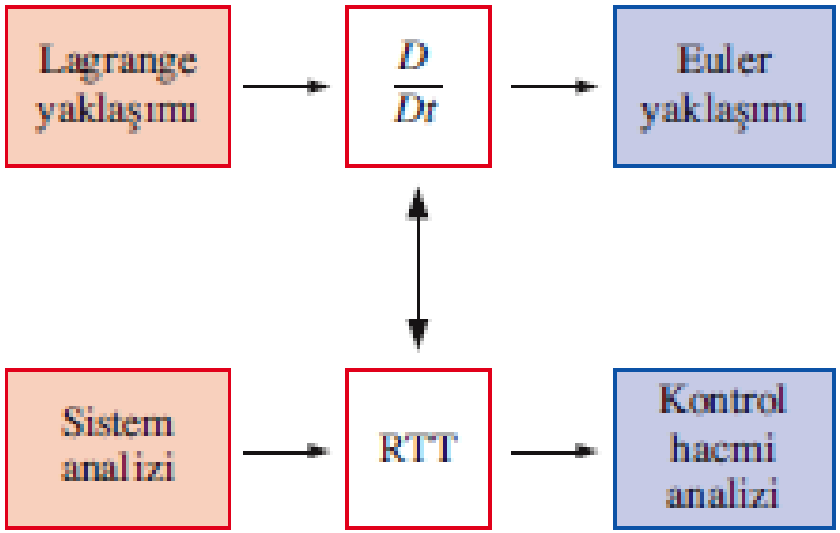
$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{KH} \rho b\, dV + \int_{KY} \rho b(\vec{V} - \vec{V}_{KY})\cdot\vec{n}\, dA \qquad (4)$$

Denklem 4–43 ile verilen bağıl hız tanımı kullanılarak sonuç ifade aşağıdaki gibi elde edilir:

Bağıl hız cinsinden RTT:
$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{KH} \rho b\, dV + \int_{KY} \rho b \vec{V}_b\cdot\vec{n}\, dA \qquad (5)$$

İrdeleme Denklem 5 gerçekten de Denklem 4–44 ile özdeştir ve bu sonuçla Leibniz teoreminin gücü ve zarafeti kanıtlanmış olmaktadır.

Maddesel Türev ve Reynolds Transport Teoremi (RTT) Arasındaki İlişki



Sonlu büyüklükteki kontrol hacimleri için olan Reynolds transport teoremi (integral analizi), sonsuz küçük büyüklükteki hacimler için olan maddesel türeve benzerdir. Her iki durumda da Lagrange ya da sistem bakış açısını; Euler ya da kontrol hacmi bakış açısına dönüştürülmektedir.

Reynolds transport teoremi sonlu büyüklükteki kontrol hacmini, maddesel türev ise sonsuz küçük akışkan parçacıklarını ele almasına karşın aynı temel fiziksel yorum her ikisi içinde geçerlidir.

Maddesel türevin herhangi bir akışkan özelliğine, bir skalere veya bir vektöre uygulanabilmesi gibi, Reynolds transport teoremi de herhangi bir skaler veya vektörel özelliğe uygulanabilir.

Özet

- Lagrange ve Euler Yaklaşımları
  - İvme Alanı
  - Maddesel Türev
- Akış Desenleri ve Akışın Görselleştirilmesi
  - Akım Çizgileri ve Akım Tüpleri, Yörünge Çizgileri
  - Çıkış Çizgileri, Zaman Çizgileri
  - Kırılım Esaslı Akış Görselleştirme Teknikleri
  - Yüzey Akışı Görselleştirme Teknikleri
- Akış Verilerinin Çizimi
  - Vektör Çizimleri, Kontur Çizimleri
  - Diğer Kinematik Tanımlamamlar
  - Akışkan Elemanlarının Hareket veya Deformasyon Şekilleri
- Vortisite ve Dönümlülük
  - İki Dairesel Akışın Karşılaştırılması
- Reynolds Transport Teoremi (RTT)
  - Reynolds Transport Teoreminin Alternatif Türetimi
  - Maddesel Türev ve Reynolds Transport Teoremi (RTT) Arasındaki İlişki